Die Funktionsgleichungen des digitalen Integrators

The characteristic equations of the digital integrator

Elektron. Rechenanl. 10 (1968), H. 5, S. 234–242
Manuskripteingang: 3. 8. 1968

von W. ZOBERBIER
AEG-Telefunken
Ulm/Donau

In dieser Arbeit wird versucht, die Funktionsgleichungen des digitalen Integrators so darzustellen, daß sie die Möglichkeit bieten, für jede Rechenphase seinen Zustand genau darstellen zu können, ohne auf die interne digitale Schaltnetzstruktur eingehen zu müssen. In dieser Form erlauben die Gleichungen eine elegante Programmierung für eine schnelle Simulierung einer digitalen Integrieranlage auf dem Universalrechner. Darüber hinaus lassen sich aus den Funktionsgleichungen Bedingungen für die Synthese der digitalen Schaltnetzfunktion zur Realisierung des digitalen Integrators ableiten.

The paper attempts to present the characteristic equations of the digital integrator in such fashion that they allow the exact presentation of the integrator state for each phase of computation without necessity of describing the internal structure of the combinational circuit. This equation type permits elegant programming of a general-purpose computer for the rapid simulation of a digital differential analyzer (DDA). Moreover, conditions may be derived from the characteristic equations for the synthesis of the digital combinational circuit structure needed to materialize the digital integrator.

1. Einleitung

Der digitale Integrator als das charakteristische Rechenelement einer digitalen Integrieranlage (DDA) soll eine Operation ermöglichen, die im Prinzip einer Integration entspricht. Hierbei ist der Begriff der „Integration" mehr im Sinne der Lösung einer Differentialgleichung zu verstehen, als daß wie beim Integrator eines Analogrechners unmittelbar am Ausgang das Integral der zu integrierenden Funktion ablesbar ist.

Der digitale Integrator arbeitet mit Inkrementen sowohl am Eingang als auch am Ausgang, und diese Inkremente sollen den Differentialen der verschiedenen Variablen entsprechen. Die Lösung der Aufgabe besteht dann darin, die Differentiale der Lösungsfunktion zu finden. Und diese Differentiale, oder richtiger, die entsprechenden Inkremente, die eine durchaus meßbare Größe haben, liefert der digitale Integrator.

Der digitale Integrator, dessen Symbol in Bild 1 dargestellt ist, soll die Eingangsinkremente Δx und Δy so verarbeiten, daß das Inkrement Δz des Integrals

$$z=\int_{x_0}^{x_e} y\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

als Ausgabegröße entsteht. Im Bild sind näherungsweise anstelle der Inkremente Δx, Δy und Δz die Differentiale $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}z$ gesetzt. Das entspricht dem allgemeinen Gebrauch. Man sollte sich aber stets darüber im klaren sein, daß der digitale Integrator mit quantisierten Schritten, nämlich den Inkrementen, arbeitet. Das Ausgabeinkrement Δz soll nun die Abhängigkeit (1) charakterisieren, und zwar sei Δz_i durch

$$\Delta z_i = z_i - z_{i-1} \tag{2}$$

definiert, wobei für jedes i

$$z_i=\int_{x_0}^{x_i} y\,\mathrm{d}x \tag{2a}$$

gelten soll. Für Δz_i folgt dann:

$$\Delta z_i=\int_{x_0}^{x_i} y\,\mathrm{d}x-\int_{x_0}^{x_{i-1}} y\,\mathrm{d}x=\int_{x_{i-1}}^{x_i} y\,\mathrm{d}x\,. \tag{2b}$$

Analog zu (2) sei auch

$$\Delta y_i = y_i - y_{i-1} \tag{3}$$

definiert. Geht der Integrand y mit seinem jeweiligen Wert y_i durch ein Inkrement Δy_i aus dem alten Wert y_{i-1} hervor, dann soll für den Integranden das Bildungsgesetz

$$y_i = y_{i-1} + \Delta y_i \tag{3a}$$

gelten. Und für $\mathrm{d}x$ erscheinen die Inkremente Δx_i der unabhängigen Variablen x.

In welcher Form nun die Integration mit Hilfe des digitalen Integrators vorgenommen werden soll, hängt von der gewünschten Genauigkeit, von dem Feinheitsgrad Δx, mit dem der Ablauf der unabhängigen Variablen x beschrieben wird, aber auch davon ab, wie stark sich y innerhalb eines Δx_i ändern kann. Das Integrationsverfahren für den digitalen Integrator muß aber, da es sich bei ihm um einen in sich abgeschlossenen und unveränderbaren technischen Baustein handelt, ein für allemal vorgegeben werden, so daß bei der Entwicklung des digitalen Integrators am Anfang die Entscheidung steht, ob eine relativ einfache Integrationsmethode mit nicht zu großer Genauigkeit, wie die Integration durch Rechtecksummation — deren Integrator mit dem wenigsten technischen Aufwand aufgebaut werden kann —, oder aber eine genauere Methode, wie die Trapez-Integration, vorzu-

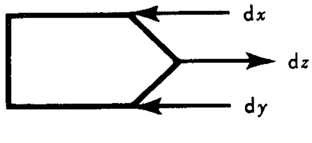

Bild 1. Das Symbol des digitalen Integrators.

ziehen ist und man sich dafür etwas mehr Technik leistet. Kompliziertere Methoden wie die Simpson-Regel kommen offenbar kaum vor.

Hier seien diese beiden einfachsten Fälle, die Rechtecksummation und die Trapez-Regel, behandelt.

Bei der Rechtecksummation sei anstelle von y ein Wert $y = y_i^* = \text{const}$ im Intervall $(x_{i-1}, x_i]$ gewählt und y_i^* gehe aus dem zuvor geltenden Wert y_{i-1}^* gemäß Formel (3a) hervor. Dann ist

$$\Delta z_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} y_i^* \cdot dx = y_i^* \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx = y_i^* \cdot \Delta x_i . \tag{4}$$

Im Falle der Trapez-Regel wird

$$y = \frac{1}{2}(y_{i-1}^* + y_i^*) = \text{const}$$

für das Intervall $(x_{i-1}, x_i]$ gewählt, und dann folgt

$$\Delta z_i = \frac{1}{2}(y_{i-1}^* + y_i^*) \cdot \Delta x_i ,$$

bzw.

$$\Delta z_i = y_i^* \cdot \Delta x_i - \frac{1}{2} \Delta y_i^* \cdot \Delta x_i , \tag{4a}$$

wenn man y_{i-1}^* durch $y_i^* - \Delta y_i^*$ ersetzt.

Die Formeln (4) bzw. (4a) stellen nur die Methode dar, nach der der digitale Integrator arbeiten soll. Intern hat er eine ganz andere Zahldarstellung, eine Zahldarstellung die kein Komma kennt, die aus den reellen Zahlen ganze Zahlen gemacht hat, und deren Verknüpfungen nach den Regeln der Festkommarechnung in einem Digitalrechner vor sich gehen. Will man eine digitale Integrieranlage mit Hilfe eines Universalrechners simulieren, d. h. die internen Schaltschritte innerhalb der Anlage abbilden, dann spiegeln die obigen Formeln das Geschehen im digitalen Integrator nicht wider. Korrekt wäre das Nachrechnen aller Vorgänge in den digitalen Verknüpfungselementen und Flip-Flop der Anlage. Aber das verbietet sich, da hierzu ein zu hoher Aufwand an Rechenzeit nötig wäre. Interessant ist darum eine Darstellung, aus der jede Registerstelle und jede Verknüpfung abgeleitet werden kann, die aber auch das Geschehen im Integrator in einer zusammengefaßten Form wiedergibt. Dies sei in den folgenden Kapiteln durchgeführt.

