

Physik Technik

Chemie Biologie

Mathematik Informatik

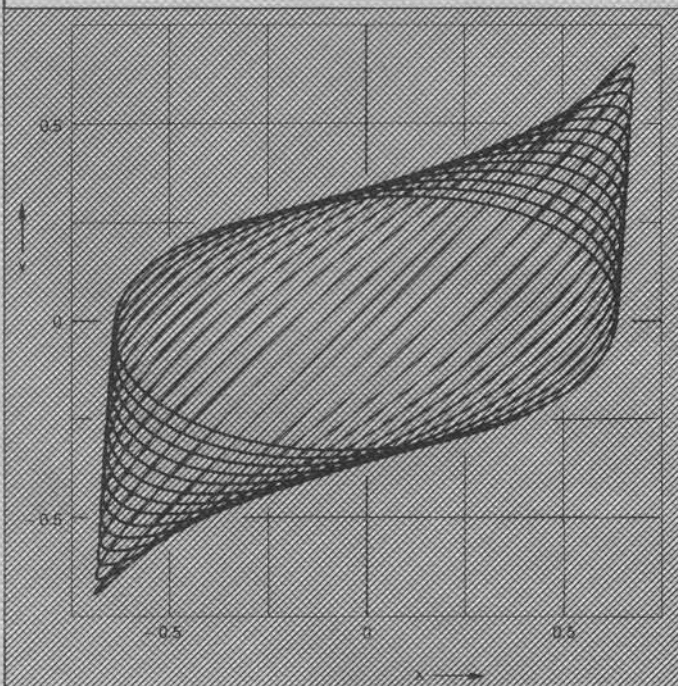


LEYBOLD-HERAEUS GMBH

## Informatik

576 09

### Demonstrationsversuche



### Der Analogrechner

Beschreibung  
mit 150 Programmbeispielen  
aus Mathematik,  
Regelungstechnik  
und Physik

Physik · Technik

Chemie · Biologie

Mathematik · Informatik



LEYBOLD-HERAEUS GMBH

1	Gebrauchsanweisung	11
1.1	Technische Daten	11
1.1.1	Analogrechner	11
1.1.2	Zusatz zur Programmierung	11
1.1.3	Programmierbarer Schalter	11
1.2	Beschreibung	12
1.2.1	Analogrechner	12
1.2.2	Programmierbarer Schalter	12
1.3	Bedienung	13
1.3.1	Allgemeine Hinweise zu den Schaltplänen	13
1.3.2	Amplitudenskalerung	13
1.3.3	Zeitkalibrierung am Integrator	13
1.4	Justierung des Analogrechners	16
1.4.1	Driftabgleich eines Operationsverstärkers	16
1.4.2	Abgleich der Multiplizierer	17
1.5	Verhalten auf Netzen	17
2	Grundsaltungen	18
2.1	Grundsaltungen einer Multiplizierer	18
2.1.1	Der offene Verstärker	18
2.1.2	Multiplikation einer Variablen	18
2.1.3	Potenzabschätzungen	19
2.1.4	Bestimmung der Grenzfrequenz	19
2.1.5	Summation zweier Variablen	20
2.1.6	Integration einer Variablen	20
2.1.7	Integration auf definierter Anfangsbedingung	21
2.1.8	Differentiation einer Variablen	21
2.1.9	Differentialgleichung mit Verzögerung	22
2.2	Grundsaltungen mit Multiplizierer	22
2.2.1	Multiplikation zweier Variablen	23
2.2.2	Potenzierung einer Variablen, $y = x^2$	23
2.2.3	Potenzierung einer Variablen, $y = x^3$	23
2.2.4	Potenzierung einer Variablen, $y = x^4$	23
2.2.5	Bildung der Quadratwurzel	24
2.2.6	Bildung des Kubikwurzels	24
2.2.7	Aufbau eines Multiplizierers aus zwei Quadratern	24
2.3	Schaltungen mit Multiplizierer und offenem Verstärker	25
2.3.1	Bildung der Quadratwurzel, $y = \sqrt{-x}, x < 0$	25
2.3.2	Bildung der Kubikwurzel, $y = \sqrt[3]{-x}$	25
2.3.3	Bildung der Funktion $y = -\sqrt{x}, x > 0$	26
2.3.4	Bildung der 4. Wurzel, $y = \sqrt[4]{-x}, x < 0$	26
2.3.5	Bildung des Quotienten $y = -2/N, N > 0$	27
2.4	Grundsaltungen mit Dioden in der Rückführung	27
2.4.1	Verteilfunktion	27
2.4.2	Verteilfunktion mit verbessertem Sperrverhalten	27
2.4.3	Bildung des Absolutwertes	27
2.4.4	Sprungfunktion	28
2.4.5	Sprungfunktion mit variabler Sprunghöhe	28
2.4.6	Geknickte Kennlinie mit Begrenzung	28
2.4.7	Geknickte Kennlinie ohne Begrenzung	28
2.4.8	Komparator	29
2.4.9	2-Punkt-Schalter	29

# Der Analogrechner

**Beschreibung  
mit 150 Programmbeispielen  
aus Mathematik,  
Regelungstechnik  
und Physik**

von  
**Dr. Martin Hund**

2. Auflage Februar 1982

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	9
<b>1. Gebrauchsanweisung</b>	11
<b>1.1. Technische Daten</b>	11
1.1.1 Analogrechner	11
1.1.2 Zubehör zur Programmierung	11
1.1.3 Programmierbarer Schalter	11
<b>1.2. Beschreibung</b>	12
1.2.1 Analogrechner	12
1.2.2 Programmierbarer Schalter	12
<b>1.3. Bedienung</b>	13
1.3.1 Allgemeine Hinweise zu den Schaltplänen	13
1.3.2 Amplitudenskalisierung	13
1.3.3 Zeitskalierung am Integrierer	15
<b>1.4. Justierung des Analogrechners</b>	16
1.4.1 Driftabgleich eines Operationsverstärkers	16
1.4.2 Abgleich der Multiplizierer	17
<b>1.5. Umrüsten auf Netzanschlußspannung 110 V</b>	17
<b>2. Grundschaltungen</b>	18
<b>2.1. Grundschaltungen eines Operationsverstärkers</b>	18
2.1.1 Der offene Verstärker	18
2.1.2 Multiplikation einer Variablen mit einer Konstanten	18
2.1.3 Fehlerabschätzungen	19
2.1.4 Bestimmung der Grenzfrequenz	19
2.1.5 Summation zweier Variablen	20
2.1.6 Integration einer Variablen	20
2.1.7 Integration mit definierter Anfangsbedingung	21
2.1.8 Differentiation einer Variablen	21
2.1.9 Differentiation mit Verzögerung	22
<b>2.2. Grundschaltungen mit Multiplizierer</b>	22
2.2.1 Multiplikation zweier Variablen	23
2.2.2 Potenzierung einer Variablen, $y = x^2$	23
2.2.3 Potenzierung einer Variablen, $y = x^3$	23
2.2.4 Potenzierung einer Variablen, $y = x^4$	23
2.2.5 Bildung der Quadratwurzel, $y = \sqrt{-x}, x > 0$	24
2.2.6 Bildung des Quotienten, $y = Z/N, N < 0$	24
2.2.7 Aufbau eines Multiplizierers aus zwei Quadrierern	24
<b>2.3. Schaltungen mit Multiplizierer und offenem Verstärker</b>	25
2.3.1 Bildung der Quadratwurzel, $y = \sqrt{-x}, x < 0$	25
2.3.2 Bildung der Kubikwurzel, $y = \sqrt[3]{-x}$	25
2.3.3 Bildung der Funktion $y = -\sqrt[3]{x^2}, x > 0$	26
2.3.4 Bildung der 4. Wurzel, $y = \sqrt[4]{-x}, x < 0$	26
2.3.5 Bildung des Quotienten, $y = -Z/N, N > 0$	27
<b>2.4. Grundschaltungen mit Dioden in der Rückführung</b>	27
2.4.1 Ventilfunktion	27
2.4.2 Ventilfunktion mit verbessertem Sperrverhalten	27
2.4.3 Bildung des Absolutwertes	27
2.4.4 Sprungfunktion	28
2.4.5 Sprungfunktion mit variabler Sprunghöhe	28
2.4.6 Geknickte Kennlinie mit Begrenzung	28
2.4.7 Geknickte Kennlinie ohne Begrenzung	28
2.4.8 Komparator	29
2.4.9 2-Punkt-Schalter	29

2.5.	<b>Grundschaltungen mit Dioden in der Zuführung</b>	29
2.5.1	Kennlinie einer Diode	29
2.5.2	Kennlinie einer Diode mit begrenzter Steigung	30
2.5.3	Erzeugung einer quadratischen Kennlinie durch vorgespannte Dioden	30
2.5.4	Tote Zone	30
2.5.5	Tote Zone mit variabler Breite	31
2.5.6	Getriebelose	31
2.5.7	Getriebelose mit variablem Spiel	32
2.5.8	Getriebelose mit Begrenzung (Hysterese)	32
2.6.	<b>Logische Verknüpfungen, SIMULOG-kompatibel</b>	33
2.6.1	Negation	33
2.6.2	NAND-Gatter	33
2.6.3	NOR-Gatter	33
2.6.4	Volladdierer	33
2.7.	<b>Generatoren</b>	35
2.7.1	Rechteckgenerator	35
2.7.2	Rechteckgenerator mit einstellbarer Frequenz	35
2.7.3	Dreieck- und Rechteckgenerator mit variablem Tastverhältnis	35
2.7.4	Spannungsfrequenzwandler	36
2.7.5	Sinusgenerator mit einem Operationsverstärker	37
2.7.6	Sinusgenerator mit Amplitudenstabilisierung	37
2.7.7	3-Phasen-Generator	37
3.	<b>Lösung mathematischer Probleme</b>	38
3.1.	<b>Lineare Gleichungssysteme</b>	38
3.1.1	Zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten, feste Koeffizienten	38
3.1.2	Instabile Schaltung	38
3.1.3	Zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten, variable Koeffizienten	39
3.1.4	Drei Gleichungen mit drei Unbekannten	39
3.1.5	Vier Gleichungen mit vier Unbekannten	40
3.2.	<b>Elementare Integrale</b>	41
3.2.1	Lösung des Integrals $y = \int x \, dx$	41
3.2.2	Lösung des Integrals $y = - \int x^2 \, dx$	42
3.2.3	Lösung des Integrals $y = \frac{1}{3} \int \frac{1}{x} \, dx$	43
3.2.4	Lösung des Integrals $y = \int \sqrt{x} \, dx$	43
3.2.5	Lösung des Integrals $y = -a \int \cos \omega t \, dt$	43
3.2.6	Lösung des Integrals $y = \int \frac{1}{1+x^2} \, dx$	44
3.2.7	Lösung des Integrals $y = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-x^2} \, dx, x < 1$	45
3.2.8	Lösung des Integrals $y = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2-1} \, dx, x > 1$	45
3.2.9	Lösung des Integrals $y = - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx, x < 1$	46
3.3.	<b>Polynome</b>	47
3.3.1	Polynom 2. Grades mit Integrierern	47
3.3.2	Polynom 4. Grades mit Integrierern	48
3.3.3	Polynom 3. Grades mit Multiplizierern	49

08	3.4. Einfache Beispiele gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung	50
16	3.4.1 Lösung der Differentialgleichung $y' = y$	50
16	3.4.2 Lösung der Differentialgleichung $y' = -ay$	51
28	3.4.3 Lösung der Differentialgleichung $y' = y^2$	51
28	3.4.4 Lösung der Differentialgleichung $y' = y^{2/3}$	52
28	3.4.5 Lösung der Differentialgleichung $y' = x/10 - y^2$	53
18	3.4.6 Lösung der Differentialgleichung $y' = x/y$	53
18	3.4.7 Lösung der Differentialgleichung $y' = y/x$	54
29	3.5. Lineare Differentialgleichung 2. Ordnung	55
29	3.5.1 Allgemeine Lösung von $y'' + py' + qy = 0$	55
29	3.5.2 Lösung für $q = 0$ und $p = 0$	55
79	3.5.3 Lösung für $q = 0$ und $p \neq 0$	55
29	3.5.4 Lösung für $q < 0$ und $p$ beliebig	55
29	3.5.5 Lösung für $q > 0$ und $p = 0$	57
29	3.5.6 Lösung für $q > 0$ und $p$ beliebig	57
29	3.5.7 Gedämpfte harmonische Schwingung	58
29	3.5.8 Angefachte harmonische Schwingung	58
29	3.6. Nichtlineare Differentialgleichung 2. Ordnung	59
29	3.6.1 Lösung von $y'' + p(y^2 - 1)y' + y = 0$ , mit $p > 0$	59
29	3.6.2 Lösung von $y'' + py' + (1 + y^2)y = 0$	61
29	3.7. Additionstheoreme für Sinus und Cosinus	61
29	3.7.1 Nachweis von $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	62
29	3.7.2 Bildung von $\cos 2x$ aus $\cos^2 x - \sin^2 x$	62
101	3.7.3 Bildung von $\sin 2x$ aus $2 \sin x \cos x$	62
101	3.7.4 Bildung von $\cos 3x$ aus $4 \cos^3 x - 3 \cos x$	63
101	3.7.5 Bildung von $\sin 3x$ aus $3 \sin x - 4 \sin^3 x$	63
101	3.7.6 Bildung von $\left  \cos \frac{x}{2} \right $ aus $\sqrt{(1 + \cos x)/2}$	63
101	3.7.7 Bildung von $\left  \sin \frac{x}{2} \right $ aus $\sqrt{(1 - \cos x)/2}$	63
101	3.7.8 Bildung von $\cos k_1 t + \cos k_2 t$ , Schwebung	63
101	3.8. Fourieranalyse	64
108	4. Regelungstechnik	65
108	4.1. Regelstrecken mit Ausgleich	65
109	4.1.1 Regelstrecke mit Ausgleich und Verzögerung 1. Ordnung	65
110	4.1.2 Regelstrecke mit Ausgleich und Verzögerung 2. Ordnung	66
111	4.1.3 Regelstrecke 2. Ordnung mit einem Operationsverstärker	66
112	4.1.4 Regelstrecke mit Ausgleich und Verzögerung 3. Ordnung	67
112	4.1.5 Regelstrecke mit Ausgleich und Verzögerung 4. Ordnung	67
114	4.1.6 Regelstrecke 4. Ordnung mit ungleichen Zeitkonstanten	68
116	4.1.7 Regelstrecke 4. Ordnung mit Störgröße	69
116	4.1.8 Regelstrecke mit Ausgleich und Verzögerung 5. Ordnung	69
117	4.1.9 Regelstrecke mit Ausgleich und Verzögerung 6. Ordnung	70
117	4.2. Regelstrecken ohne Ausgleich	70
117	4.2.1 Verzögerungsfreie Regelstrecke ohne Ausgleich	70
117	4.2.2 Regelstrecke ohne Ausgleich, mit Verzögerung 1. Ordnung	71
117	4.2.3 Regelstrecke ohne Ausgleich, mit Verzögerung 2. Ordnung	71
121	4.3. Regler	72
121	4.3.1 Regelkreis mit 2-Punkt-Regler	72
121	4.3.2 Regelkreis mit P-Regler	74
121	4.3.3 Regelkreis mit I-Regler und PI-Regler	76
121	4.3.4 Regelkreis mit D-Regler und PID-Regler	77
121	4.3.5 Regelkreis mit PID-Regler aus einem Operationsverstärker	79
121	4.3.6 Regelkreis mit Regelstrecke ohne Ausgleich	80