2. Die Operationen im Y-Operationsteil

Im Abschnitt 1 wurde bereits gezeigt, daß die Integrandenfunktion y nach Gleichung (3a) sukzessive akkumuliert gedacht sein kann:

$$y_i = y_{i-1} + \Delta y_i . \tag{3a}$$

Der Anteil des digitalen Integrators, in dem dieser Prozeß geschieht, ist der Y-Operationsteil. Eine digitale Anlage, und sei es ein digitales Integriergerät, arbeitet aber grundsätzlich mit quantisierten Größen, so daß im digitalen Integrator anstelle von y nur zugeordnete digitalisierte Werte y^* erscheinen können, die sich so wenig wie möglich von wahren Größen unterscheiden sollen. Ist Qy[1]) der Quantisierungsschritt für die Größe y ($Qy > 0$), so stellt er ein Maß für die Unterscheidungsmöglichkeit dar, d. h., es soll immer der wahre Wert innerhalb

$$y^* \leqq y < y^* + Qy \tag{5}$$

liegen, wobei y^* selbst ein Vielfaches von Qy ist. y^* läßt sich nun normieren, indem y^* durch sein Vielfaches von Qy dargestellt wird:

$$Y = y^*/Qy , \tag{6}$$

bzw. es ist

$$y^* = Y \cdot Qy . \tag{7}$$

Y ist die Registerfunktion zu y^*.

Analog dazu muß Δy_i^* gebildet sein, so daß

$$\Delta y_i^* = DY_i \cdot Qy \tag{8}$$

definiert sei. Unter diesen Umständen wird im Y-Operationsteil statt (3a) die Operation

$$y_i^* = y_{i-1}^* + \Delta y_i^* \tag{9}$$

durchgeführt oder in der normierten Form

$$Y_i = Y_{i-1} + DY_i . \tag{10}$$

DY_i ist ebenso wie Y_{i-1} ganzzahlig, so daß Y_i wieder ganz sein muß. Je nach der angewandten Technik wird es einen maximalen Betrag für das Inkrement DY geben. Um die Bedingungen, die damit zusammenhängen, besser formulieren zu können, seien zuvor einige Definitionen festgelegt. Es sei die Signumfunktion sgn A eingeführt, aber hier mit SA[2]) bezeichnet:

$$SA = \begin{cases} +1, \text{ wenn } A > 0 \\ -1, \text{ wenn } A < 0 \end{cases} \tag{11}$$

für $A = 0$ kann SA beliebig gewählt werden, weiter sei VA eine Vorzeichenfunktion, für die gilt:

$$VA = \begin{cases} 1, \text{ wenn } A > 0 \\ 0, \text{ wenn } A < 0 \end{cases}, \tag{12}$$

wiederum darf für $A = 0$ VA beliebig gewählt werden, und dann sei BA eine Betragsfunktion mit

$$BA = \begin{cases} A, \text{ wenn } A > 0 \\ -A, \text{ wenn } A < 0 \end{cases}. \tag{13}$$

Die Signumfunktion SA und die Vorzeichenfunktion VA charakterisieren an sich den gleichen Sachverhalt, so daß zwischen ihnen eine eindeutige Beziehung

$$SA = 2 \cdot VA - 1 \tag{14}$$

besteht. So gilt z. B. für

$$DY = SDY \cdot BDY , \tag{15}$$

wobei SDY die Signumfunktion und BDY der Betrag von DY ist.

Für DY sind nun — abhängig vom gewählten Verarbeitungstyp innerhalb des digitalen Integrators — Grenzen angenommen, die DY nicht überschreiten darf, damit der Inte-

[1]) In dieser Arbeit werden Größen z. T. auch durch zwei und mehr Buchstaben gekennzeichnet, wie es bei den Programmiersprachen ALGOL und FORTRAN gebräuchlich ist. Damit ist allerdings verbunden, daß zur Kennzeichnung der Multiplikation immer ein Multiplikationszeichen gesetzt werden muß.

[2]) In dieser Bezeichnung soll der Buchstabe S die Funktionseigenschaft charakterisieren, während A hier das Argument darstellt. In DY wiederum kann genauso D als Funktionszeichen und Y als Argument angesehen werden. Die Buchstaben S, D, B, V, R sind als Funktionszeichen für solche Zwecke freigehalten.

grator richtig arbeitet, und solche Begrenzungen sind in der Regel durch eine Form

$$-\max(BDY) \leqq DY \leqq \max(BDY) \tag{16}$$

bzw.

$$0 \leqq BDY \leqq \max(BDY)$$

gegeben. Als Beispiel seien drei häufig vorkommende Typen genannt:

a) $BDY = 1$. DY kann in diesem Falle nur die Werte $+1$ und -1 annehmen: $DY \in \{-1, +1\}$. Dieser Integrator arbeitet rein binär.

b) $\max(BDY) = 1$. Dies ist der Fall, für den DY den Wertevorrat $DY \in \{-1, 0, +1\}$ besitzt, und der Integrator muß für DY ternär arbeiten.

c) $\max(BDY) = \max(Y)$. In diesem Integrator nimmt DY gegenüber Y keine Sonderstellung ein, wie in a) und b), bei denen DY zugunsten einer einfacheren Technik einer Beschränkung unterworfen wird.

Ebenfalls von der gewählten Technik abhängig ist die Form, wie die Registerfunktion Y des Integranden y innerhalb des Integrators dargestellt wird. Hier sind zwei Darstellungstypen aufgezählt und näher behandelt:

a) Die Darstellung von Y als r-Komplement unter Zuhilfenahme seiner Vorzeichenfunktion VY, die ihren Vorzug deswegen hat, weil sie im Z-Operationsteil praktisch nicht zu umgehen ist.

b) Die Darstellung von Y durch den Betrag BY und die Signumfunktion SY bzw. die Vorzeichenfunktion VY. Diese Darstellung ist dann vorzuziehen, wenn das Register zur Akkumulation einer Lösungsfunktion dienen soll, die unmittelbar in Vorzeichen und Betrag ablesbar sein soll.

2.1 Die Darstellung im r-Komplement

Die Darstellung im r-Komplement bedeutet, daß für negative Y der Registerinhalt $RY = Y + r^N$ gesetzt wird und RY größer oder gleich Null sein soll. Zusammengefaßt soll gelten:

$$RY = \begin{cases} Y, \text{ wenn } Y \geqq 0, \text{ d. h. wenn } VY = 1 \\ Y + r^N, \text{ wenn } Y < 0, \text{ d. h. wenn } VY = 0, \end{cases} \tag{17}$$

wobei N die Anzahl der Registerstellen ist, die so gewählt ist, daß

$$-r^N < Y < r^N \tag{18}$$

erfüllt wird. Dieser Sachverhalt läßt sich kürzer formulieren durch

$$RY = Y + (1 - VY) \cdot r^N \tag{19}$$

und

$$0 \leqq RY < r^N. \tag{20}$$

Anstelle der Formel (10) für Y_i müssen jetzt andere für RY_i und VY_i treten, die als Funktionen von RY_{i-1}, VY_{i-1}, BDY_i und VDY_i auszudrücken sind. Dazu ersetzen wir die Größen in (10) durch

$$Y = RY - (1 - VY) \cdot r^N, \tag{19a}$$

wie es sich aus (19) ergibt, und (15) durch

$$DY = (2 \cdot VDY - 1) \cdot BDY, \tag{15a}$$

wobei $SDY = (2 \cdot VDY - 1)$ nach (14) gesetzt ist. Dann gilt

$$RY_i - (1 - VY_i) \cdot r^N = RY_{i-1} - (1 - VY_{i-1}) \cdot r^N + (2 \cdot VDY_i - 1) \cdot BDY_i. \tag{21}$$

Dividiert man die ganze Gleichung durch r^N und wendet darauf die Entierfunktion an, so wird

$$\left[\frac{RY_i}{r^N}\right] - (1 - VY_i) = \left[\frac{RY_{i-1} + (2 \cdot VDY_i - 1) \cdot BDY_i}{r^N}\right] - (1 - VY_{i-1}). \tag{21a}$$

Aus (20) läßt sich aber ableiten, daß für jedes RY

$$0 \leqq \frac{RY}{r^N} < 1 \tag{20a}$$

ist und daß dann

$$\left[\frac{RY}{r^N}\right] = 0 \tag{20b}$$

sein muß. Anders ist es bei der Entierfunktion auf der rechten Seite der Gleichung (21a). Sie kann durchaus $= 1$ oder $= 0$ werden, so daß ein Ansatz

$$RY_{i-1} + (2 \cdot VDY_i - 1) \cdot BDY_i = R\ddot{U} + D\ddot{U} \cdot r^N \tag{22}$$

mit $0 \leqq R\ddot{U} < r^N$ sinnvoll ist. Eine solche Konstruktion hat den Vorzug, sich eng an das technische Geschehen im Integrator anzulehnen, bei dem das Auftreten von Überträgen als Kriterien für Bereichswechsel herangezogen wird, z. B. bei Übergängen vom positiven zum negativen Zahlbereich und umgekehrt. Bei Anwendung der Entierfunktion auf Gleichung (22), nachdem diese durch r^N dividiert und beachtet wurde, daß

$$\left[\frac{R\ddot{U}}{r^N}\right] = 0$$

ist, wird dann

$$D\ddot{U} = \left[\frac{RY_{i-1} + (2 \cdot VDY_i - 1) \cdot BDY_i}{r^N}\right], \tag{23}$$

und, wenn man dies für (21a) verwendet,

$$VY_i = VY_{i-1} + D\ddot{U}. \tag{24}$$

Die interne Darstellung von $D\ddot{U}$ im digitalen Integrator entspricht aber der von (15a), so daß

$$VY_i = VY_{i-1} + (2 \cdot VD\ddot{U} - 1) \cdot BD\ddot{U} \tag{24a}$$

ist. Beachtet man nun, daß für Y eine Bereichsüberschreitung nur bei $Y = 0$, aber keine Überläufe vorkommen können, dann kann $VD\ddot{U} = 1$ nur sein, wenn $VDY_i = 1$ ist, und ebenso ist $VD\ddot{U} = 0$, wenn $VDY_i = 0$ ist, d. h. es ist $VD\ddot{U} = VDY_i$. Das gibt uns schließlich die endgültige Formel für VY_i:

$$VY_i = VY_{i-1} + (2 \cdot VDY_i - 1) \cdot BD\ddot{U}. \tag{24b}$$

Löst man nun Gleichung (21) nach RY_i auf und ersetzt darin VY_i durch die rechte Seite von (24b), dann folgt die gesuchte Formel für RY_i:

$$RY_i = RY_{i-1} + (2 \cdot VDY_i - 1) \cdot (BDY_i - BD\ddot{U} \cdot r^N). \tag{25}$$

Handelt es sich bei Y um eine periodische Funktion, dann ist die Voraussetzung für Formel (24b) nicht mehr zutreffend, sondern es können Überschreitungen sowohl in positiver als auch in negativer Richtung beliebig erfolgen. Die Bedingung dafür ist allerdings, daß y gerade so normiert ist, daß Y die Periode r^N hat, so daß für Y gilt

$$0 \leqq Y \leqq r^N - 1, \text{ d. h. es ist } Y = RY, \tag{26}$$

und wegen der Periodizität läßt sich RY aus einem Hilfswert $HY_i = Y_{i-1} + DY_i$ berechnen, da ein k derart existiert, daß

$$Y = RY + k \cdot r^N \tag{27}$$

ist, zu

$$RY \equiv HY \bmod r^N. \tag{28}$$

VY ist bei dieser Darstellung irrelevant.

Eine zweite Möglichkeit der Periodizität ist die, daß Y die Periode $2 \cdot r^N$ hat, wobei angenommen werden kann, daß Y die Bedingung

$$-r^N \leqq Y < r^N \tag{29}$$

erfüllt. Die Formel (28) für RY gilt dann ebenso, nur muß VY evtl. modifiziert werden; denn nach (24b) können jetzt $VY_i > 1$ und $VY_i < 0$ auftreten, die keinen Sinn haben. Beim Überschreiten des Hauptwertes nach oben hin, also über r^N hinaus, geht Y von einem positiven in einen negativen Wert über, und Entsprechendes geschieht an der unteren Grenze. Das Vorzeichen wechselt also innerhalb $2 \cdot r^N$ mit der Periode 2, und dasselbe gilt demzufolge für die Vorzeichenfunktion VY, die dann $VY \bmod 2$ zu nehmen ist. Nennt man das VY_i, das man mit Hilfe der Formel (24b) herausbekommen hat, $VY_i{}^*$, dann ist

$$VY_i = VY_i^* \bmod 2, \tag{30}$$

wobei

$$VY_i^* = VY_{i-1} + (2 \cdot VDY_i - 1) \cdot BD\ddot{U}$$

und

$$0 \leqq VY_i < 2$$

ist, und wenn das gilt, kann man statt dessen

$$VY_i = VY_i^* - 2 \cdot \left[\frac{VY_i^*}{2}\right] \tag{31}$$

schreiben.

2.2 Die Darstellung in Betrag und Vorzeichen

Wird Y im Register durch seinen Betrag BY und die Vorzeichenfunktion VY dargestellt, wobei die Beziehungen

$$Y = SY \cdot BY = (2 \cdot VY - 1) \cdot BY \tag{32}$$

und entsprechend

$$DY = SDY \cdot BDY = (2 \cdot VDY - 1) \cdot BDY \tag{33}$$

existieren, und benutzt man diese Darstellungen in (10) für die Bildung des neuen Wertes Y_i, dann erhält man

$$Y_i = SY_i \cdot BY_i = Y_{i-1} + DY_i = SY_{i-1} \cdot BY_{i-1} + SDY_i \cdot BDY_i, \tag{34}$$

oder, wenn auf der rechten Seite SY_{i-1} ausgeklammert wird,

$$SY_i \cdot BY_i = SY_{i-1} \cdot (BY_{i-1} + SY_{i-1} \cdot SDY_i \cdot BDY_i). \tag{35}$$