5.	<b>Simulation und Lösung physikalischer Probleme</b>	80
5.1.	<b>Kinematik</b>	81
5.1.1	Weg und Geschwindigkeit	81
5.1.2	Begegnung zweier Fahrzeuge (mathematische Lösung)	82
5.1.3	Begegnung zweier Fahrzeuge (Simulation des Vorgangs)	82
5.1.4	Begegnung zweier Fahrzeuge (physikalische Lösung)	83
5.1.5	Geschwindigkeit und Beschleunigung	84
5.1.6	Freier Fall	84
5.2.	<b>Ballistik</b>	85
5.2.1	Freier Fall mit linearer Reibung	85
5.2.2	Freier Fall mit quadratischer Reibung	86
5.2.3	Schiefer Wurf (Registrierung mit TY-Schreiber)	87
5.2.4	Schiefer Wurf (Registrierung mit XY-Schreiber)	88
5.2.5	Schiefer Wurf mit einstellbarem Winkel	89
5.2.6	Schiefer Wurf mit linearer Reibung	89
5.2.7	Beschleunigung einer Rakete	90
5.2.8	Beschleunigung einer Rakete im Schwerfeld, mit Reibung	92
5.3.	<b>Dynamik</b>	93
5.3.1	Beschleunigen eines Kraftfahrzeuges	94
5.3.2	Ausrollen eines Kraftfahrzeuges	96
5.3.3	Abbremsen eines Kraftfahrzeuges	97
5.3.4	Experiment zur Impulserhaltung	98
5.3.5	Eindimensionaler elastischer Stoß	99
5.3.6	Impulserhaltung bei elastischem Stoß	101
5.3.7	Energieerhaltung bei elastischem Stoß	101
5.4.	<b>Ausgleichsvorgänge</b>	102
5.4.1	Entladung eines Kondensators über einen ohmschen Widerstand	102
5.4.2	Radioaktiver Zerfall	102
5.4.3	Radioaktiver Zerfall mit stabilem Endprodukt	103
5.4.4	Zerfallsreihe	103
5.4.5	Ladungsausgleich zwischen zwei Kondensatoren	104
5.4.6	Wärmeausgleich zwischen zwei Wärmebädern	105
5.4.7	Temperaturausgleich in einer Kette von drei Wärmebädern	105
5.4.8	Temperaturausgleich in einer Kette von fünf Wärmebädern	106
5.4.9	Ein Modell zur Wärmeleitung	107
5.5.	<b>Freie Schwingungen</b>	108
5.5.1	Elastisches Pendel mit linearer Reibung	108
5.5.2	Elastisches Pendel mit Gleitreibung	109
5.5.3	Mathematisches Pendel	109
5.5.4	Gekoppelte Pendel	110
5.6.	<b>Erzwungene Schwingungen</b>	111
5.6.1	Einschwingvorgänge bei linearem Resonanzsystem	112
5.6.2	Resonanzkurven eines linearen Systems	113
5.6.3	Resonanzkurven eines nichtlinearen Systems	113
5.6.4	Erzwungene Schwingungen am Drehpendel	114
5.7.	<b>Schrödingergleichung des Einteilchensystems</b>	115
5.7.1	Potentialtopf endlicher Tiefe	116
5.7.2	Gekoppelte Potentiale	118
5.7.3	Harmonischer Oszillator	119
6.	<b>Anhang</b>	121
6.1.	<b>Registrierung der Lösungen mit einem Schreiber</b>	121
6.1.1	TY-Schreiber als XY-Schreiber	121
6.1.2	XY-Schreiber als TY-Schreiber	121
6.2.	<b>Registrierung der Lösungen auf einem Oszilloskop</b>	122
6.2.1	Beispiel: Einschwingvorgänge bei einem linearen Resonanzsystem	122

## Einleitung

Durch Verknüpfung wird ein Modell eines Schalters mit dem analogen Ablaufgegnen, Pendelschwingen, Oszillatoren, Regelkreise, Oszillatoren, z. B. eine Problemschaltung, ein veränderndes elektrisches Meßinstrument, das verfolgt werden Parameter und Anfang verändert und damit

schon hier beschrieben veränderter 2 Multiplik und das Netzteil an die defizienten Sinustromen werden jeweils von außen vor die Eingänge und in die Rückkopplungskreise der vorher offenen Operationsverstärker geschaltet. So wird der jeweilige Einschaltungszustand des Schalters veränderbar und damit seine Funktion äußerst transparent. Die Größe der aufgetragenen Symbolik gestattet auch den Einsatz des Analogrechners der Demonstration vor einer Klasse.

Die Beschaltungsregeln dieses Analogrechners sind hier in Einzelteilen gelagert und sind natürlich wiederholbar in Grundschaltungen und Anwendungen aus Mathematik, Regeltechnik und Physik. Im Anhang folgen noch einige Programme zur Simulation von Schaltungen, Hinweise zur Registrierung der Lösungen mit TV-Schreiber (575 60), TV-Schreiber (575 66) oder Oszilloskop und Hinweis zum Einsatz eines programmierbaren Schalters (575 67) zur Automatisierung des Rechenaufbaus.

Die abgebildeten Schaltpläne sind jeweils geometrisch so angeordnet, wie sie sich auch auf dem hier beschriebenen Analogrechner realisieren lassen. Sie sind im Maßstab 1:5 wiedergegeben mit Ausnahme der Grundschaltungen im Kapitel 2.1, hier ist ein Maßstab 1:4 gewählt. Hier den Übertragungssymbolen können sich auch Verzweigungspunkte befinden.

Die Programme der Teile 2 bis 5 sind fast alle mit dem zur Programmierung angebotenen Satz Blockelemente (575 63) realisierbar. Lediglich bei den Programmen 3.3.2, 3.7.2, 6.3.1, 6.3.5, 6.3.7, 6.4.1, 6.4.5, 6.4.6, 6.7.1-6.7.3, 6.8.4 werden zusätzlich ein oder zwei Kippschalter (575 13) benötigt. Falls nicht der programmierbare Schalter (siehe unten) zur Verfügung steht, die Zeitkonstanten beim Integrieren nicht so groß gewählt, daß sich die Lösungen mit einem analogen Meßinstrument, z. B. Doppelmeß, Nullpunkt Meß (442 285) mit Meßbereichswechselkasten (442 54), oder einem Schreiber wiedergeben lassen.

Am Stellen der einzelnen Schalter, die vor dem zu festgelegten Zeitraum (meist zu Beginn der Rechnung) betätigt

6.3.	<b>Steuerung mit programmierbarem Schalter</b>	123
6.3.1	Betriebsarten des programmierbaren Schalters	123
6.3.2	Beispiel: Schrödingergleichung für gekoppelte Potentiale	124
6.4.	<b>Anwendungen mit Funktionsgenerator</b>	125
6.4.1	Beispiel: Resonanzkurve eines linearen Systems	125
6.4.2	Beispiel: Resonanzkurve eines nichtlinearen Systems	125
6.5.	<b>Fourieranalyse mit Oberwellengenerator</b>	126
6.6.	<b>Computer-Grafiken</b>	127
6.6.1	Endlose Spirale	127
6.6.2	Schnecke	128
6.6.3	Spirale mit bewegtem Zentrum	128
6.6.4	Lissajous-Figuren für zwei fast gleiche Frequenzen	129
6.6.5	Kreis mit rechteckförmig moduliertem Radius	130
6.6.6	Spirale mit sinusförmig moduliertem Radius	131
6.6.7	Überlagerung zweier Kreisbewegungen	132
6.7.	<b>Spiele</b>	135
6.7.1	Spiel 1	135
6.7.2	Spiel 2	136
6.8.	<b>Aufsätze, Berichte und Vorträge aus der Schulpraxis</b>	137

das man das  
Begriff erfolgreich mit dem Verhalten eines erkl  
sprechend bewährtesten Operationsverstärkers einführen  
kann, sollte er von der Mathematik noch nicht gelassen  
sein. Ebenso lassen sich zahlreiche physikalische Pro  
bleme lösen, ohne den Begriff der Differentialgleichung  
verwenden zu müssen.



Das hier wiedergegebene Foto zeigt den Analogrechner (575 60) zusammen mit dem TV-Schreiber (575 66). Programmiert ist eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung. Auf der klarsichtigen Folie (575 63) des TV-Schreibers werden Einschwingvorgänge als Lösungen registriert, die dann auch noch mit einem Schreibprojektor projiziert werden können.

## Einleitung

Durch Verknüpfung von mehreren Operationsverstärkern wird ein Modell eines elektronischen Analogrechners geschaffen, mit dem eine Vielzahl mathematischer und physikalischer Abhängigkeiten (Integrale, Differentialgleichungen, Pendelschwingungen, Verhalten von fremderregten Oszillatoren, Regelkreis, quantenmechanischer harmonischer Oszillator u. a. m.) simuliert werden kann. Als Lösung des Problems erscheint ein sich im allgemeinen mit der Zeit veränderndes elektrisches Potential, dessen Verlauf mit einem Meßinstrument, auf einem Schreiber oder Oszilloskop verfolgt werden kann. In das Experiment eingehende Parameter und Anfangsbedingungen lassen sich leicht verändern und damit deren Abhängigkeiten untersuchen.

Im hier beschriebenen Analogrechner sind 7 Operationsverstärker, 2 Multiplizierer, 4 Koeffizientenpotentiometer und das Netzteil enthalten. Die zur Programmierung erforderlichen Steckelemente (57603 – Satz Steckelemente) werden jeweils von außen vor die Eingänge und in die Rückkopplungskreise der vorher offenen Operationsverstärker gesteckt. So wird der jeweilige Beschaltungszustand des einzelnen Verstärkers und damit seine Funktion äußerst transparent. Die Größe der aufgebrachten Symbolik gestattet auch den Einsatz des Analogrechners in der Demonstration vor einer Klasse.

Die Beschaltungsmöglichkeiten des Analogrechners sollen hier (in Einzelfällen gelegentlich willkürlich) aufgeteilt werden in Grundsaltungen und Anwendungen aus Mathematik, Regeltechnik und Physik. Im Anhang folgen noch einige Programme zur Simulation von Spielen, Hinweise zur Registrierung der Lösungen mit TY-Schreiber (57560), XY-Schreiber (57566) oder Oszilloskop und Hinweise zum Einsatz eines programmierbaren Schalters (57607) zur Automatisierung des Rechenablaufs.

Die abgebildeten Schaltpläne sind jeweils geometrisch so angeordnet, wie sie sich auch auf dem hier beschriebenen Analogrechner realisieren lassen. Sie sind im Maßstab 1:5 wiedergegeben mit Ausnahme der Grundsaltungen im Kapitel 2.1, hier ist als Maßstab 1:4 gewählt. Unter den Widerstandssymbolen können sich auch Verzweigungspunkte befinden.

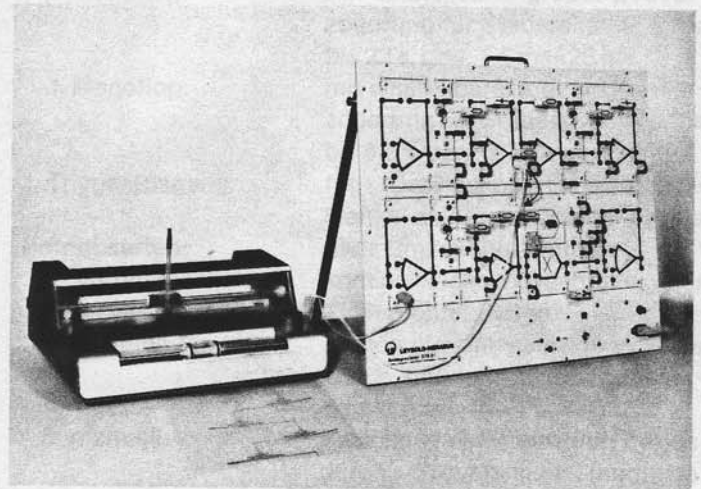
Die Programme der Teile 2 bis 5 sind fast alle mit dem zur Programmierung angebotenen Satz Steckelemente (57603) realisierbar. Lediglich bei den Programmen 3.3.2, 3.7.8, 5.2.6, 5.3.5–5.3.7, 5.4.4, 5.4.8, 5.4.9, 5.7.1–5.7.3, 6.6.4 werden zusätzlich ein oder zwei Kippschalter (57913) benötigt, falls nicht der programmierbare Schalter (siehe unten) zur Verfügung steht. Die Zeitkonstanten beim Integrieren sind so groß gewählt, daß sich die Lösungen mit einem schnellen Meßinstrument, z. B. Doppelmavo, Nullpunkt Mitte (44286) mit Meßbereichsschaltkasten (44284), oder einem Schreiber wiedergeben lassen.

An Stelle der einzelnen Schalter, die von Hand zu festgelegten Zeiten (meist zu Beginn der Rechnung) betätigt

werden müssen, kann der programmierbare Schalter (57607) verwendet werden. Mit ihm lassen sich bis zu 5 eingebaute elektronische Schalter zu vorgebbaren Zeiten automatisch ein- und ausschalten. Es ist dann ein einmaliger oder auch repetierender Rechenablauf möglich mit Zykluszeiten in den Bereichen von etwa 20 s bis 30 s und auch von etwa 20 ms bis 30 ms.

Sollen die Lösungen von Integralen und Differentialgleichungen auf einem Oszilloskop registriert werden, sind beim Integrieren kleine Zeitkonstanten nötig. Diese lassen sich erreichen durch die zur Programmierung angebotene Ergänzung Steckelemente (57604). Im Anhang werden dazu Hinweise und einige entsprechend geänderte Programmbeispiele gegeben.

Es sei schließlich nicht unerwähnt geblieben, daß man den Integralbegriff erfolgreich mit dem Verhalten eines entsprechend beschalteten Operationsverstärkers einführen kann, sollte er von der Mathematik noch nicht gegeben sein. Ebenso lassen sich zahlreiche physikalische Probleme lösen, ohne den Begriff der Differentialgleichung verwenden zu müssen.



Das hier wiedergegebene Foto zeigt den Analogrechner (57601) zusammen mit dem TY-Schreiber (57560). Programmiert ist eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung. Auf der Klarsicht-Rollenfolie (57563) des TY-Schreibers werden Einschwingvorgänge als Lösungen registriert, die dann auch noch mit einem Schreibprojektor projiziert werden können.



# 1. Gebrauchsanweisung

## 1.1. Technische Daten

### 1.1.1 Analogrechner

Ausführung:	flache Grundplatte mit ausklappbarem Ständer, hinter einem großen Programmierfeld sind eingebaut:
7 Operationsverstärker:	als Differenzverstärker ausgeführte integrierte Schaltkreise, beide Eingänge zugänglich, Drift kompensierbar
1 Multiplizierer:	Parabelmultiplizierer (4 Quadranten), integrierter Schaltkreis
1 Multiplizierer:	integrierter Schaltkreis, umschaltbar
Multiplikation:	4 Quadranten
Division:	Nenner negativ
Wurzel:	Radikand positiv, Wurzel negativ
4 Potentiometer:	2,3 k $\Omega$ , Auflösung 0,5%
120 Buchsenpaare:	zur Beschaltung durch externe Elemente
Netzteil:	110/220 V, 50-60 Hz, 18 W
Sicherungen:	T 0,2 B für 220 V T 0,315 B für 110 V
Versorgungsspannung:	$\pm 15$ V für Operationsverstärker und Multiplizierer
Signalspannung:	$\pm 10$ V
Rechengenauigkeit:	3%
Grenzfrequenz:	je nach Programm etwa 1 kHz bis 10 kHz
Abmessungen:	690 mm x 580 mm x 65 mm
Gewicht:	10 kg

### 1.1.2 Zubehör zur Programmierung

Satz Steckelemente (57603) für Zeitkonstanten von 0,002 s bis 10 s (Registrierung mit Meßinstrument, TY-Schreiber oder XY-Schreiber) bestehend aus:

579 52	1 Tablett für 96 Steckelemente	✓
577 11	6 Widerstand, 200 k $\Omega$ , 1%	✓
577 10	8 Widerstand, 100 k $\Omega$ , 1%	✓
577 09	2 Widerstand, 50 k $\Omega$ , 1%	✓
577 08	2 Widerstand, 20 k $\Omega$ , 1%	✓
577 07	6 Widerstand, 10 k $\Omega$ , 1%	✓
577 06	2 Widerstand, 5 k $\Omega$ , 1%	✓
577 05	2 Widerstand, 2 k $\Omega$ , 1%	✓
578 16	6 Kondensator, 4,7 $\mu$ F, 5%	✓
578 15	4 Kondensator, 1 $\mu$ F, 5%	✓
501 49	6 Satz 6 Verbindungsstecker	✓
574 25	1 Satz 4 Verbindungskabel	✓
578 51	2 Diode D1/1000, Steckelement	✓
579 13	3 Kippschalter, Steckelement	✓

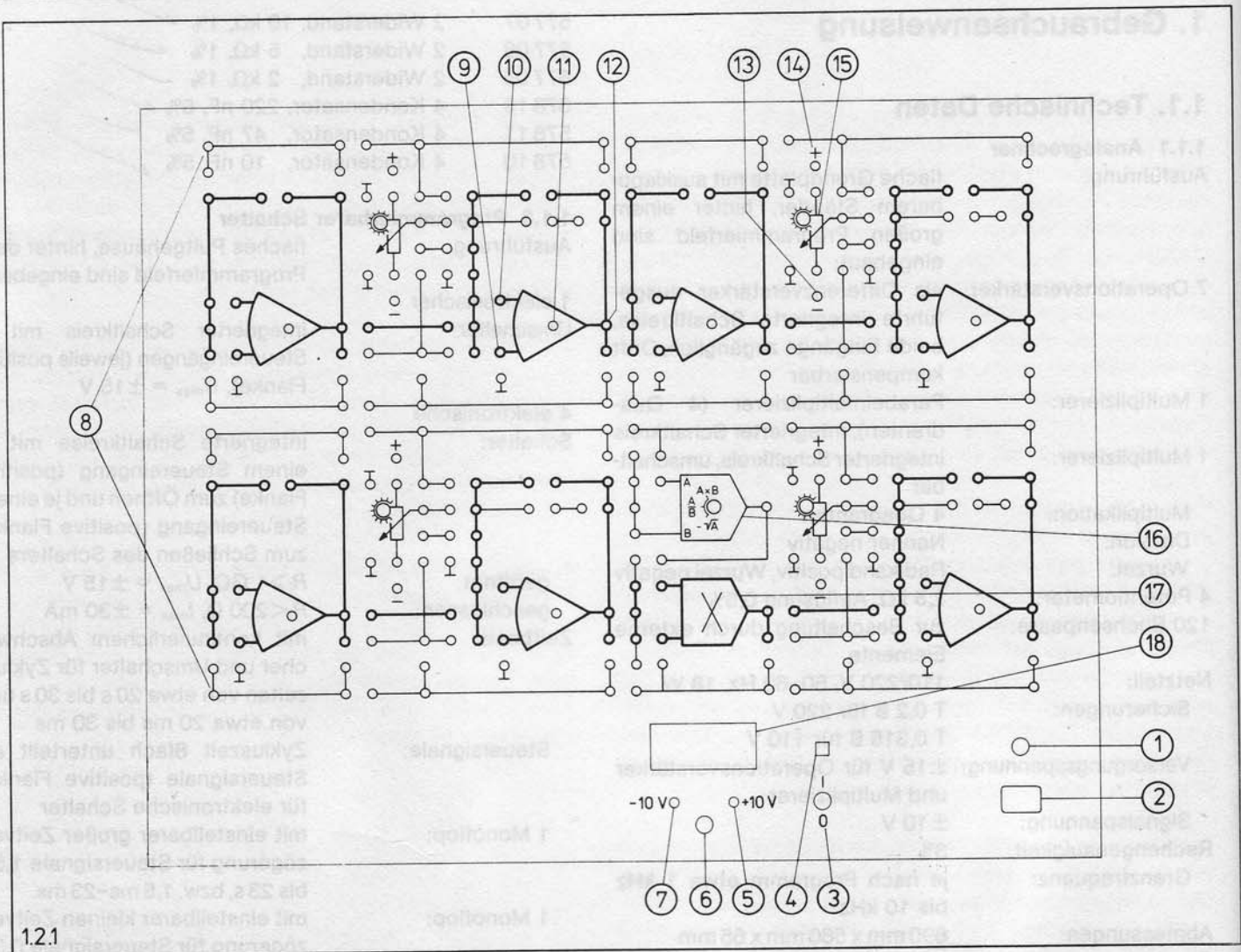
Ergänzung Steckelemente (57604) für Zeitkonstanten von 0,02 ms bis 44 ms (Registrierung mit Oszilloskop) bestehend aus:

577 09	2 Widerstand, 50 k $\Omega$ , 1%	✓
577 08	2 Widerstand, 20 k $\Omega$ , 1%	✓

577 07	2 Widerstand, 10 k $\Omega$ , 1%	✓
577 06	2 Widerstand, 5 k $\Omega$ , 1%	✓
577 05	2 Widerstand, 2 k $\Omega$ , 1%	✓
578 13	4 Kondensator, 220 nF, 5%	✓
578 11	4 Kondensator, 47 nF, 5%	✓
578 10	4 Kondensator, 10 nF, 5%	✓

### 1.1.3 Programmierbarer Schalter

Ausführung:	flaches Pultgehäuse, hinter dem Programmierfeld sind eingebaut:
1 elektronischer Umschalter:	integrierter Schaltkreis mit 2 Steuereingängen (jeweils positive Flanke), $U_{max} = \pm 15$ V
4 elektronische Schalter:	integrierte Schaltkreise mit je einem Steuereingang (positive Flanke) zum Öffnen und je einem Steuereingang (positive Flanke) zum Schließen des Schalters $R_i > 1$ G $\Omega$ , $U_{max} = \pm 15$ V $R_i < 200$ $\Omega$ , $I_{max} = \pm 30$ mA
geöffnet:	
geschlossen:	
Zeitbasis:	mit kontinuierlichem Abschwächer und Umschalter für Zykluszeiten von etwa 20 s bis 30 s und von etwa 20 ms bis 30 ms
Steuersignale:	Zykluszeit 8fach unterteilt als Steuersignale (positive Flanke) für elektronische Schalter
1 Monoflop:	mit einstellbarer großer Zeitverzögerung für Steuersignale 1,5 s bis 23 s, bzw. 1,5 ms-23 ms
1 Monoflop:	mit einstellbarer kleinen Zeitverzögerung für Steuersignale 0,3 s bis 4,5 s, bzw. 0,3 ms-4,5 ms
Triggerausgang:	für Oszilloskop, ansteigende Flanke zu Beginn eines Zyklus über Umschalter wählbar
Betriebsarten:	
1. automatisch:	kontinuierliche Wiederholung der Zyklen ohne Pause
2. manuell:	Auslösung eines einzigen Zyklus durch Tastendruck oder Steuersignal (negative Flanke)
3. manuell:	Auslösung eines einzigen Zyklus durch Steuersignal (negative Flanke), jedoch erst nach Betätigung eines Tasters.
Stromversorgung:	über Vielfachkabel vom Analogrechner (57601)
Abmessungen:	280 mm x 185 mm x 85 mm
Gewicht:	1,3 kg



1.2.1

## 1.2. Beschreibung

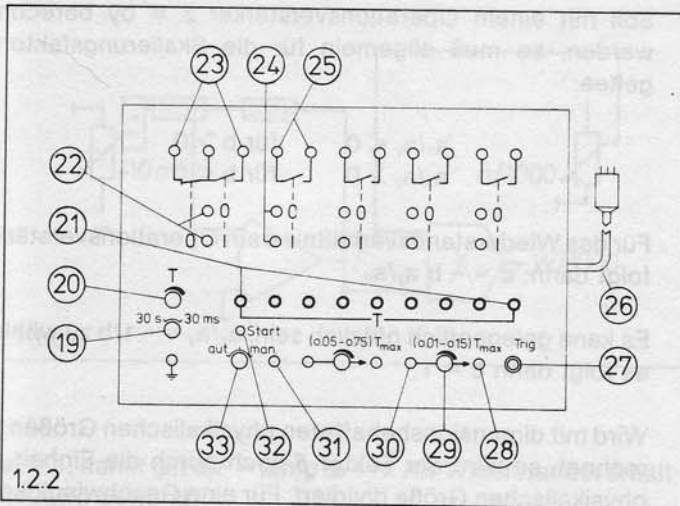
### 1.2.1 Analogrechner

- ① Sicherungshalter
- ② Steckbuchse für Netzanschlußkabel
- ③ Netzschalter
- ④ Betriebsanzeigelampe
- ⑤ Kontrolllampe für positive Signalspannung
- ⑥ Anschlußmöglichkeit (Vielfachbuchse) für Stromversorgung des programmierbaren Schalters (576 07)
- ⑦ Kontrolllampe für negative Signalspannung
- ⑧ Programmierfeld mit 7 Operationsverstärkern, 4 Koeffizientenpotentiometern und 2 Multiplizierern
- ⑨ nichtinvertierender Eingang eines Operationsverstärkers; wird meist mit Masse verbunden
- ⑩ invertierender Eingang eines Operationsverstärkers; wird meist als Signaleingang verwendet
- ⑪ Schraubenzieherpotentiometer zum Driftabgleich
- ⑫ Ausgang eines Operationsverstärkers
- ⑬ Ausgang für negative Signalspannung,  $-10\text{ V}$
- ⑭ Ausgang für positive Signalspannung,  $+10\text{ V}$
- ⑮ Koeffizientenpotentiometer, kann wahlweise an positive und negative Signalspannung, an Masse oder an den Ausgang eines Operationsverstärkers angeschlossen werden

- ⑯ Multiplizierer mit Umschalter für Multiplikation, Division und Bildung der Quadratwurzel
- ⑰ Multiplizierer (links Eingänge, rechts Ausgang)
- ⑱ Abdeckblech für Justierfeld der Multiplizierer; braucht im allgemeinen nicht geöffnet zu werden

### 1.2.2 Programmierbarer Schalter

- ⑲ Umschalter für Zeitbasis
- ⑳ Abschwächer für Zeitbasis
- ㉑ Ausgänge für Steuersignale (positive Flanken) im Abstand von  $T/8$  mit Zykluszeit  $T$
- ㉒ Steuereingänge für Umschalter; gelangt eine positive Flanke an den oberen Eingang, so wird der rechte Schalter von ㉑ geöffnet und der linke geschlossen; gelangt eine positive Flanke an den unteren Steuereingang, so wird der rechte Schalter geschlossen und der linke geöffnet
- ㉓ Anschlußbuchsen für Umschalter
- ㉔ Steuereingänge für Schalter; gelangt eine positive Flanke an den oberen Eingang, so wird der zugehörige Schalter geöffnet; gelangt eine positive Flanke an den unteren Steuereingang, so wird der Schalter geschlossen
- ㉕ Anschlußbuchsen für Schalter



- 1.2.2
- Ⓓ Vielfachkabel zum Anschluß an Analogrechner, Buchse Ⓔ
  - Ⓙ Triggerausgang für Oszilloskop, er ist galvanisch verbunden mit dem linken und dem rechten der 9 Ausgänge Ⓔ für Steuersignale
  - Ⓒ Ausgang des Monoflops mit Steuersignal für Schalter
  - Ⓙ Abschwächer für Monoflop
  - Ⓒ Eingang zur Ansteuerung des Monoflops aus einem der Ausgänge Ⓔ für Steuersignale
  - Ⓚ Triggereingang zur Auslösung (negative Flanke) eines Zyklus
  - Ⓛ Taster zur Auslösung eines Zyklus
  - Ⓜ Wahlschalter für Betriebsart
    - links: automatische Wiederholung der Zyklen ohne Pause
    - mitte: Auslösung eines einzigen Zyklus durch Druck auf Taster Ⓛ oder Steuersignal (negative Flanke) an Buchse Ⓔ
    - rechts: Auslösung eines einzigen Zyklus durch Steuersignal (negative Flanke) an Buchse Ⓔ, jedoch erst nach Druck auf Taster Ⓛ

### 1.3. Bedienung

Auf richtige Netzspannung achten (Änderung durch internes Umstecken siehe Kapitel 1.5).

Gerät am Netz anschließen und mit Schalter Ⓜ einschalten. Betriebsanzeigelampe Ⓛ und Kontrolllampen Ⓟ und Ⓠ leuchten.

Bei Kurzschluß oder Überlastung eines Ausgangs für Signalspannung Ⓛ oder Ⓞ erlischt die entsprechende Kontrolllampe. Kurzschluß gegebenenfalls beseitigen.

Wenn dem Analogrechner Fremdspannungen zugeführt werden, z. B. aus einem Funktionsgenerator, sind Potentiale über  $\pm 15$  V unbedingt zu vermeiden, da sonst bei Fehlschaltungen Operationsverstärker und Multiplizierer zerstört werden.

Nach eigenen Entwürfen oder entsprechend den Programmplänen der Teile 2 bis 6 programmieren. Weitere Hinweise finden sich, soweit notwendig, bei den einzelnen Schaltplänen.

Bei erster Beschäftigung mit einem Analogrechner unbedingt die Abschnitte 2.1.2, 2.1.5–2.1.7 durcharbeiten.

Gegebenenfalls programmierbaren Schalter über Vielfachkabel Ⓓ zur Stromversorgung an Buchse Ⓔ anschließen. Schaltzeiten nach Wunsch programmieren. Beispiele hierzu siehe Kapitel 6.3.