Hierbei ist berücksichtigt, daß nach Definition $SY_{i-1}^2 = 1$ ist. Man kann nun den Operationsablauf sich zweistufig vorstellen, indem zuerst eine Größe PY gebildet wird und hinterher die Verknüpfung von PY mit SY_{i-1} geschieht. PY entsteht durch Addition oder Subtraktion von BDY_i zum alten Registerinhalt BY_{i-1}, je nachdem $SY_{i-1} \cdot SDY_i$ positiv oder negativ ist:

$$PY = BY_i + SY_{i-1} \cdot SDY_i \cdot BDY_i. \tag{36}$$

PY kann aufgrund dieser Bildung sowohl positiv bleiben oder auch negativ werden. Das letztere passiert dann, wenn vom stets positiven Betrag BY_i ein noch größeres positives BDY_i abgezogen wird. Wann das erfolgt, erkennt man sehr leicht, nämlich wenn bei der Verknüpfung ein Übertrag $BD\ddot{U}$ entsteht. Denn da angenommen werden muß, daß

$$-r^N < Y < r^N \tag{37}$$

ist, weil Y nicht über das Fassungsvermögen des Registers hinauswachsen darf, daß also auch

$$0 \leqq BY < r^N \tag{37a}$$

gilt, kann ein Übertrag nur beim Übergang durch den Nullpunkt entstehen. Macht man nun für PY den Ansatz

$$PY = R\ddot{U} + D\ddot{U} \cdot r^N \tag{38}$$

und gilt für $R\ddot{U}$

$$0 \leqq R\ddot{U} < r^N \tag{39}$$

und für $D\ddot{U}$

$$D\ddot{U} = SD\ddot{U} \cdot BD\ddot{U},$$

so folgt

$$\left[\frac{PY}{r^N}\right] = \left[D\ddot{U} + \frac{R\ddot{U}}{r^N}\right] = D\ddot{U} = SD\ddot{U} \cdot BD\ddot{U}, \tag{40}$$

da $D\ddot{U}$ ganzzahlig und $[R\ddot{U}/r^N] = 0$ wegen $0 \leqq R\ddot{U}/r^N < 1$ ist. Wie Y kann auch PY nach (35) und (36) nur wie folgt variieren:

$$-r^N \leqq PY < r^N, \tag{41}$$

und das bedeutet, daß

$$-1 \leqq \left[\frac{PY}{r^N}\right] = SD\ddot{U} \cdot BD\ddot{U} < 1 \tag{42}$$

bei $BD\ddot{U} = 1$ nur für $SD\ddot{U} = -1$ erfüllt ist. Bei $BD\ddot{U} = 0$ ist das Vorzeichen unerheblich, und somit muß gelten:

$$BD\ddot{U} = -\left[\frac{PY}{r^N}\right]. \tag{43}$$

Wie schon gesagt, gibt es bei der Betragsdarstellung nur zwei Klassen, die die positiven und negativen Werte charakterisieren, und ein Übergang von der einen zur anderen kann nur erfolgen, wenn ein $BD\ddot{U} = 1$ auftritt. Tritt kein Übertrag auf, dann bleibt die Funktion Y in derselben Klasse, d. h. sie behält ihr Vorzeichen. Dieser Sachverhalt kann so ausgedrückt werden:

$$SY_i = \begin{cases} SY_{i-1}, \text{ wenn } BD\ddot{U} = 0 \\ -SY_{i-1}, \text{ wenn } BD\ddot{U} = 1 \end{cases}, \tag{44}$$

oder als Formel:

$$SY_i = SY_{i-1} \cdot (1 - 2 \cdot BD\ddot{U}). \tag{45}$$

Eine entsprechende Formel erhält man für VY_i, wenn die SY nach (14) durch die VY ausgedrückt werden, nämlich

$$VY_i = VY_{i-1} + BD\ddot{U} \cdot (1 - 2 \cdot VY_{i-1}). \tag{46}$$

(45) verwendet man nun für die Bestimmung von BY_i, und

es ist wegen

$$BY_i = SY_i \cdot SY_{i-1} \cdot PY$$

und

$$SY_i \cdot SY_{i-1} = 1 - 2 \cdot BD\ddot{U}$$

$$BY_i = (1 - 2 \cdot BD\ddot{U}) \cdot PY. \tag{47}$$

Aus dem, was über den Y-Operationsteil bisher behandelt wurde, kann man erkennen, daß einmal zur Darstellung der Funktion Y ein Register benötigt wird, in dem Y_{i-1} in einer einmal gewählten Zahldarstellung gespeichert werden kann, und daß außerdem ein Schaltnetz nötig ist. das die Verknüpfung der beiden Größen Y_{i-1} und DY_i vornimmt. Für die Realisierung der Y-Operation sind also zwei Operationseinheiten nötig, die „Y-Register" und „Y-Addierer" genannt werden (Bild 2).

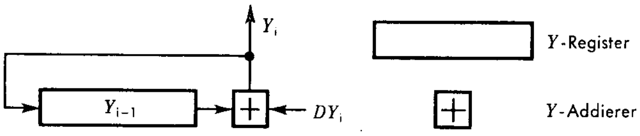

Bild 2. Der Aufbau des Y-Operationsteiles.

3. Die Operationen im Z-Operationsteil

Für die Z-Operation innerhalb des Integrators sind in Abschnitt 1 zwei Möglichkeiten (4) und (4a) zur Bildung des Inkrements Δz_i der Integralfunktion erläutert worden. Diese beiden Methoden sollen hier behandelt werden in ihrer Ausführung durch den digitalen Integrator, und zwar in 3.1 die einfachere Methode der Rechtecksummation und in 3.2 die Trapezmethode.

3.1 Die Integration nach der Rechtecksummation

Zugrunde gelegt wird die Formel (4) aus Abschnitt 1

$$\Delta z_i = y_i \cdot \Delta x_i,$$

die allerdings wie im Y-Operationsteil durch die zugeordneten digitalisierten Größen ersetzt wird:

$$\Delta z_i^* = y_i^* \cdot \Delta x_i^*. \tag{48}$$

Analog zu Δy^* in (8) sei definiert

$$\Delta x^* = DX \cdot QX, \tag{49}$$

und für DX sollen dieselben Bedingungen gelten, wie sie für DY in (16) aufgestellt wurden. Eines ist allerdings hier in noch stärkerem Maße zu berücksichtigen, daß nämlich die Schwierigkeiten bei der technischen Realisierung wegen der durchzuführenden Multiplikation in (48) für max $(BDX) > 1$ wesentlich größer sind als für max $(BDX) = 1$. Für unsere mathematischen Betrachtungen spielen diese Bedenken keine Rolle, es soll aber auf den einfacheren Spezialfall max $(BDX) = 1$ im geeigneten Augenblick besonders hingewiesen werden.

Wie für DY in (15), gibt es auch für DX eine entsprechende Form

$$DX = SDX \cdot BDX = (2 \cdot VDX - 1) \cdot BDX. \tag{50}$$

Als Zahldarstellung kommt für die Z-Operation nur das r-Komplement in Frage, wie es in 2.1 für Y behandelt wurde, da hierbei der Registerinhalt jeweils nur den Rest darstellt, der bei der Inkrementbildung übrig bleibt und beim nachfolgenden Verarbeitungszyklus weiter verwertet wird. Die Überläufe des sogenannten Z-Registers — das sind die Anteile, die über maximale Fassungsvermögen hinauswachsen — stellen die Inkremente des Integrals dar. Sie alle akkumuliert bilden dann das Integral. Δz_i^* wird also nicht unmittelbar erzeugt, sondern das Inkrement $DZ \cdot Qz$ soll immer als Vielfaches des Quantisierungsschritts Qz abgegeben werden und ist irgendwie von Δz_i^* abhängig.