#### 1.3.1 Allgemeine Hinweise zu den Schaltplänen

Die in den Teilen 2 bis 6 abgebildeten Programmpläne sind als Hilfe für den Anwender jeweils geometrisch genauso angeordnet, wie sie sich auf dem Analogrechner realisieren lassen. Als Folge davon kann sich ein Verzweigungspunkt auch unter einem Widerstandssymbol befinden.

Einer Leitungsführung mit Verbindungssteckern wird im allgemeinen der Vorzug gegeben vor Kabelverbindungen, auch wenn dann gelegentlich ein kleiner Umweg in Kauf genommen werden muß. Mit Verbindungssteckern verbundene Buchsenpaare sind dabei in den durchgehenden Leitungsführungen nicht besonders gekennzeichnet. Wird dagegen ein Buchsenpaar mit Kabel verbunden, um z. B. eine größere Entfernung zu überbrücken, sind die Buchsen als offene Kreise (lösbare Verbindung) in den Schaltplänen verzeichnet.

Die an den passenden Stellen eingezeichneten Schalter können dort mit Kippschalter-Steckelementen verwirklicht werden. Bei Verwendung des programmierbaren Schalters anstelle der Kippschalter sind die einzelnen Schalter mit Kabelverbindungen an die gewünschten Stellen einzuschleifen. Beispiele hierzu finden sich im Kapitel 6.3.

Als einheitlicher Maßstab für alle Programmpläne wurde 1:5 gewählt mit Ausnahme der Grundsaltungen eines Operationsverstärkers im Kapitel 2.1, die etwas größer (1:4) dargestellt sind. Auch Bild 1.2.1, welches das gesamte unbeschaltete Programmierfeld des Analogrechners zeigt, ist ebenfalls im Maßstab 1:5 wiedergegeben.

In den Schaltplänen angeschriebene Potentiale  $U$  beziehen sich immer auf Masse und werden in Volt angegeben. Sind an den Ein- und Ausgängen der beschalteten Operationsverstärker keine Potentiale  $U$  sondern Werte angegeben, z. B.  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $a$ ,  $v/50$  oder  $y/5$ , so ist eine Amplitudenskaliierung vorgenommen worden (siehe folgenden Abschnitt). Die angeschriebenen Werte (z. B.  $y/5$ ) sind (gegebenenfalls in ihren Einheiten) gleich 1 bei Vollaussteuerung der Operationsverstärker oder Multiplizierer, also bei 10 V.

#### 1.3.2 Amplitudenskaliierung

Die Behandlung mathematischer oder physikalischer Probleme wird wesentlich erleichtert, wenn man als Ein- oder Ausgangsgrößen beschalteter Operationsverstärker gleich dimensionslose mathematische oder dimensionsbehaftete physikalische Größen verwenden kann statt der tatsächlich

vorhandenen Potentiale  $U$ . Für den Rechenbereich gilt beim hier beschriebenen Analogrechner:

$$-10 \text{ V} \leq U \leq +10 \text{ V}$$

Wird  $U$  ersetzt durch eine dimensionslose mathematische Größe  $y$  mit  $y = U/\beta$ , so wird  $\beta$  so gewählt, daß für  $y$  als Rechenbereich gilt:

$$-1 \leq y \leq +1$$

Soll mit Werten von  $y$  gerechnet werden, deren Beträge größer als 1 oder wesentlich kleiner als 1 sind, so wird ein weiterer Skalierungsfaktor  $a$  zugefügt. Mit  $ay = U/\beta$  und  $\beta = 10 \text{ V}$  folgt für  $ay$  als Rechenbereich:

$$-1 \leq ay \leq +1$$

Im Schaltplan wird dann  $ay$  an Ein- oder Ausgang eines beschalteten Operationsverstärkers oder Multiplizierers geschrieben. Um eine optimale Rechengenauigkeit zu erhalten, wird  $a$  so gewählt, daß der Rechenbereich möglichst ganz genutzt wird. Die Skalierungsfaktoren brauchen innerhalb eines Programmplanes nicht alle gleich zu sein.

Beispiel:

Es soll mit einem Operationsverstärker  $z = -2y$  gebildet werden. Setzt man dazu  $a_y y = U/\beta$  und  $a_z z = U/\beta$  mit  $\beta = 10 \text{ V}$ , so kann man je nach den geforderten Bereichen für  $y$  und  $z$  unterschiedlich skalieren.

a) Wählt man  $a_y = 1$  und  $a_z = 1$ , so folgt Bild 1.3.2.1 als Lösung entsprechend Abschnitt 2.1.2. Als Widerstandsverhältnis ist 2 gewählt. Da  $|z| \leq 1$  bleiben muß, darf  $|y|$  nicht größer als 0,5 werden.

b) Wählt man  $a_y = 2$  und  $a_z = 1$ , so folgt Bild 1.3.2.2 als Programmplan. Als Widerstandsverhältnis muß jetzt  $c = -(-2) a_z/a_y = 1$  genommen werden.  $y$  kann nicht größer als 0,5 werden.

c) Will man für alle  $y$  mit  $|y| \leq 1$  eine Lösung erhalten, so kann man  $a_y = 1$  und  $a_z = 1/2$  setzen. Als Programmplan folgt Bild 1.3.2.3 mit dem Widerstandsverhältnis  $c = 1$ .

Skalierungsfaktoren können auch negativ sein. Soll z. B.  $z = 8 + 2y$  berechnet werden, braucht im Bild 1.3.2.3 lediglich  $a_y = -1$  gesetzt zu werden (siehe auch nächstes Beispiel zur Berechnung von  $F = mg$ ).

Soll mit einem Operationsverstärker  $z = by$  berechnet werden, so muß allgemein für die Skalierungsfaktoren gelten:

$$\begin{aligned} a_z/a_y < 0 & \quad \text{für } b > 0 \\ a_z/a_y > 0 & \quad \text{für } b < 0 \end{aligned}$$

Für das Widerstandsverhältnis  $c$  am Operationsverstärker folgt dann:  $c = -b a_z/a_y$ .

Es kann gelegentlich nützlich sein,  $a_z/a_y = -1/b$  zu wählen; es folgt dann  $c = 1$ .

Wird mit dimensionsbehafteten physikalischen Größen gerechnet, so wird der Faktor  $\beta$  noch durch die Einheit der physikalischen Größe dividiert. Für eine Geschwindigkeit  $v$  z. B. gilt:  $av = U/\beta_v$ , mit  $\beta_v = 10 \text{ Vs/m}$  und als Rechenbereich folgt:

$$-1 \text{ m/s} \leq av \leq +1 \text{ m/s}$$

Ist bei der Multiplikation mit einer Konstanten (siehe oben) der Faktor  $b$  dimensionsbehaftet, so gilt mit  $a_z z = U/\beta_z$  und  $a_y y = U/\beta_y$  für das Widerstandsverhältnis am Operationsverstärker:

$$c = -b a_z \beta_z / a_y \beta_y$$

und das Verhältnis der Skalierungsfaktoren  $a_z/a_y$  hat die Größenordnung von  $-\beta_y/\beta_z b$ .

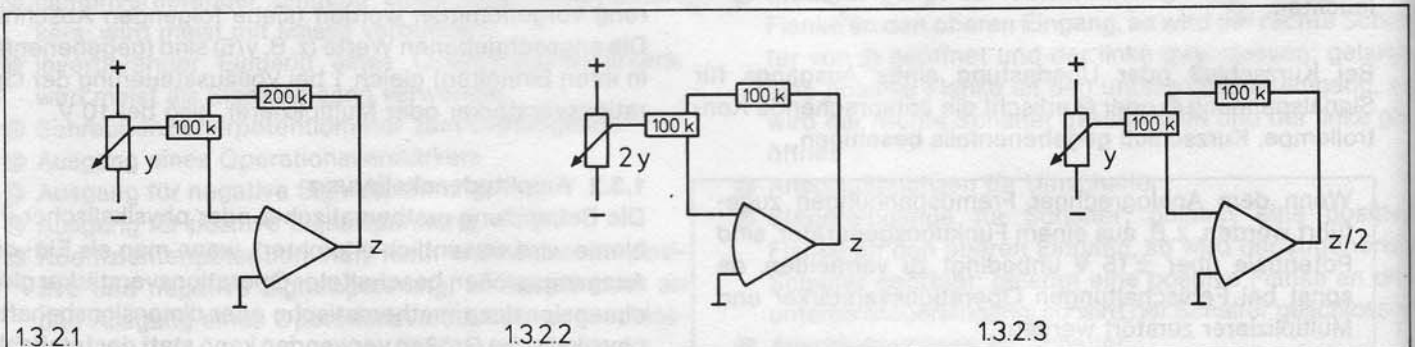
Beispiel:

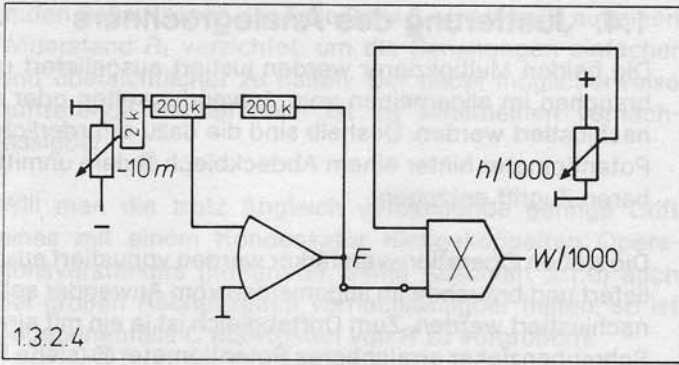
Es soll mit einem Operationsverstärker zunächst die Kraft  $F = mg$  und dann mit einem nachfolgenden Multiplizierer die potentielle Energie  $W = mgh$  berechnet werden für Massen  $m \leq 100 \text{ g}$ , Erdbeschleunigung  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  und Höhen  $h \leq 1 \text{ km}$ .

$$\begin{aligned} \text{Setzt man: } a_m m &= U/\beta_m \quad \text{mit } \beta_m = 10 \text{ V/kg} \\ a_F F &= U/\beta_F \quad \text{mit } \beta_F = 10 \text{ V/N} \\ a_h h &= U/\beta_h \quad \text{mit } \beta_h = 10 \text{ V/m} \\ a_W W &= U/\beta_W \quad \text{mit } \beta_W = 10 \text{ V/J} \end{aligned}$$

so kann man die Skalierungsfaktoren  $a$  im Programmplan 1.3.2.4 wählen zu:

$a_m = -10$ , negativ, damit das Ausgangssignal des Operationsverstärkers (siehe Abschnitt 2.1.2) positiv wird. Es gilt  $|a_m m| \leq 1 \text{ kg}$ .





Integrierers:

$$y_0(x) = -\frac{\alpha}{RC} \int_0^x y_1(x) dx + y_0(0)$$

Der Skalierungsfaktor  $\alpha$  wird häufig so gewählt, daß der interessierende Bereich von  $x$  einer gut darstellbaren Zeit entspricht, z. B. 10 s für Registrierung der Lösung mit einem TY-Schreiber oder 10 ms für Wiedergabe auf einem Oszilloskop.

Beispiel:

Es soll für  $0 \leq x \leq 1$  und  $y_1 = 1$  mit einem Integrierer berechnet werden:

$$y_0(x) = -\int_0^x y_1 dx$$

Setzt man  $x = t/\alpha$  mit  $\alpha = 10$  s, so ist, wenn keine zusätzliche Amplitudenskalisierung vorgenommen werden soll, die Zeitkonstante  $RC = \alpha$  zu wählen (Bild 1.3.3.1, zu Beginn der Rechnung ist Schalter S zu öffnen).

Führt man für  $y_1$  entsprechend Abschnitt 1.3.2 noch eine Amplitudenskalisierung mit  $a_1 = 1/10$  durch, so wird die Zeitkonstante kleiner (Bild 1.3.3.2). Es gilt:  $RC = \alpha/10$ .

$a_F = 1$ , damit gilt  $a_F F = a_F mg \leq 1$  N. Als Widerstandsverhältnis wird gewählt:

$$c = -ga_F\beta_F/a_m\beta_m = 0,981 = 200 \text{ k}\Omega/202 \text{ k}\Omega.$$

$a_h = 1/1000$ , damit gilt:  $a_h h \leq 1$ .

$a_W = 1/1000$ , da der Multiplizierer verlangt  $a_W = a_F a_h$ . Somit gilt auch  $a_W W \leq 1$ . Zum Multiplizierer siehe Abschnitt 2.2.1. Für  $m = 20$  g ( $-2$  V) und  $h = 500$  m ( $+5$  V) folgt z. B. für  $W = mgh = 98,1$  J ( $+0,981$  V).

Bei den Programmbeispielen des Kapitels 5.1 wird noch einmal ausführlich die Amplitudenskalisierung physikalischer Größen gezeigt. In den anderen Programmplänen der Teile 2 bis 6 sind dagegen die Skalierungsfaktoren  $a$  meist gleich 1 gesetzt und nicht explizit erwähnt, um die Programme möglichst einfach zu halten. Sie können aber ohne weiteres entsprechend dem oben beschriebenen Formalismus auf größere oder kleinere Rechenbereiche übertragen werden.

### 1.3.3 Zeitskalierung am Integrierer

Ein Analogrechner kann nur Integrale nach der Zeit berechnen. Entsprechend Abschnitt 2.1.6 erhält man mit  $U_1(t)$  am Eingang eines Integrierers an dessen Ausgang:

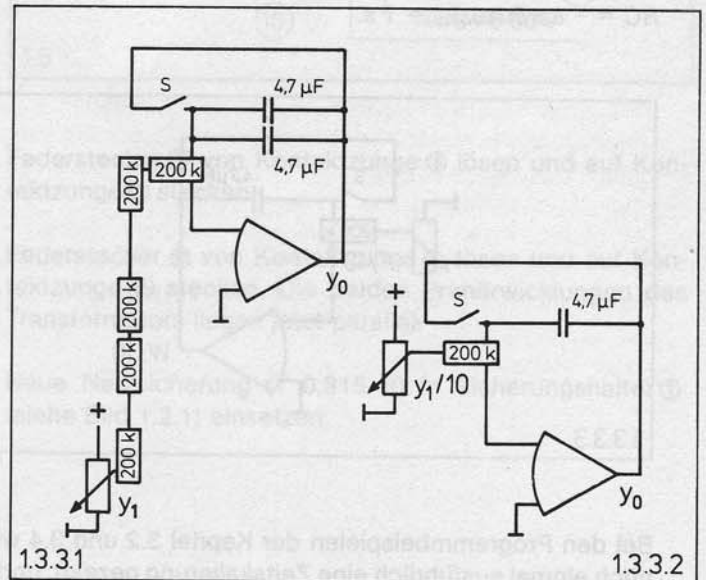
$$U_0(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t U_1(t) dt + U_0(0)$$

Die Zeitkonstante  $RC$  wird durch die Werte der Beschaltelemente gegeben.

Führt man zunächst entsprechend Abschnitt 1.3.2 eine Amplitudenskalisierung mit  $y = U/\beta$  und  $\beta = 10$  V durch, so erhält man am Ausgang des Integrierers

$$y_0(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t y_1(t) dt + y_0(0)$$

Wird die Zeit  $t$  ersetzt durch eine dimensionslose mathematische Größe  $x$  mit  $x = t/\alpha$ , so erscheint am Ausgang des



Soll mit einem Integrierer das Integral nach  $x$

$$y_0(x) = b \int_0^x y_1(x) dx$$

berechnet werden, so muß für den Zeitskalierungsfaktor

$\alpha > 0$  gelten und für die Amplitudenskalierungsfaktoren:

$$\begin{aligned} a_0/a_1 < 0 & \quad \text{für } b > 0 \\ a_0/a_1 > 0 & \quad \text{für } b < 0 \end{aligned}$$

Für die erforderliche Zeitkonstante des Integrierers folgt dann:

$$RC = -\frac{1}{b} \alpha \frac{a_1}{a_0}$$

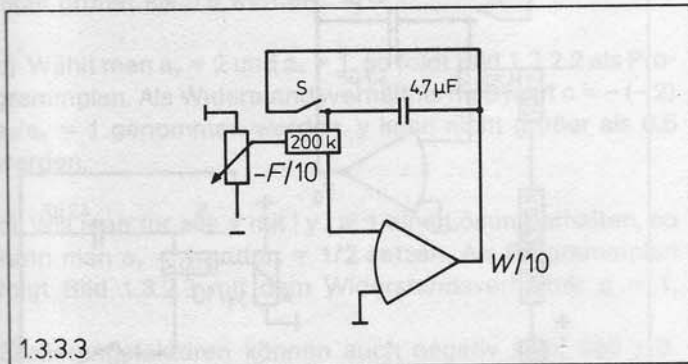
Wird die Zeit  $t$  ersetzt durch eine dimensionsbehaftete physikalische Größe  $s$  (z. B. Weg), so ist  $\alpha$  noch durch die Einheit dieser Größe zu dividieren. Soll z. B. einem Weg  $s = 1$  m eine Zeit  $t = 10$  s entsprechen, so ist  $\alpha = 10$  s/m zu wählen.

Beispiel:

Es soll die Arbeit  $W$  als Funktion der in Richtung der Kraft  $F$  zurückgelegten Strecke  $s$  berechnet werden:

$$W(s) = \int_0^s F(s) ds$$

Es sei  $F(s) = 1$  N. Interessiert man sich für  $s$  in dem Bereich  $0 \leq s \leq 10$  m, so kann man den Zeitskalierungsfaktor  $\alpha = 1$  s/m und mit  $\beta_F = 10$  V/N und  $\beta_W = 10$  V/J die Amplitudenskalierungsfaktoren wählen zu  $a_F = -1/10$  und  $a_W = 1/10$  (Bild 1.3.3.3). Für die Zeitkonstante  $RC$  muß dann gelten:  $RC = -\alpha a_F \beta_F / a_W \beta_W = 1$  s.



Bei den Programmbeispielen der Kapitel 3.2 und 3.4 wird noch einmal ausführlich eine Zeitskalierung gezeigt, und in den Kapiteln 3.5 und 3.6 wird ebenfalls die Zeit als unabhängige Variable ersetzt durch eine dimensionslose mathematische Größe. In den anderen Programmplänen der Teile 2 bis 6 wird dagegen meist auf eine Zeitskalierung verzichtet, um die Programme möglichst einfach zu halten.

## 1.4. Justierung des Analogrechners

Die beiden Multiplizierer werden justiert ausgeliefert und brauchen im allgemeinen vom Anwender selten oder nie nachjustiert werden. Deshalb sind die dazu erforderlichen Potentiometer hinter einem Abdeckblech  $\textcircled{R}$  dem unmittelbaren Zugriff entzogen.

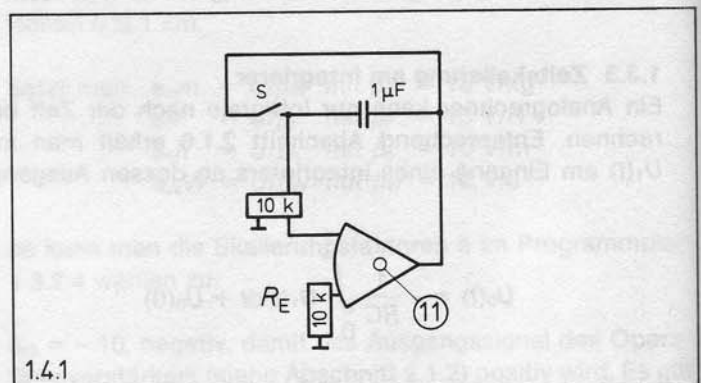
Die sieben Operationsverstärker werden vorjustiert ausgeliefert und brauchen im allgemeinen vom Anwender selten nachjustiert werden. Zum Driftabgleich ist je ein mit einem Schraubenzieher erreichbares Potentiometer  $\textcircled{11}$  (siehe Bild 1.2.1) vorgesehen.

### 1.4.1 Driftabgleich eines Operationsverstärkers

Werden die Eingänge eines offenen Verstärkers über je einen Widerstand (z. B. 10 kΩ) an Masse gelegt, so erscheint im allgemeinen am Ausgang nicht Null, sondern der Verstärker ist übersteuert und zeigt hier etwa +13 V oder -13 V (siehe Abschnitt 2.1.1). Koppelt man das Ausgangssignal über einen Kondensator  $C$  entsprechend Bild 1.4.1 auf den invertierenden Eingang zurück, so lädt sich ein zunächst ladungsfreier Kondensator mehr oder weniger schnell auf +13 V oder -13 V auf. Diese Drift kann durch Betätigung des Schraubenzieher-Potentiometers  $\textcircled{11}$  minimiert werden.

Zum Driftabgleich (Bild 1.4.1) zunächst Schalter  $S$  schließen. Der Kondensator wird entladen.

Nach Öffnen des Schalters  $S$  versuchen, durch Betätigung des Potentiometers  $\textcircled{11}$  das Ausgangssignal konstant in der Nähe von Null zu halten.



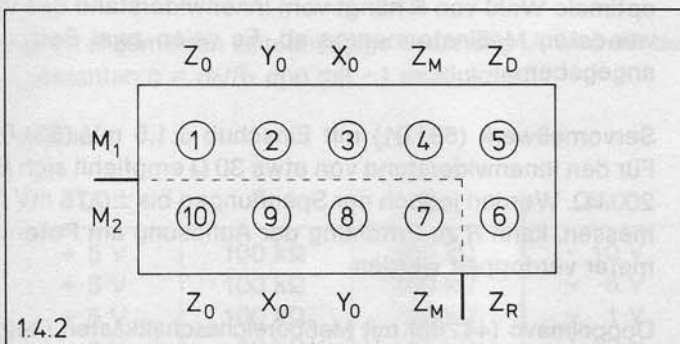
Bei der so gefundenen Potentiometerstellung ist die Zeit  $T$ , in der sich die Ausgangsspannung um 10 V ändert, ein Maß für die Güte des Driftabgleichs. Für  $C = 1 \mu\text{F}$  ist eine Zeit von 10 Minuten und mehr erreichbar (bei  $C = 4,7 \mu\text{F}$  etwa eine Stunde). Steht die Ergänzung Steckelemente (57604) zu Verfügung, kann man zur Feinabstimmung einen Kondensator  $C = 10$  nF verwenden. Als Zeit kann jetzt  $T = 10$  s erreicht werden. Ersetzt man den Widerstand  $R_E$  im Bild 1.4.1 durch einen Verbindungsstecker, so wird  $T$  etwa zehnmal kleiner. Wird jetzt erneut ein Driftabgleich durchgeführt, werden die Werte für  $T$  wieder etwas besser.

In den Schaltplänen der Teile 2 bis 6 wird jeweils auf einen Widerstand  $R_E$  verzichtet, um die Schaltungen einfacher und übersichtlicher zu halten. Der dabei möglicherweise auftretende Rechenfehler ist im allgemeinen vernachlässigbar.

Will man die trotz Abgleich verbleibende geringe Drift eines mit einem Kondensator rückgekoppelten Operationsverstärkers (Integrierer, siehe Abschnitt 2.1.6) auch bei großen Rechenzeiten vernachlässigbar halten, so ist gegebenenfalls C auf Kosten von R zu vergrößern.

#### 1.4.2 Abgleich der Multiplizierer

Zum Abgleich der Multiplizierer das Abdeckblech<sup>®</sup> (siehe Bild 1.2.1) von der Frontplatte des Analogrechners entfernen. Die jetzt sichtbaren Potentiometer 1-6 (siehe Bild 1.4.2) dienen zum Abgleich des oberen Multiplizierers und die Potentiometer 7-10 zum Abgleich des unteren Multiplizierers.



- Es bedeuten:
- $Z_0$  Ausgangsnullabgleich
  - $X_0$  Eingangsnullabgleich A
  - $Y_0$  Eingangsnullabgleich B
  - $Z_M$  Multiplikationsabgleich
  - $Z_D$  Divisionsabgleich
  - $Z_R$  Abgleich für Wurzel

#### Multiplikationsabgleich:

1. Eingänge A und B auf Null legen und das Ausgangssignal mit Potentiometer  $Z_0$  auf Null einstellen (Abweichung  $< 1$  mV).
2. Eingang A auf Null und Eingang B wechselweise auf  $\pm 10$  V legen. Mit einer Stellung des Potentiometers  $X_0$  den Ausgang möglichst für beide Fälle auf Null bringen.
3. Eingang B auf Null und Eingang A wechselweise auf  $\pm 10$  V legen. Mit einer Stellung des Potentiometers  $Y_0$  den Ausgang möglichst für beide Fälle auf Null bringen.
4. Diese drei Operationen der Reihe nach öfters wiederholen, bis die Abweichung von Null bei Punkten 2 und 3 kleiner als 50 mV beträgt.
5. Beide Eingänge auf  $+ 10$  V bzw. auf  $- 10$  V legen und Ausgangsspannung mit Potentiometer  $Z_M$  auf 10 V einstellen (Abweichung 0,1 V).

#### Divisionsabgleich:

6. Mit Schalter den oberen Multiplizierer auf A/B stellen.

7. Eingang B mit  $- 10$  V und Eingang A wechselweise mit  $\pm 10$  V belegen. Mit Potentiometer  $Z_D$  die Ausgangsspannung auf  $- 10$  V bzw.  $+ 10$  V bringen.

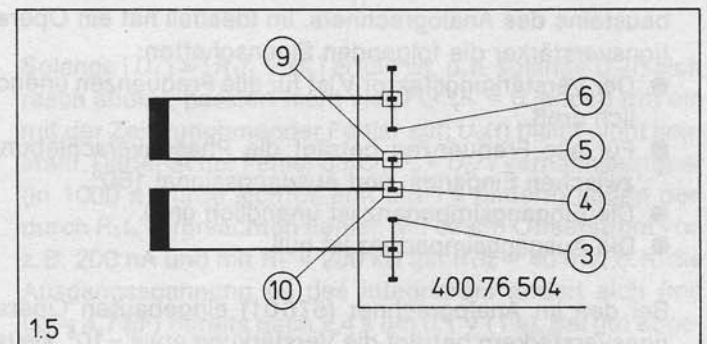
Abgleich für Wurzel:

8. Mit Schalter den oberen Multiplizierer auf  $\sqrt{A}$  stellen.
9. Eingang A auf  $+ 10$  V legen und mit Potentiometer  $Z_R$  die Ausgangsspannung auf  $- 10$  V bringen.

### 1.5. Umrüsten auf Netzanschlußspannung 110 V

Netzstecker ziehen.

Schrauben am Rand der Frontplatte lösen. Gerät mit der Frontplatte nach unten auf den Arbeitstisch legen und Kunststoffwanne abnehmen. Transformator und Leiterplatte 400 76 504 werden sichtbar. Bild 1.5 zeigt den Anschluß für 220 V; die beiden Primärwicklungen des Transformators liegen in Serie.



Federstecker 9 von Kontaktzunge 5 lösen und auf Kontaktzunge 3 stecken.

Federstecker 10 von Kontaktzunge 4 lösen und auf Kontaktzunge 6 stecken. Die beiden Primärwicklungen des Transformators liegen jetzt parallel.

Neue Netzsicherung (T 0,315 B) in Sicherungshalter 1 (siehe Bild 1.2.1) einsetzen.

## 2. Grundsaltungen

Die in dieser Broschüre angegebenen Programmbeispiele werden aufgeteilt in Grundsaltungen und Anwendungen aus Mathematik, Regeltechnik und Physik. Sie bilden eine kleine Auswahl der auf dem Analogrechner realisierbaren Programme.

Im folgenden Teil 2 werden zunächst einige einfache Beschaltungen eines Operationsverstärkers, der Summierer und der Integrierer, vorgestellt. Es folgen Beispiele mit Multiplizierern und nichtlineare Beschaltungen von Operationsverstärkern mit Dioden und zahlreiche Anwendungen. Es werden auch noch die Schaltungen einiger Generatoren angegeben, die sich nur schlecht den Programmen der Mathematik oder Physik zuordnen ließen.

### 2.1. Grundsaltungen eines Operationsverstärkers

Operationsverstärker (Rechenverstärker) bilden die Grundbausteine des Analogrechners. Im Idealfall hat ein Operationsverstärker die folgenden Eigenschaften:

- Der Verstärkungsfaktor  $V$  ist für alle Frequenzen unendlich groß.
- Für alle Frequenzen beträgt die Phasenverschiebung zwischen Eingangss- und Ausgangssignal  $180^\circ$ .
- Die Eingangsimpedanz ist unendlich groß.
- Die Ausgangsimpedanz ist null.

Bei den im Analogrechner (57601) eingebauten Operationsverstärkern beträgt die Verstärkung etwa  $-10^5$ , sie ist frequenzabhängig und bei 1 MHz etwa auf 1 abgesunken. Der Eingangswiderstand beträgt etwa  $1\text{ M}\Omega$ , der Ausgangswiderstand einige  $100\ \Omega$ .

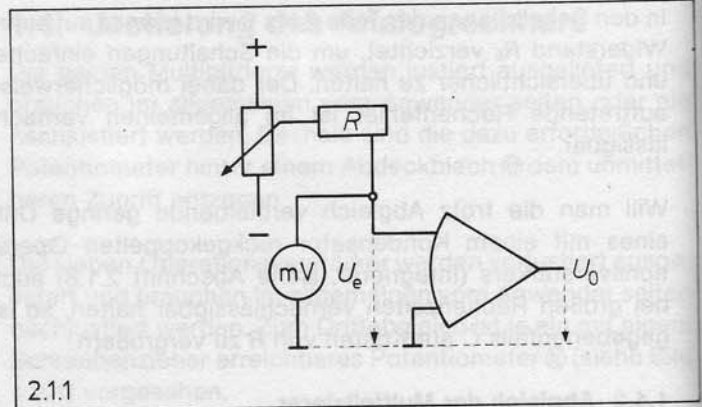
Mit einem offenen (nicht rückgekoppelten) Verstärker (siehe Abschnitt 2.1.1) lassen sich noch keine Rechenoperationen durchführen. Erst eine geeignete Rückführung des Ausgangssignales auf den Eingang ergibt ein sinnvolles Verhalten.