Das Prinzip dabei ist, daß nicht immer bei jeder Eingabe von Werten y_i^* und Δx_i^* ein Inkrement Δz_i^* geliefert wird, sondern daß eine Zwischenspeicherung erfolgt, und daß erst nach dem Anwachsen auf einen vorgegebenen Mindestwert Qz eins abgegeben wird. Dazu wird Δz_i^* durch seine Definition

$$\Delta z_i^* = z_i^* - z_{i-1}^* \tag{51}$$

ersetzt und die Gleichung (48) dann umgeformt zu

$$z_i^* = z_{i-1}^* + y_i^* \cdot \Delta x_i^*. \tag{52}$$

Der Trick ist nun, daß z_i^* nicht in derselben Einheit wie $DZ_i \cdot Qz$ dargestellt wird, sondern in einer Einheit Qrz, die wegen der Gleichung (52) gleich dem Produkt von $Qy \cdot Qx$ sein sollte. Ist nämlich

$$z_i^* = GZ_i \cdot Qrz \tag{53}$$

und

$$y_i^* \cdot \Delta x_i^* = Y_i \cdot Qy \cdot DX_i \cdot Qx,$$

dann folgt nach (52)

$$GZ_i \cdot Qrz = GZ_{i-1} \cdot Qrz + Y_i \cdot DX_i \cdot Qy \cdot Qx, \tag{54}$$

und es ist zweckmäßig, in dieser Gleichung die Maßeinheiten gleich zu setzen:

$$Qrz = Qx \cdot Qy, \tag{55}$$

so daß dann aus (54)

$$GZ_i = GZ_{i-1} + Y_i \cdot DX_i \tag{56}$$

folgt.

Nach (55) kann Qrz nur der kleinste mögliche Quantisierungsschritt für z^* sein; der Quantisierungsschritt Qz für das Inkrement des Integrals muß also größer oder mindestens gleich Qrz sein. DZ als normiertes Inkrement soll immer mit der Maßeinheit Qz abgegeben werden, wenn sich eine ausreichend große Menge von Inkrementen Qrz im „Z-Register" angesammelt hat. Besitzt das Z-Register M Registerstellen, so wird sein Fassungsvermögen bei r^M gerade überschritten, und es muß bei r^M Inkrementen Qrz ein Qz abgegeben werden. Das heißt, es ist

$$Qz = r^M \cdot Qrz. \tag{57}$$

Die quantisierte Größe z_i^* ist auf Qrz bezogen. Will man nun wissen, aus wie vielen Inkrementen DZ sich z_i^* zusammensetzt, so muß man es durch Qz dividieren und davon die Entierfunktion bilden. Da dies kein Vielfaches von Qz zu sein braucht, wird ein Rest rz_i^* übrig bleiben, der kleiner als Qz sein muß. Aber wie z_i^* ist auch rz_i^* Vielfaches von Qrz. z_i^* setzt sich dann folgendermaßen zusammen:

$$z_i^* = \left[\frac{z_i^*}{Qz}\right] \cdot Qz + rz_i^* \tag{58}$$

mit

$$0 \leq rz_i^* < r^M, \tag{59}$$

und bezeichnet man

$$\left[\frac{z_i^*}{Qz}\right]=Z_i \tag{60}$$

und rz_i^* als Vielfaches von Qrz mit

$$rz_i^*=RZ_i\cdot Qrz\,, \tag{61}$$

dann folgt

$$z_i^*=Z_i\cdot Qz+RZ_i\cdot Qrz\,. \tag{62}$$

Das normierte Inkrement DZ_i ist mit dem Quantisierungsschritt Qz verknüpft, so daß naheliegt, es mit Hilfe der Z_i zu definieren:

$$DZ_i=Z_i-Z_{i-1}\,. \tag{63}$$

Beachtet man außerdem, daß nach (57) $Qz = r^M \cdot Qrz$ ist, und formt man die Gleichung (52) entsprechend um, dann erhält man mit (62)

$$DZ_i\cdot r^M+RZ_i=RZ_{i-1}+Y_i\cdot DX_i \tag{64}$$

die Funktionsgleichung für die Z-Operation des digitalen Integrators.

Wird die Operation zweistufig ausgeführt, indem zuerst

$$PZ_i=RZ_{i-1}+Y_i\cdot DX_i \tag{65}$$

setzt und anschließend, da ja auch

$$PZ_i=DZ_i\cdot r^M+RZ_i \tag{66}$$

nach (64) ist, aus PZ_i/r^M die Entierfunktion gebildet wird, so bekommt man unmittelbar

$$DZ_i=\left[\frac{PZ_i}{r^M}\right] \tag{67}$$

und

$$RZ_i=PZ_i-DZ_i\cdot r^M\,. \tag{68}$$

Die Formeln (65), (67) und (68) bilden zwar ein vollständiges System, von denen aber nur die Gleichung für RZ_i direkt verwendbar ist, denn weder sind Y_i und DX_i unmittelbar gegeben, noch wird DZ_i verlangt. Für Y_i und DX_i sind allerdings die Eingabegrößen in der richtigen Form vorgegeben, so ist nach (50)

$$DX_i=(2\cdot VDX_i-1)\cdot BDX_i \tag{50}$$

und Y_i je nach Zahldarstellung im Y-Register

a) im r-Komplement (29):

$$Y_i=RY_i-(1-VY_i)\cdot r^N \tag{29}$$

b) in Betrag und Vorzeichen (32):

$$Y_i=(2\cdot VY_i-1)\cdot BY_i\,. \tag{32}$$

Entsprechend der Darstellung für DX_i und DY_i sind nun noch aus DZ_i der Betrag BDZ_i und die Vorzeichenfunktion VDZ_i zu bestimmen.

Es ist also zu untersuchen, wie aus VY_i, VDX_i und eventuell dem Übertrag des Z-Registers, der der Betrag BDZ_i von DZ_i ist, die Vorzeichenfunktion VDZ_i ermittelt werden kann. Dazu sei in Gleichung (65)

$$Y_i=SY_i\cdot BY_i$$

und

$$DX_i=SDX_i\cdot BDX_i$$

gesetzt, damit PZ_i auf Vorzeichenverhältnisse hin näher betrachtet werden kann:

$$PZ_i=RZ_{i-1}+SY_i\cdot SDX_i\cdot BY_i\cdot BDX_i\,. \tag{65a}$$

Sowohl RZ_{i-1} als auch BY_i und BDX_i sind in dieser Gleichung nicht negativ, so daß PZ_i nur negativ werden kann, wenn ein Übertrag BDZ_i auftritt und wenn außerdem $SY_i \cdot SDX_i = -1$ ist. Ist dies nicht der Fall, dann muß PZ_i positiv oder gleich Null sein. Andererseits ist aber nach (66), indem

$$DZ_i=SDZ_i\cdot BDZ_i$$

eingesetzt wird,

$$PZ_i=SDZ_i\cdot BDZ_i\cdot r^M+RZ_i\,. \tag{66a}$$

Hierin sind wiederum alle Größen mit Ausnahme von SDZ_i nicht negativ, und es kann PZ_i nur negativ werden, wenn $BDZ_i = 0$ und $SDZ_i = -1$ ist. Zusammengefaßt kann also gesagt werden:

$$SDZ_i=\begin{cases}+1, \text{ wenn } BDZ_i=0 \text{ oder } SY_i\cdot SDX_i=+1\\ -1, \text{ wenn } BDZ_i\neq 0 \text{ und } SY_i\cdot SDX_i=-1\end{cases}. \tag{69}$$