#### 2.1.1 Der offene Verstärker

Versucht man die Verstärkung des nicht rückgekoppelten (offenen) Verstärkers zu bestimmen, so stellt man auch bei gut abgeglichenem Operationsverstärker (vergleiche Abschnitt 1.4.1) eine endliche Spannung am Eingang fest, obwohl die Spannung am Ausgang null ist. Diese Offsetspannung liegt in der Größenordnung von 1 mV. Bei nur geringfügiger Veränderung der Spannung  $U_e$  am Eingang (typisch  $20\ \mu\text{V}$ ) gelangt die Ausgangsspannung  $U_o$  über  $\pm 10\text{ V}$  hinaus in die Sättigung.

Beispiel:

$U_e$	$U_o$
+ 0,65 mV	+ 13 V
+ 0,68 mV	- 13 V



Als Verstärkung  $V = U_o/U_e$  erhält man somit mehr als  $-10^5$ , gelegentlich  $-10^6$ .

Zur Erzeugung kleiner Eingangsspannungen  $U_e$  dient im Schaltplan 2.1.1 ein Spannungsteiler aus einem hochohmigen Widerstand  $R$  und einem Spannungsmesser. Die optimale Wahl von  $R$  hängt vom Innenwiderstand des verwendeten Meßinstrumentes ab. Es seien zwei Beispiele angegeben:

Servomeßwerk (53101) mit Einschub  $\pm 1,5\text{ mV}$  (53109). Für den Innenwiderstand von etwa  $30\ \Omega$  empfiehlt sich  $R = 200\text{ k}\Omega$ . Werden jedoch nur Spannungen bis  $\pm 0,75\text{ mV}$  gemessen, kann  $R$  zu Erhöhung der Auflösung am Potentiometer verdoppelt werden.

Doppelmavo (44286) mit Meßbereichsschaltkasten (44284 oder 44274). Für den Innenwiderstand von  $200\ \Omega$  ( $60\text{ mV}$  Bereich) würde sich  $R = 33\text{ k}\Omega$  empfehlen. Da jedoch im allgemeinen die zu messende Spannung kleiner als  $2\text{ mV}$  ist, sollte zu Erhöhung der Auflösung  $R = 1\text{ M}\Omega$  oder noch größer gewählt werden. Da nur der Meßbereich von  $60\text{ mV}$  zur Verfügung steht, kann zwar die Offsetspannung nachgewiesen werden aber nicht mehr die geringfügige Änderung der Eingangsspannung, die zur Änderung der Ausgangsspannung über den ganzen Aussteuerbereich führt.

#### 2.1.2 Multiplikation einer Variablen mit einer Konstanten

Für die im Schaltplan 2.1.2 angegebenen Ströme  $I_1$ ,  $I_o$  und  $I_e$  gilt:

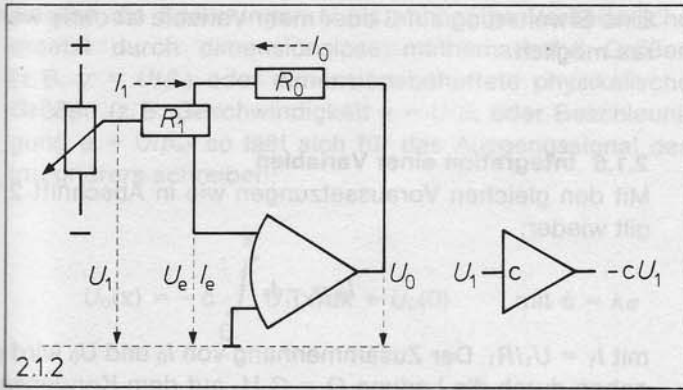
$$I_1 + I_o = I_e$$

$$\text{mit } I_1 = \frac{U_1 - U_e}{R_1}, \quad I_o = \frac{U_o - U_e}{R_o}, \quad I_e = \frac{U_e}{R_e}$$

Vernachlässigt man  $U_e$  gegen  $U_1$ ,  $U_o$  (was bei nicht übersteuertem Verstärker wegen  $V = -\infty$  möglich ist) und  $I_e$  gegen  $I_1$ ,  $I_o$  (wegen  $R_e = \infty$ ) erhält man:

$$I_1 + I_o = 0$$





Mit  $I_1 = \frac{U_1}{R_1}$  und  $I_0 = \frac{U_0}{R_0}$  folgt:

$$U_0 = -\frac{R_0}{R_1} U_1$$

Die im allgemeinen zeitabhängige Spannung  $U_1$  wird mit der Konstanten  $c = R_0/R_1$  und mit  $-1$  multipliziert.

Beispiele:

$U_1$	$R_1$	$R_0$	$U_0$
+ 5 V	100 kΩ	200 kΩ	- 10 V
+ 5 V	100 kΩ	100 kΩ	- 5 V
+ 5 V	100 kΩ	20 kΩ	- 1 V
- 4 V	20 kΩ	50 kΩ	+ 10 V

Im Bild 2.1.2 ist neben dem Schaltplan auch das Symbol eines zur Multiplikation mit einer Konstanten beschalteten Operationsverstärkers angegeben.

### 2.1.3 Fehlerabschätzungen

Berechnet man in Abschnitt 2.1.2 den Zusammenhang von  $U_0$  und  $U_1$  ohne Vernachlässigung von  $U_e$  und  $I_e$ , so erhält man:

$$U_0 \left[ 1 - \frac{1}{V} \left( \frac{R_0}{R_e} + \frac{R_0}{R_1} + 1 \right) \right] = -\frac{R_0}{R_1} U_1$$

mit  $V = U_0/U_e$ . Es muß also gelten:

$$\left| \frac{1}{V} \left( \frac{R_0}{R_e} + \frac{R_0}{R_1} + 1 \right) \right| \ll 1$$

Soll der Fehler durch Vernachlässigung dieses Ausdrucks kleiner als 1‰ sein, so müssen bei der endlichen Verstärkung von  $V = -10^5$  folgende Bedingungen gelten:

$$\frac{R_0}{R_e} < 100 \quad \text{und} \quad \frac{R_0}{R_1} < 100$$

Die erste Bedingung ist leicht zu erfüllen, da  $R_e = 1 \text{ M}\Omega$ . Die zweite Bedingung sagt aus, daß wegen der nur endlichen Verstärkung  $V$  des offenen Verstärkers die Verstärkung des

beschalteten Operationsverstärkers nicht wesentlich größer als 100 gewählt werden darf (vergleiche zur Grenzfrequenz den Abschnitt 2.1.4). Mit den als Schaltelemente zur Verfügung stehenden Widerständen von 2 kΩ bis 200 kΩ wird der Faktor 100 nicht überschritten.

Eine weitere Fehlerquelle ist der gelegentlich nicht vernachlässigbare Offset (vergleiche Abschnitt 2.1.1). Die Spannung  $U_1 = -U_0 R_1/R_0$  muß wesentlich größer als die Offsetspannung (1 mV) und der Strom  $I_0 = U_0/R_0$  muß wesentlich größer als der Offsetstrom (200 nA) sein. Mit den gegebenen Widerstandswerten von 2 kΩ bis 200 kΩ bleibt der Fehler als Folge des Offsets kleiner als 1%.

Bei langsam ablaufenden Integrationen können als Folge eines nicht verschwindenden Offsets größere Fehler auftreten. Berechnet man in Abschnitt 2.1.6 den Zusammenhang von  $U_0$  und  $U_1$  ohne Vernachlässigung von  $U_e$  und  $I_e$ , so erhält man:

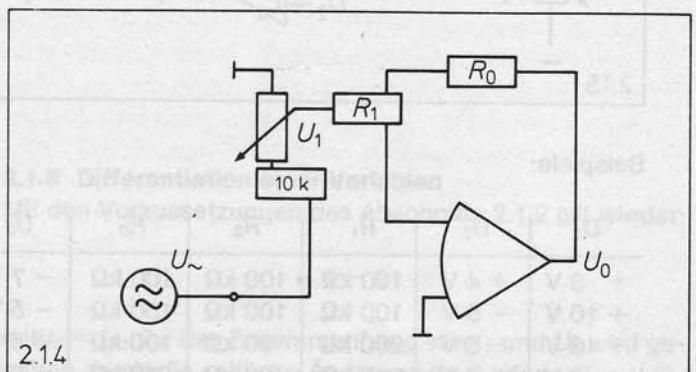
$$U_0(t) = U_0(0) - \frac{1}{R_1 C_0} \int_0^t (U_1 - R_1 I_e - U_e) dt$$

Solange  $|U_1| \gg |R_1 I_e + U_e|$  erfüllt ist, d. h. solange  $U_0(t)$  sich rasch ändert, passiert nicht viel. Für  $U_1 = 0$  jedoch tritt ein mit der Zeit zunehmender Fehler auf;  $U_0(t)$  bleibt nicht konstant. Dabei ist der Fehler durch  $U_e = U_0/V$  vernachlässigbar (in 1000 s würde sich  $U_0$  erst um 1% ändern) gegen den durch  $R_1 I_e$  verursachten Fehler. Mit einem Offsetstrom von z. B. 200 nA und mit  $R_1 = 200 \text{ k}\Omega$  gilt  $R_1 I_e = 40 \text{ mV}$ , d. h. die Ausgangsspannung  $U_0$  des Integrierers ändert sich (mit  $C_0 = 4,7 \mu\text{F}$ ) bereits nach 2,4 s um 0,1 V (1%). Bei gut abgeglichenem Operationsverstärker (siehe Abschnitt 1.4.1) ist eine etwa zehnmahl längere Zeit erreichbar.

Für  $|U_1/R_1| < I_{\text{offset}}$  sind also Integrationen über längere Zeit (einige Zeitkonstanten  $R_1 C_0$ ) möglichst zu vermeiden.

### 2.1.4 Bestimmung der Grenzfrequenz

Als Quelle einer sinusförmigen Spannung variabler Frequenz dient im Schaltplan 2.1.4 ein RC-Oszillator (587 00), dabei darf den Eingängen der Operationsverstärker keine Spannung über  $\pm 15 \text{ V}$  zugeführt werden. Es wird die maximale Frequenz  $f_g$  bestimmt, bei der  $U_0$  um weniger als -3 dB (-30%) vom Sollwert  $-U_1 R_0/R_1$  abweicht.



Beispiele:

$U_1$	$R_1$	$R_0$	$f_g$
0,02 $V_{SS}$	1 k $\Omega$	1 M $\Omega$	0,6 kHz
0,2 $V_{SS}$	2 k $\Omega$	200 k $\Omega$	6 kHz
0,5 $V_{SS}$	5 k $\Omega$	200 k $\Omega$	13,5 kHz

Die in den Datenbüchern oft angegebene Beziehung  $f_g \sim R_1/R_0$  ist nur näherungsweise erfüllt.

### 2.1.5 Summation zweier Variablen

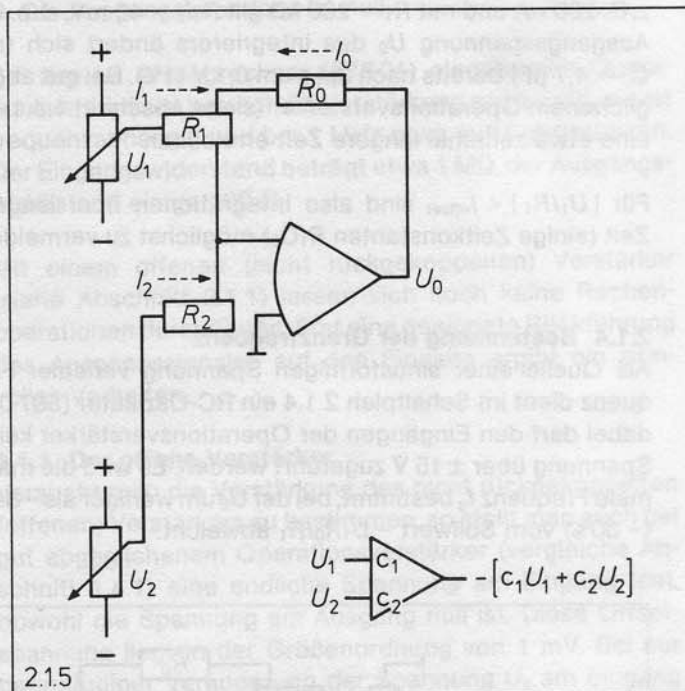
Der Zusammenhang zwischen  $U_0$  und  $U_1$  in Abschnitt 2.1.2 wird bestimmt durch  $I_0 = -I_1$ . Führt man dem Eingang außer  $I_1$  noch einen zweiten Strom  $I_2$  zu, so gilt entsprechend:

$$I_0 = -(I_1 + I_2)$$

Für die Spannungen folgt:

$$U_0 = - \left( \frac{R_0}{R_1} U_1 + \frac{R_0}{R_2} U_2 \right)$$

Die beiden Variablen  $U_1$  und  $U_2$  können also zunächst mit unterschiedlichen Faktoren  $c_1 = R_0/R_1$  und  $c_2 = R_0/R_2$  multipliziert und dann addiert werden. Im Bild 2.1.5 ist neben dem Schaltplan auch das Symbol für einen als Summierer beschalteten Operationsverstärker angegeben.



2.1.5

Beispiele:

$U_1$	$U_2$	$R_1$	$R_2$	$R_0$	$U_0$
+ 3 V	+ 4 V	100 k $\Omega$	100 k $\Omega$	100 k $\Omega$	- 7 V
+ 10 V	- 5 V	100 k $\Omega$	100 k $\Omega$	100 k $\Omega$	- 5 V
+ 10 V	- 5 V	200 k $\Omega$	50 k $\Omega$	100 k $\Omega$	+ 5 V
- 7 V	- 2 V	10 k $\Omega$	20 k $\Omega$	10 k $\Omega$	+ 8 V

Eine Erweiterung auf 3 oder mehr Variable ist ohne weiteres möglich.

### 2.1.6 Integration einer Variablen

Mit den gleichen Voraussetzungen wie in Abschnitt 2.1.2 gilt wieder:

$$I_0 = -I_1$$

mit  $I_1 = U_1/R_1$ . Der Zusammenhang von  $I_0$  und  $U_0$  wird gegeben durch die Ladung  $Q = C_0 U_0$  auf dem Kondensator mit der Kapazität  $C_0$ :

$$Q(t) = \int_0^t I_0 dt + Q(0)$$

$$U_0(t) = \frac{1}{C_0} \int_0^t I_0 dt + U_0(0)$$

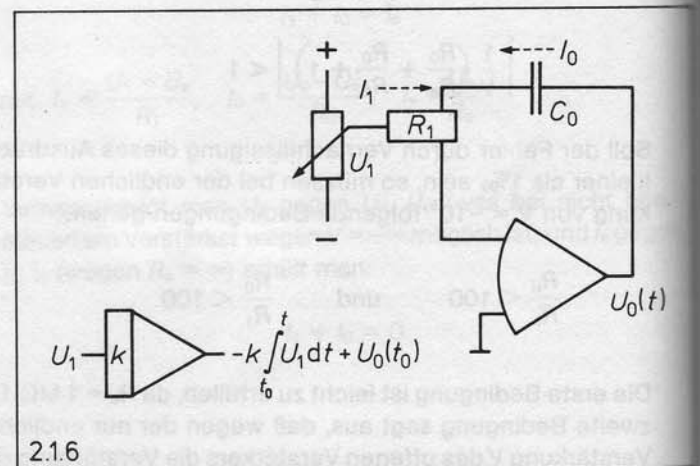
$$U_0(t) = -\frac{1}{C_0} \int_0^t I_1 dt + U_0(0)$$

$$U_0(t) = -\frac{1}{R_1 C_0} \int_0^t U_1 dt + U_0(0)$$

Man erhält das Integral von  $U_1$  nach der Zeit mit einem Faktor  $-k = -1/R_1 C_0$  multipliziert als Ergebnis. Über die Vorgabe des Anfangswertes  $U_0(0)$  ist im Schaltbild 2.1.6 noch keine Aussage gemacht, siehe dazu Abschnitt 2.1.7.

Bei einer positiven Spannung  $U_1$  wird  $U_0$  negativ. Wählt man jetzt eine kleine negative Spannung  $U_1$ , so wächst  $U_0$  gleichmäßig an von etwa -13 V bis +13 V. Die Zeit, in der sich  $U_0$  um den Betrag von  $U_1$  ändert, nennt man Zeitkonstante. Sie wird gegeben durch  $R_1 C_0$ . Mit  $R_1 = 200$  k $\Omega$  und  $C_0 = 4,7$   $\mu$ F gilt ungefähr:  $R_1 C_0 = 1$  s und  $k = 1$  s<sup>-1</sup>.

Wird die Zeit  $t$  als unabhängige Variable ersetzt durch eine dimensionslose mathematische Größe (z. B.  $x = t/a$  oder



2.1.6

werden die Spannungen  $U$  als abhängige Veränderliche ersetzt durch dimensionslose mathematische Größen (z. B.  $y = U/\beta_v$ ) oder dimensionsbehaftete physikalische Größen (z. B. Geschwindigkeit  $v = U/\beta_n$  oder Beschleunigung  $a = U/\beta_a$ ) so läßt sich für das Ausgangssignal des Integrierers schreiben:

$$U_0(x) = -c \int_0^x U_1(x) dx + U_0(0) \quad \text{mit } c = k\alpha$$

$$\text{oder } y_0(x) = -c \int_0^x y_1(x) dx + y_0(0) \quad \text{mit } c = k\alpha$$

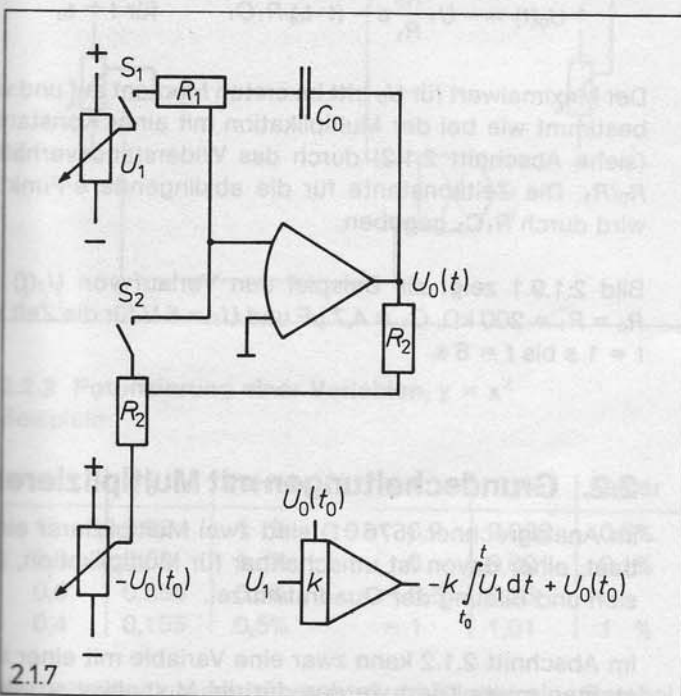
$$\text{oder } y_0(t) = -k \int_0^t y_1(t) dt + y_0(0)$$

$$\begin{aligned} \text{oder } v_0(t) &= -c \int_0^t a(t) dt + v_0(0) && \text{mit } c = k\beta_a/\beta_v \\ &= -c v(t) && \text{(siehe z. B. Abschnitt 5.1.5)} \end{aligned}$$

Die Konstante  $c$  ist in diesen Beispielen dimensionslos (Zur Amplituden- und Zeitskalierung vergleiche auch Abschnitte 1.3.2 und 1.3.3).

### 2.1.7 Integration mit definierter Anfangsbedingung

Vor Beginn der Integration muß der Wert von  $U_0(0)$  vorgebar sein. Dies wird im Schaltplan 2.1.7 erreicht durch eine zusätzliche Beschaltung des Operationsverstärkers mit zwei Widerständen wie zur Multiplikation mit einer Konstanten (siehe Abschnitt 2.1.2).



Ist Schalter  $S_1$  geöffnet und Schalter  $S_2$  geschlossen, so liegt nach kurzer Zeit (nach einigen Zeitkonstanten  $R_2 C_0$ ) am Ausgang des Verstärkers das Potential  $U_0(0)$ , dessen negativer Wert mit einem Potentiometer vorgegeben wird. Nach Öffnen des Schalters  $S_2$  bleibt  $U_0(0)$  nur wenige Zeit erhalten (zum Fehler durch verbleibenden Offsetstrom siehe Abschnitt 2.1.3), deshalb bald mit Schließen von Schalter  $S_1$  die Integration beginnen. Sie wird wieder beendet beim Öffnen von Schalter  $S_1$ .

Beispiele:

$U_1$	$R_1$	$C_0$	$U_0(0)$	$U_0(10 \text{ s})$
+ 1 V	200 k $\Omega$	4,7 $\mu\text{F}$	0 V	- 10,6 V
- 2 V	200 k $\Omega$	4,7 $\mu\text{F}$	- 10 V	+ 11,2 V
- 1 V	200 k $\Omega$	9,4 $\mu\text{F}$	- 10 V	- 4,7 V

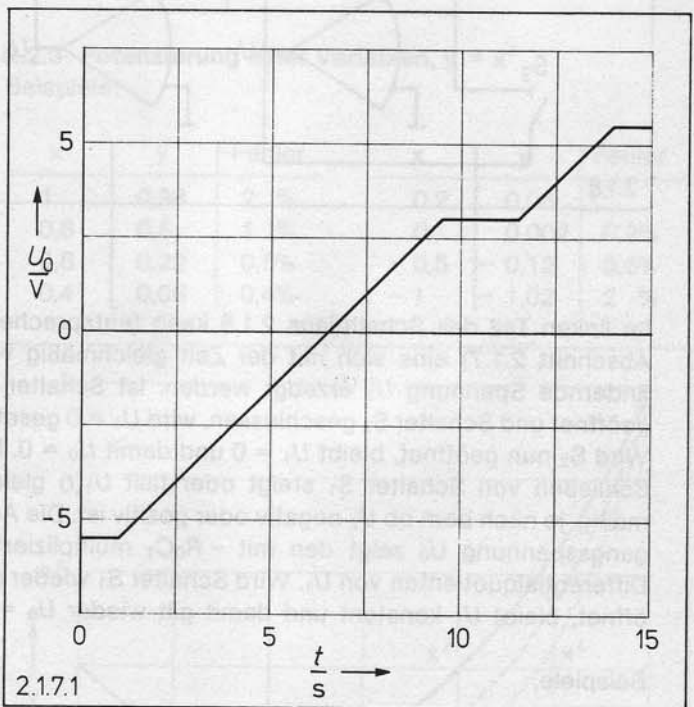


Bild 2.1.7.1 zeigt als Beispiel den Verlauf von  $U_0(t)$  mit  $R_1 C_0 = 1 \text{ s}$ ,  $U_1 = -1 \text{ V}$  und  $U_0(0) = -5,5 \text{ V}$ , wenn Schalter  $S_1$  geöffnet ist für  $t = 1 \text{ s}$  bis  $t = 9,5 \text{ s}$  und  $t = 11,5 \text{ s}$  bis  $t = 14 \text{ s}$ .

Ein Anfangswert  $U_0(0) = 0$  läßt sich auch erreichen durch Schließen eines Schalters parallel zu  $C_0$  (z. B. Schalter  $S_2$  in Schaltplan 2.1.8).

### 2.1.8 Differentiation einer Variablen

Mit den Voraussetzungen des Abschnitts 2.1.2 gilt wieder:

$$I_0 = -I_1$$

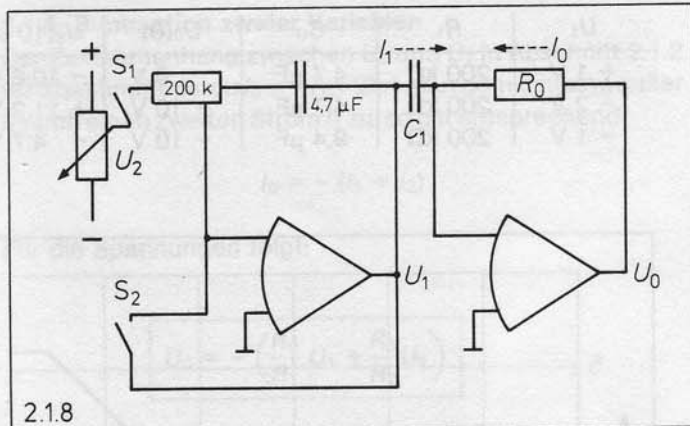
mit  $I_0 = U_0/R_0$ . Der Zusammenhang von  $I_1$  und  $U_1$  wird gegeben durch die zeitliche Änderung der Ladung  $Q = U_1 C_1$

des Kondensators  $C_1$ :

$$I_1 = \frac{dQ}{dt} = C_1 \frac{dU_1}{dt}$$

$$U_0 = I_0 R_0 = -I_1 R_0$$

$$U_0(t) = -R_0 C_1 \frac{dU_1}{dt}$$



Im linken Teil des Schaltplans 2.1.8 kann (entsprechend Abschnitt 2.1.7) eine sich mit der Zeit gleichmäßig verändernde Spannung  $U_1$  erzeugt werden. Ist Schalter  $S_1$  geöffnet und Schalter  $S_2$  geschlossen, wird  $U_1 = 0$  gesetzt. Wird  $S_2$  nun geöffnet, bleibt  $U_1 = 0$  und damit  $U_0 = 0$ . Mit Schließen von Schalter  $S_1$  steigt oder fällt  $U_1(t)$  gleichmäßig, je nach dem ob  $U_2$  negativ oder positiv ist. Die Ausgangsspannung  $U_0$  zeigt den mit  $-R_0 C_1$  multiplizierten Differentialquotienten von  $U_1$ . Wird Schalter  $S_1$  wieder geöffnet, bleibt  $U_1$  konstant und damit gilt wieder  $U_0 = 0$ .

Beispiele:

$U_2$	$U_1$	$C_1$	$R_0$	$U_0$
+ 1 V	- t 1,06 s <sup>-1</sup> V	4,7 μF	200 kΩ	+ 1 V
+ 1 V	- t 1,06 s <sup>-1</sup> V	4,7 μF	100 kΩ	+ 0,5 V
+ 1 V	- t 1,06 s <sup>-1</sup> V	9,4 μF	400 kΩ	+ 4 V
- 0,5 V	+ t 0,53 s <sup>-1</sup> V	9,4 μF	400 kΩ	- 2 V

Probleme treten auf, wenn neben langsamen auch sehr schnelle Änderungen von  $U_1$  auftreten. Dadurch kann einmal sehr rasch  $|U_0| > 10$  V, d. h. der Verstärker übersteuert werden und zum anderen wird der Strom  $I_1$  begrenzt durch einen endlichen Widerstand zum Laden von  $C_1$  entweder im Ausgang des vorausgehenden Verstärkers oder als Quellwiderstand von  $U_1$  (vergleiche Abschnitt 2.1.9). Darüberhinaus werden alle Störungen, die ein kurzzeitiges Verändern von  $U_1$  zur Folge haben, große Änderungen bei  $U_0$  verursachen; Störungen werden verstärkt. Deshalb wird bei der Realisierung von Rechenprogrammen nach Möglichkeit auf Differenzierer verzichtet und dafür mit Integrierern gearbeitet. Hier werden kurzzeitige Schwankungen von  $U_1$  abgeschwächt an  $U_0$  weitergegeben.

## 2.1.9 Differentiation mit Verzögerung

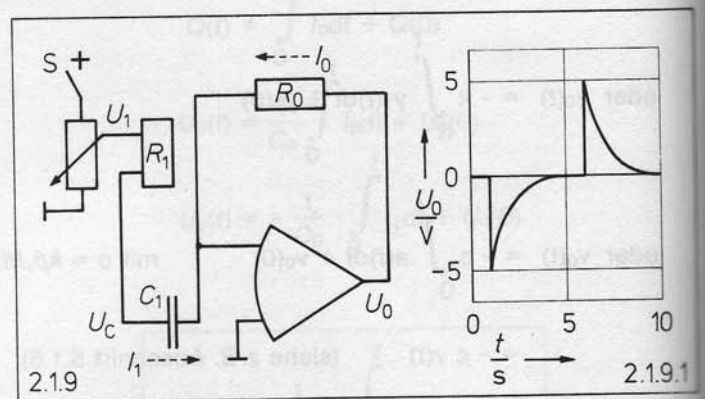
Bezieht man einen endlichen Widerstand  $R_1$ , über den der Ladestrom für  $C_1$  fließen muß, in die Überlegungen mit ein, erhält man eine Differentiation mit Verzögerung. Es gilt:

$$\frac{dU_1}{dt} = \frac{d(U_1 - U_C)}{dt} + \frac{dU_C}{dt} = R_1 \frac{dI_1}{dt} + \frac{1}{C_1} I_1$$

Mit  $I_1 = -I_0 = -U_0/R_0$  folgt:

$$\frac{dU_1}{dt} = -\frac{R_1}{R_0} \frac{dU_0}{dt} - \frac{1}{R_0 C_1} U_0$$

$$U_0(t) = -R_0 C_1 \frac{dU_1}{dt} - R_1 C_1 \frac{dU_0}{dt}$$



Bei Vernachlässigung des Innenwiderstandes (2,3 kΩ) des Potentiometers gegen  $R_1$  kann man im Schaltplan 2.1.9 die Eingangsspannung  $U_1$  als Sprungfunktion vorgeben. Dazu wird zunächst Schalter  $S$  geöffnet und es gilt  $U_1 = 0$ . Mit Schließen des Schalters zur Zeit  $t_0$  tritt der Sprung für  $U_1$  ein und für  $U_0$  folgt:

$$U_0(t) = 0 \quad \text{für } t < t_0$$

$$U_0(t) = -U_1 \frac{R_0}{R_1} e^{-(t-t_0)/R_1 C_1} \quad \text{für } t > t_0$$

Der Maximalwert für  $U_0$  tritt im ersten Moment auf und wird bestimmt wie bei der Multiplikation mit einer Konstanten (siehe Abschnitt 2.1.2) durch das Widerstandsverhältnis  $R_0/R_1$ . Die Zeitkonstante für die abklingende e-Funktion wird durch  $R_1 C_1$  gegeben.