Es ist aber $SY_i \cdot SDX_i = +1$ nur dann, wenn beide Vorzeichen übereinstimmen, somit also nur, wenn auch die beiden Vorzeichenfunktionen den gleichen Wert haben, d. h. wenn von der Logik her gesehen die Äquivalenzaussage $VY_i = VDX_i$ erfüllt ist. VY_i und VDX_i können beide nur die Werte 0 und 1 annehmen, so daß sie als Aussagenvariable einer binären Logik angesehen werden können, und der Fall $SY_i \cdot SDX_i = +1$ entspricht dann der Aussage

$$\ddot{A}_i=VY_i\wedge VDX_i\vee\overline{VY_i}\wedge\overline{VDX_i}=1\,. \tag{70}$$

$\ddot{A}_i$ kann ein arithmetischer Ausdruck

$$\ddot{A}_i=VY_i\cdot VDX_i+(1-VY_i)\cdot(1-VDX_i)=1 \tag{71}$$

zugeordnet werden, wenn man beachtet, daß das Komplement $\bar{A}$ der booleschen Variablen A dieselben Werte wie der arithmetische Ausdruck

$$A-1\mathrel{\hat{=}}\bar{A} \tag{72}$$

hat, und Entsprechendes gilt für die Konjunktion

$$A\cdot B\mathrel{\hat{=}}A\wedge B\,. \tag{73}$$

Die Disjunktion läßt sich über das de Morgan-Theorem herleiten, wonach

$$A\vee B=\overline{\bar{A}\wedge\bar{B}}\mathrel{\hat{=}}1-(1-A)\cdot(1-B)=A+B-AB \tag{74}$$

ist. Um nun noch ähnlich für BDZ_i in Verbindung mit $\ddot{A}_i$ vorgehen zu können, sei eine weitere Funktion NA_i eingeführt, die als Nullabfrage bezeichnet wird:

$$NA_i=\begin{cases}0, \text{ wenn } BDZ_i=0\\ 1, \text{ wenn } BDZ_i\neq 0\end{cases}. \tag{75}$$

Sie erlaubt, die Aussage (69) vollständig als eine logische Aussage zu formulieren:

$$VDZ_i=\begin{cases}1, \text{ wenn } SDZ_i=+1,\\ \quad\text{und das gilt, wenn } NA_i=0 \text{ oder } \ddot{A}_i=1\\ 0, \text{ wenn } SDZ_i=-1,\\ \quad\text{und das gilt, wenn } NA_i=1 \text{ und } \ddot{A}_i=0\end{cases}. \tag{76}$$

In einer Formel dargestellt ist das

$$VDZ_i=\overline{NA_i}\vee\ddot{A}_i\,, \tag{77}$$

bzw. in arithmetischer Form

$$VDZ_i = 1 - NA_i \cdot (1 - \ddot{A}_i). \tag{78}$$

DZ_i erhält man dann als

$$DZ_i = (2 \cdot VDZ_i - 1) \cdot BDZ_i \tag{79}$$

und RZ_i hat man dann nach Formel (68).

Das Formelsystem für die Berechnung von VDZ_i, BDZ_i und RZ_i setzt sich somit zusammen aus den Gleichungen (19) bzw. (32), (50), (65), (67), wenn DZ_i unmittelbar bestimmt werden kann; $VDZ = \frac{1}{2}(SDZ_i + 1)$; aus (80) folgt $BDZ_i = SDZ_i \cdot DZ_i$; und schließlich (68).

Wird nicht DZ_i bestimmt, sondern liefert das Schaltnetz den Übertrag BDZ, dann wählt man besser das Formelsystem: (19) bzw. (32), (50), (65), (71), (79), (80) und (68).

Die Realisierung der Z-Operation kann man sich ähnlich wie bei der Y-Operation vorstellen. Sie besteht aus zwei Operationseinheiten, dem „Z-Register" und dem „Z-Addierer". Die Registereinheit ist die gleiche wie beim Y-Register; evtl. besitzen beide eine unterschiedliche Länge. Der Z-Addierer hat einen Eingang mehr als der Y-Addierer, denn er hat die Ausgabewerte vom Z-Register mit den Ausgabewerten vom Y-Addierer und dem Eingangs-Inkrement DX_i zu verknüpfen. Der gesamte digitale Integrator setzt sich dann aus den beiden Operationen, Y-Operation und Z-Operation, zusammen. Wie dies als Prinzipschaltbild aussieht, zeigt Bild 3.

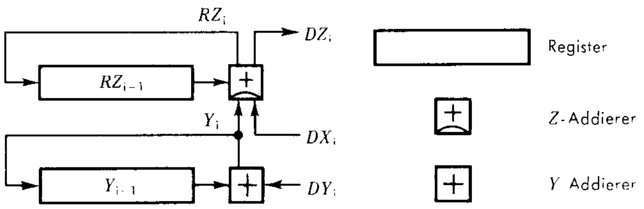

Bild 3. Der Aufbau des digitalen Integrators.

Eine Bemerkung zur Formel (65) sei noch angeführt. In ihr erscheint das Produkt $Y_i \cdot DX_i$, das sich in der Schaltung als eine Verknüpfung der Zahlen $RY_i \cdot BDX_i$ bzw. $BY_i \cdot BDX_i$ äußert. RY_i oder BY_i sind auf jeden Fall Größen, die größer als 1 werden können. Anders ist es bei BDX_i. Hier gibt es den Fall max $(BDX) = 1$, der sich heraushebt. Gilt nämlich diese Voraussetzung, dann kann die Multiplikation mit 1 oder 0 auch als Entscheidung angesehen werden, ob RY_i bzw. BY_i zu RY_i addiert werden soll oder nicht, und dann kommen in der Formel (65) zur Bildung von PZ_i nur Additionen vor. Ist max $(BDX) > 1$, dann besteht diese Möglichkeit nicht mehr, sondern es muß eine Multiplikation ausgeführt werden.

3.2 Die Integration nach der Trapezmethode

Diese Methode unterscheidet sich gegenüber der Rechteckmethode, die im vorigen Kapitel behandelt wurde, nur dadurch, daß von $y_i^* \cdot \Delta x_i^*$ noch ein Anteil $\frac{1}{2} \cdot \Delta y_i^* \cdot \Delta x_i^*$ abgezogen wird. Da nach (8)

$$\Delta y_i^* = DY_i \cdot Qy \tag{8}$$

und nach (49)

$$\Delta x_i^* = DX_i \cdot Qx \tag{49}$$

ist, besteht zwischen der gewünschten Form $\frac{1}{2} \cdot \Delta y_i^* \cdot \Delta x_i^*$ und der internen Darstellung im Integrator $\frac{1}{2} \cdot DY_i \cdot DX_i$ die Beziehung

$$\frac{1}{2} \Delta y_i^* \cdot \Delta x_i^* = \frac{1}{2} \cdot DY_i \cdot DX_i \cdot Qy \cdot Qx. \tag{80}$$

Subtrahiert man dies von (52) bzw. von (56), so ergibt sich

$$GZ_i = GZ_{i-1} + Y_i \cdot DX_i - \frac{1}{2} \cdot DY_i \cdot DX_i. \tag{81}$$

Für GZ geschieht nun dasselbe wie in 3.1, und es gelten überall dieselben Schlüsse, nur daß anstelle des PZ_i, wie es durch (65) gegeben ist,

$$PZ_i = RZ_{i-1} + Y_i \cdot DX_i - \frac{1}{2} \cdot DY_i \cdot DX_i. \tag{82}$$

genommen werden muß.

Eine Komplikation tritt allerdings bei der Bestimmung von VDZ_i auf. Um diese zu beseitigen, sei PZ_i etwas anders geschrieben, nämlich

$$PZ_i = RZ_{i-1} + FY_i \cdot DX_i \tag{83}$$

und

$$FY_i = Y_i - \frac{1}{2} \cdot DY_i. \tag{84}$$

FY_i tritt in (83) an die Stelle von Y_i, und alles, was in 3.1 ab Formel (65a) für Y_i, VY_i, SY_i behandelt wurde, gilt jetzt für FY_i, VFY_i und SFY_i. Wenn VFY_i bestimmt ist, dann kann $\ddot{A}_i$ nach (71) berechnet werden, und der weitere Rechnungsgang erfolgt wie in 3.1.

Ersetzt man FY_i durch Vorzeichen und Betrag

$$FY_i = SFY_i \cdot BFY_i \tag{85}$$

und entsprechend auch Y_i und DY_i, dann ist

$$SFY_i \cdot BFY_i = SY_i \cdot \left(BY_i - \frac{1}{2} \cdot SY_i \cdot SDY_i \cdot BDY_i \right), \tag{86}$$

und nennt man den Inhalt der Klammer auf der rechten Seite

$$EY_i = BY_i - \frac{1}{2} \cdot SY_i \cdot SDY_i \cdot BDY_i, \tag{87}$$

so muß

$$SFY_i = SY_i \cdot SEY_i \tag{88}$$

sein.

Die Vorzeichenfunktion VEY_i von EY_i aber ist auf ähnliche Weise zu ermitteln, wie es in (46) geschah: Da der Betrag BEY_i von EY_i ein Betrag von Y_i ist, der so begrenzt ist, daß das Register nicht überläuft, tritt ein Übertrag $BDEY_i = 1$ dann und nur dann auf, wenn der Nullpunkt, gleichgültig von welcher Seite her, überschritten wird. Dies muß dann immer einen Vorzeichenwechsel bedeuten.

Also gilt

$$\mathrm{SEY}_i = \begin{cases} +1, \text{ wenn } BDEY_i = 0 \\ -1, \text{ wenn } BDEY_i = 1 \end{cases},$$

und man erhält analog zu (44) bis (46)

$$VEY_i = 1 - BDE_i. \tag{89}$$

Es ist nun $SFY_i = +1$ nur dann, wenn die Vorzeichen von Y_i und EY_i übereinstimmen, oder anders formuliert: Es ist $VFY_i = 1$ nur dann, wenn $VY_i = VEY_i$, und das bedeutet

$$VFY_i = VY_i \wedge VEY_i \vee \overline{VY_i} \wedge \overline{VEY_i}. \tag{90}$$

Die zugeordnete arithmetische Schreibweise dafür ist:

$$VFY_i = VY_i \cdot VEY_i + (1 - VY_i) \cdot (1 - VEY_i).$$

Setzt man außerdem (89) ein, dann ergibt sich

$$VFY_i = VY_i - BDEY_i \cdot (2 \cdot VY_i - 1)\,. \tag{91}$$

Das Formelsystem für die Berechnung von VDZ_i, BDZ_i und RZ_i muß nun so abgeändert werden, daß statt (65) die Formel (82) benutzt wird, dann die Formel (91) eingeschoben wird und schließlich in (71) anstelle von VY_i der Wert für VFY_i gesetzt wird. Der weitere Ablauf erfolgt wie in 3.1.

3.3 Der Maßstabsfaktor des Z-Inkrements

Mit jedem Ausgabetakt gibt der Integrator sein Ausgabeinkrement DZ_i ab. Dieses DZ_i ist normiert und gibt keine Auskunft über die Größe, die es repräsentieren soll. Allerdings muß ein Zusammenhang zwischen $\Delta z_i{}^*$ und den Eingabegrößen $y_i{}^*$ und $\Delta x_i{}^*$ bestehen, der von den Maßstabsfaktoren von $y_i{}^*$ und $\Delta x_i{}^*$ abhängen muß.

Aus Formel (55) $Qrz = Qx \cdot Qy$ und (57) $Qz = r^M \cdot Qrz$ bekommt man den Zusammenhang

$$Qz \cdot r^{-M} = Qx \cdot Qy \tag{92}$$

zwischen den Quantisierungsschritten der Integralfunktion z^* und denen der Größen y^* und Δx^*. Anstelle der Normierung mit Hilfe des Quantisierungsschritts Qy, der die Formel (7) zur Folge hat, findet man noch eine andere Schreibweise:

$$Y = fy \cdot y^*, \tag{93}$$

wobei fy als Maßstabsfaktor des Y-Registers bezeichnet wird. Zwischen Qy und fy besteht dann die einfache Beziehung $fy = 1/Qy$. Häufig wird die Wahl des Maßstabsfaktors fy so vorgenommen, daß er eine Potenz vor r ist: $fy = r^{Sy}$. Das hat bei ganzzahligen Sy den Vorteil, daß bei der Multiplikation mit einem solchen Maßstabsfaktor die Ziffernfolge innerhalb des Registers erhalten bleibt, sondern nur eine Kommaverschiebung bewirkt wird. Somit kann also

$$fy = 1/Qy = r^{Sy} \tag{94}$$

gesetzt werden. Entsprechendes gilt für jede der anderen Variablen. (Oft wird Sy als „Maßstabsfaktor" bezeichnet, obwohl das nicht korrekt ist.)

Setzt man (94) und die entsprechenden Größen in (92) ein, so ergibt sich

$$r^{-Sz} \cdot r^{-M} = r^{-Sx} \cdot r^{-Sy} \tag{95}$$

oder

$$Sz + M = Sx + Sy\,, \tag{96}$$

die bekannte Relation zwischen den „Maßstabsfaktoren". Hieraus folgt weiter: Sind Sx und Sy ganzzahlig, dann ist auch Sz ganzzahlig.

Es sei nun untersucht, welche Bedingungen man an die Anzahl der Registerstellen im Y-Register N und im Z-Register M knüpfen muß.

Das Fassungsvermögen des Z-Registers r^M muß mindestens so groß gewählt werden, daß der maximal mögliche Wert von $y_i{}^* \cdot \Delta x_i{}^*$ in seiner normierten Form im Z-Register so viel Platz findet, daß ein entstehendes Inkrement $DZ_i \cdot Qz$ einen Maximalwert max (BDZ) nicht überschreitet. An dieser Stelle muß festgestellt werden, wie groß die normierten Werte von $y_i{}^*$ und $\Delta x_i{}^*$ sein können. Es kann vorkommen, daß es nicht möglich ist, das Register voll auszunutzen, und weiß man, daß n die Anzahl der Registerstellen im Register ist, die stets leer bleiben, weil der Wertevorrat von Y nur $N - n$ Stellen in Anspruch nimmt, dann gilt

$$r^{N-n-1} \leqq Y_{\max} < r^{N-n}\,, \tag{97}$$

Bildet man von dieser Ungleichung den Logarithmus zur Basis r und anschließend davon die Entierfunktion, so erhält man

$$N - n = [{}^r\log Y_{\max}] + 1\,. \tag{98}$$

Diese Beziehung gibt die Möglichkeit, aus einem vorgegebenen $Y_{\max}$ auf die notwendige Registerlänge N zu schließen, oder, wenn die Registerlänge bekannt ist, auf die Anzahl der Leerstellen n.

Der häufigere Fall ist allerdings der, daß nicht $Y_{\max}$, sondern nur das Maximum $|y|_{\max}$ der Funktion selbst bekannt ist, aus dem $Y_{\max}$ dann berechnet wird. Es geht also jetzt darum, die Gleichung (98) so zu modifizieren, daß $Y_{\max}$ durch einen Ausdruck in $|y|_{\max}$ ersetzt wird. Zwischen $Y_{\max}$ und $|y|_{\max}$ besteht aber die Beziehung $Y_{\max} \leqq |y|_{\max}/Qy < Y_{\max} + 1$, und bildet man davon den Logarithmus zur Basis r, dann ist

$${}^r\log Y_{\max} \leqq {}^r\log |y|_{\max} - {}^r\log Qy < {}^r\log (Y_{\max} + 1)\,. \tag{99}$$

Da stets $Y_{\max} > 0$ ist und $r > 1$, ist die Ungleichung

$$Y_{\max} + 1 < Y_{\max} \cdot r \tag{100}$$

erfüllt, so daß auch

$${}^r\log (Y_{\max} + 1) < {}^r\log (Y_{\max} \cdot r) = {}^r\log Y_{\max} + 1 \tag{100a}$$

gilt. Beachtet man (100a), wenn man die Entierfunktion auf (99) anwendet, dann erhält man

$$[{}^r\log Y_{\max}] \leqq [{}^r\log |y|_{\max} - {}^r\log Qy] < [{}^r\log Y_{\max}] + 1,$$

und das bedeutet, daß nur

$$[{}^r\log Y_{\max}] = [{}^r\log |y|_{\max} - {}^r\log Qy] \tag{101}$$

sein kann. Anstelle von (98) kann man also die Formel

$$N - n = [{}^r\log |y|_{\max} - {}^r\log Qy] + 1 \tag{102}$$

benutzen.

Nun gibt es zweifellos eine ganze Zahl k derart, daß $y_{\max}$ zwischen r^{k-1} und r^k liegt:

$$r^{k-1} \leqq |y|_{\max} < r^k\,, \tag{103}$$

woraus

$$k = [{}^r\log |y|_{\max}] + 1 \tag{104}$$

folgt.

Aus (103) kann man entnehmen, daß k gerade die Anzahl der Stellen angibt, die $|y|_{\max}$ vor dem Komma besitzt. Nun ist

$${}^r\log Qy = -Sy \tag{105}$$

eine ganze Zahl, die in (102) eingesetzt aus der Entierfunktion herausgezogen werden kann. $[{}^r\log |y|_{\max}]$ ist nach (104) aber gleich $k - 1$, so daß schließlich aus (102) die Formel

$$N - n = k + Sy \tag{106}$$

entsteht. Diese Gleichung ist in etwas anderer Form bekannt. Läßt man nämlich n weg, das selbst immer größer oder gleich Null ist, dann muß aus (106)

$$N \geqq k + Sy \tag{107}$$

folgen; das ist die sogenannte Überlaufbedingung.

Formel (106) erlaubt noch eine weitere Deutung von Sy. Ist N die Gesamtzahl der Registerstellen, von der die Anzahl n der leeren Stellen abgezogen wird, dann sind $N - n$ Stellen übrig, die während der Operationen benutzt werden. Diese bestehen nun aus einem Anteil von Ziffern der Zahl y, die vor dem Komma stehen, nämlich k Stellen, während noch ein Rest von $N - n - k$ Stellen hinter dem Komma übrigbleiben. Das müssen aber nach (106) gerade Sy Stellen sein.

Für Y_i liegt sicher eine obere Grenze vor, und zwar ist nach (106) $N - n$ die Anzahl der Registerstellen, die gerade ausgenutzt wird, und die höchste darstellbare Zahl ist $r^{N-n} - 1$. Außerdem besteht für DX_i wie für DZ_i eine maximale Begrenzung max (BDX), so daß dem Produkt $y_i^* \cdot \Delta x_i^*$ als obere Grenze der Wert $r^{N-n} \cdot \max(BDX)$ entspricht. Das muß aber kleiner oder gleich dem Wert sein, der durch max (BDZ) multipliziert mit der maximalen Füllung r^M des Z-Registers gegeben ist:

$$\max(BDZ) \cdot r^M = \max(BDX) \cdot r^{N-n} \tag{108}$$

bzw.

$${}^r\log \max(BDZ) + M = {}^r\log \max(BDX) + N - n\,. \tag{108a}$$

Aus technischen Gründen kann es günstig oder zweckmäßig sein, daß sowohl das Y-Register als auch Z-Register die gleiche Länge besitzen. In diesem Falle ist $N = M$, das zu einem Spezialfall der Formel (108a) führt:

$$n = {}^r\log\left(\frac{\max(BDX)}{\max(BDZ)}\right). \tag{109}$$

Bei voller Ausnutzung des Y-Registers ist $n = 0$, und das ist nur möglich für

$$\max(BDX) = \max(BDZ)\,. \tag{110}$$

Anders ist es, wenn max (BDZ) größer als max (BDX) sein soll, weil vielleicht DX durch Addition mehrerer Inkremente zu groß geworden ist, dann gibt eine geeignete Wahl von n die Möglichkeit, daß max (BDZ) durch den Integrator auf ein gewünschtes Maß reduziert wird.

4. Schlußbemerkung

Über digitale Integrieranlagen (digital differential analyzers) gibt es bereits eine sehr vielfältige Literatur, in der allerdings der digitale Integrator in der Regel nur als Teil der Gesamtanlage gesehen und seine Theorie entsprechend kurz behandelt wird. Es sind deswegen innerhalb des Textes keine Literaturhinweise gegeben worden, weil der Ansatzpunkt dieser Arbeit sich von dem bisher bekannten in der Art der Behandlung stark unterscheidet. Trotzdem soll auf die Literatur hingewiesen werden, die Grundlagen für diesen Aufsatz bringt. — An dieser Stelle sei den Herren *J. Preusker*, *P. Selbach* und *W. Spering* gedankt, die bei der Bearbeitung dieses Themenkreises sehr geholfen haben.

Literatur

[1] *Van der Waerden, B. L.*, Moderne Algebra I. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1960.

[2] *Hasse, H.*, Vorlesungen über Zahlentheorie. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1950.

[3] *Braun, E. L.*, Digital Computer Design. New York und London 1963.

[4] *Shileiko, A. V.*, Digital Differential Analyzers. Oxford, London usf. 1964.

[5] *Mayorov, F. V.*, Electronic Digital Integrating Computers. London.

[6] *Lesemann, K. J.*, Ziffern-Integrieranlagen, in *K. Steinbuch:* Taschenbuch der Nachrichtenverarbeitung. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1962, S. 1241—1253.

[7] *Grabbe, E. M.*, *Ramo, S.*, und *Wooldridge, D. E.*, Handbook of Automation, Computation and Control, Volume 2.

[8] *Ameling, W.*, Ein schneller Funktionsgenerator für eine digitale Integrieranlage. Elektronische Datenverarbeitung, Heft 1, 1966, S. 36—47.

[9] *Rowley, G. C.*, Digital Differential Analyzers. British Communications and Electronics, Dez. 1958, S. 934—938.

[10] *Bellomy, F.*, Digital Differential Analyzer. Electro-Technology, April 1965, S. 69—74.

[11] *Page, C.*, Error Analysis and Compensation with a DDA. Instruments and Control Systems, July 1964, S. 141—144.

[12] *Braun, E. L.*, Design features of current digital differential analyzers. IRE Electronic computers and information theory, 2 (1954), Part 4, S. 87—97.

[13] *Mitchell, J. M.*, und *Ruhmann, S.*, The TRICE—a high speed incremental computer. IRE National Convention Record 1958 Part 4, S. 206—216.