Bild 2.1.9.1 zeigt als Beispiel den Verlauf von  $U_0(t)$  mit  $R_0 = R_1 = 200$  kΩ,  $C_1 = 4,7$  μF und  $U_1 = 5$  V für die Zeit von  $t = 1$  s bis  $t = 6$  s.

## 2.2. Grundsaltungen mit Multiplizierer

Im Analogrechner (57601) sind zwei Multiplizierer eingebaut, einer davon ist umschaltbar für Multiplikation, Division und Bildung der Quadratwurzel.

Im Abschnitt 2.1.2 kann zwar eine Variable mit einer Konstanten multipliziert werden, für die Multiplikation zweier

Variablen oder für die Quadrierung einer Variablen benötigt man jedoch nichtlineare Elemente. In Abschnitt 2.5.3 wird gezeigt, daß man mit Hilfe einiger Dioden mindestens in einem kleinen Bereich einen quadratischen Zusammenhang zwischen einem Ausgangs- und einem Eingangssignal erzeugen kann. Mit Hilfe von zwei Quadrierern und einigen Operationsverstärkern läßt sich dann ein sogenannter Parabelmultiplizierer auch diskret aufbauen (siehe dazu Abschnitt 2.2.7).

### 2.2.1 Multiplikation zweier Variablen

Mit den beiden Eingangsspannungen  $U_1$  und  $U_2$  gilt für die Ausgangsspannung  $U_0$  des Multiplizierers:

$$U_0 = \frac{1}{10 \text{ V}} U_1 U_2$$

Es erweist sich oft als günstiger, wenn man von der Angabe der Spannungen in Volt wekommt und dafür die Ein- und Ausgangssignale, die Werte, in Maschineneinheiten angibt (zur Amplitudenskalerung siehe Abschnitt 1.3.2). Der Wert 1 entspricht dabei 10 V.

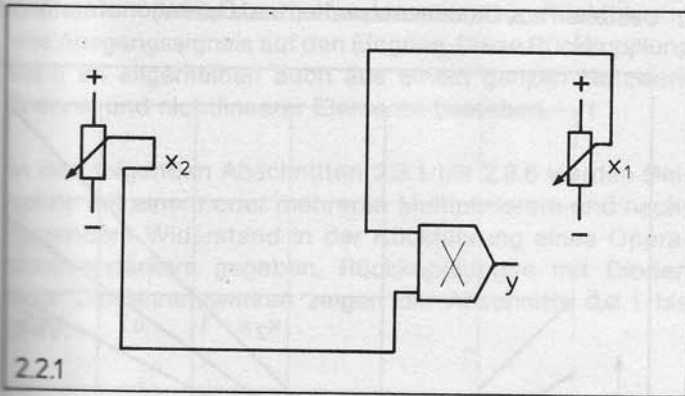
Betrachtet man nicht mehr die Spannungen  $U_1, U_2, U_0$ , sondern arbeitet mit den Werten  $x_1, x_2, y$ , so gilt:

$$y = x_1 x_2$$

Mit  $-1 \leq x_1 \leq +1$  und  $-1 \leq x_2 \leq +1$  folgt  $-1 \leq y \leq +1$ .

Beispiele:

$U_1$	$U_2$	$U_0$	$x_1$	$x_2$	$y$
+ 10 V	+ 10 V	+ 10 V	+ 1	+ 1	+ 1
+ 5 V	- 6 V	- 3 V	+ 0,5	- 0,6	- 0,3
- 2 V	- 10 V	+ 2 V	- 0,2	- 1	+ 0,2
- 5 V	+ 8 V	- 4 V	- 0,5	+ 0,8	- 0,4



2.2.1

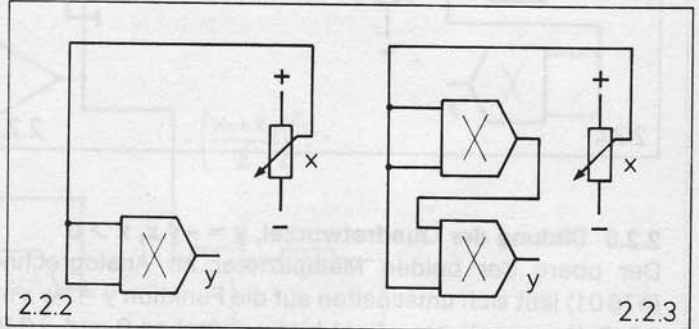
### 2.2.2 Potenzierung einer Variablen, $y = x^2$

Beispiele:

$x$	$y$	Fehler	$x$	$y$	Fehler
1	0,99	1 %	0,2	0,035	0,5%
0,8	0,63	1 %	0	0,001	0,1%
0,6	0,355	0,5%	- 0,5	0,25	
0,4	0,155	0,5%	- 1	1,01	1 %

Wenn  $y$  über  $x$  aufgetragen wird, erhält man eine Parabel.

Diese läßt sich auch mit einem XY-Schreiber oder TY-Schreiber (575 60, siehe Abschnitt 6.1.1) aufzeichnen. In Bild 2.2.3.1 sind die Funktionen  $y = x^2$ ,  $y = x^3$  und  $y = x^4$  aufgetragen.



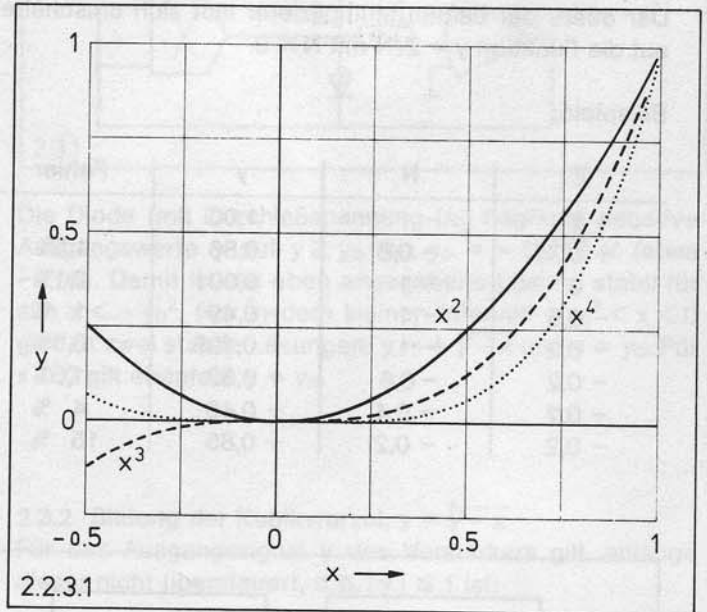
2.2.2

2.2.3

### 2.2.3 Potenzierung einer Variablen, $y = x^3$

Beispiele:

$x$	$y$	Fehler	$x$	$y$	Fehler
1	0,98	2 %	0,2	0,08	
0,8	0,5	1 %	0	0,002	0,2%
0,6	0,22	0,5%	- 0,5	- 0,12	0,5%
0,4	0,06	0,4%	- 1	- 1,02	2 %

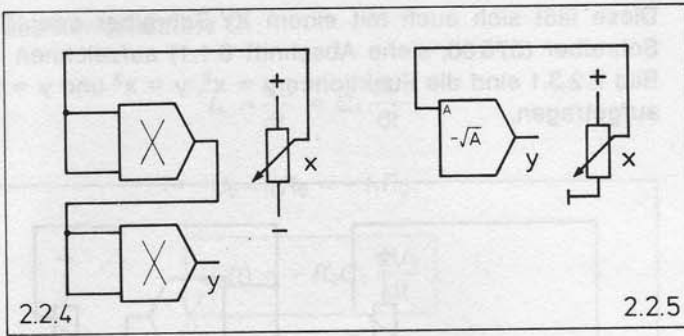


2.2.3.1

### 2.2.4 Potenzierung einer Variablen, $y = x^4$

Beispiele:

$x$	$y$	Fehler	$x$	$y$	Fehler
1	0,97	3 %	0,2	0,000	0,2%
0,8	0,405	0,5%	0	0,000	
0,6	0,125	0,5%	- 0,5	0,065	0,3%
0,4	0,020	0,5%	- 1	1,02	2 %



### 2.2.5 Bildung der Quadratwurzel, $y = -\sqrt{x}, x > 0$

Der obere der beiden Multiplizierer im Analogrechner (57601) läßt sich umschalten auf die Funktion  $y = -\sqrt{x}$  mit  $x > 0$ . Bei negativem  $x$  liegt hier  $y$  zwischen 0 und  $-0,01$ .

Beispiele:

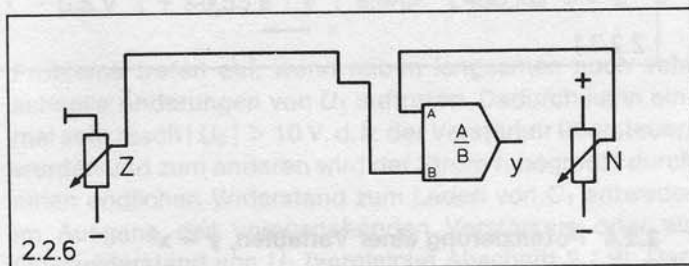
x	y	Fehler	x	y	Fehler
1	- 1,00		0,1	- 0,31	0,6%
0,8	- 0,89	0,5%	0,05	- 0,21	1,5%
0,4	- 0,63	0,2%	0,02	- 0,13	1 %
0,2	- 0,44	0,3%	0	- 0,01	1 %

### 2.2.6 Bildung des Quotienten, $y = Z/N, N < 0$

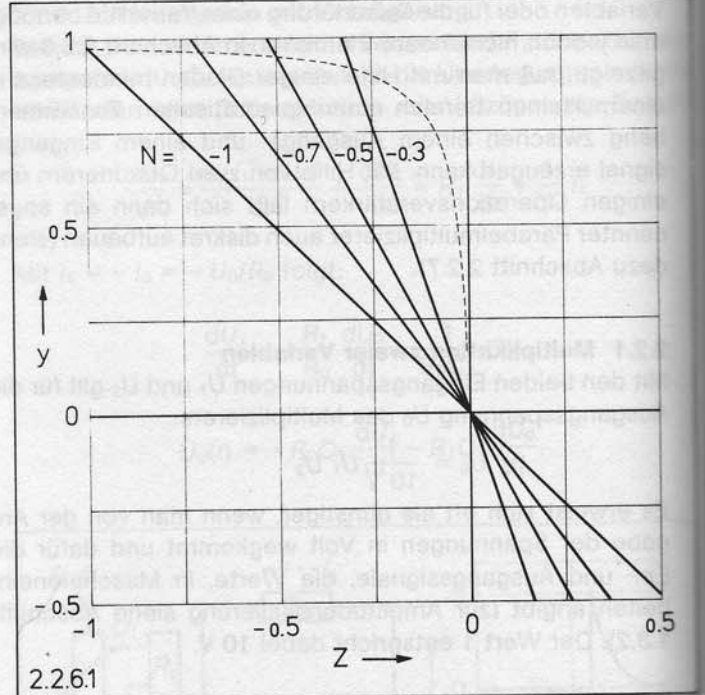
Der obere der beiden Multiplizierer läßt sich umschalten auf die Funktion  $y = Z/N$  mit  $N < 0$ .

Beispiele:

Z	N	y	Fehler
+ 1	- 1	- 1,00	
+ 0,7	- 0,8	- 0,86	1,5%
0	- 1	- 0,001	0,1%
- 0,5	- 1	+ 0,49	1 %
- 0,2	- 1	+ 0,195	0,5%
- 0,2	- 0,6	+ 0,32	1,5%
- 0,2	- 0,4	+ 0,46	4 %
- 0,2	- 0,2	+ 0,85	15 %



Bei kleinem Nenner wird der Fehler sehr groß. Bild 2.2.6.1 zeigt  $y$  als Funktion von  $Z$  mit  $N$  als Parameter. Die gestrichelte Linie zeigt  $y = Z/N$  mit  $Z = N$ . Wenn keine Fehler auftreten, müßte hier  $y = 1$  sein.

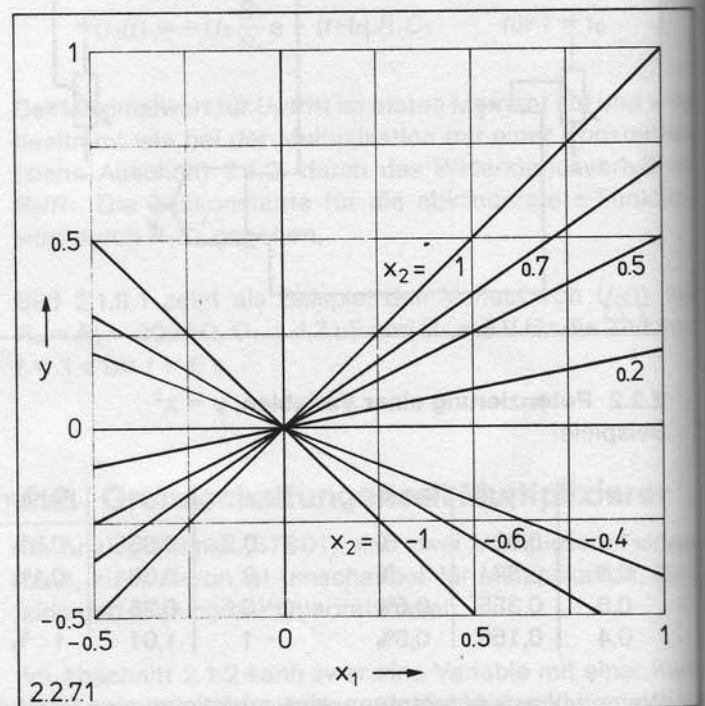


### 2.2.7 Aufbau eines Multiplizierers aus zwei Quadriern

Mit Kenntnis der Beziehung:

$$y = x_1 x_2 = \left( \frac{x_1 + x_2}{2} \right)^2 - \left( \frac{x_1 - x_2}{2} \right)^2$$

läßt sich ein Multiplizierer auch aus zwei Quadriern und einigen Operationsverstärkern aufbauen. Im Abschnitt 2.5.3 wird gezeigt, daß man mit Hilfe einiger Dioden mindestens in einem kleinen Bereich einen quadratischen Zusammenhang zwischen einem Ausgangs- und einem Eingangssignal erzeugen kann. Sogenannte Parabelmultiplizierer bestehen aus Diodennetzwerken und Operationsverstärkern.



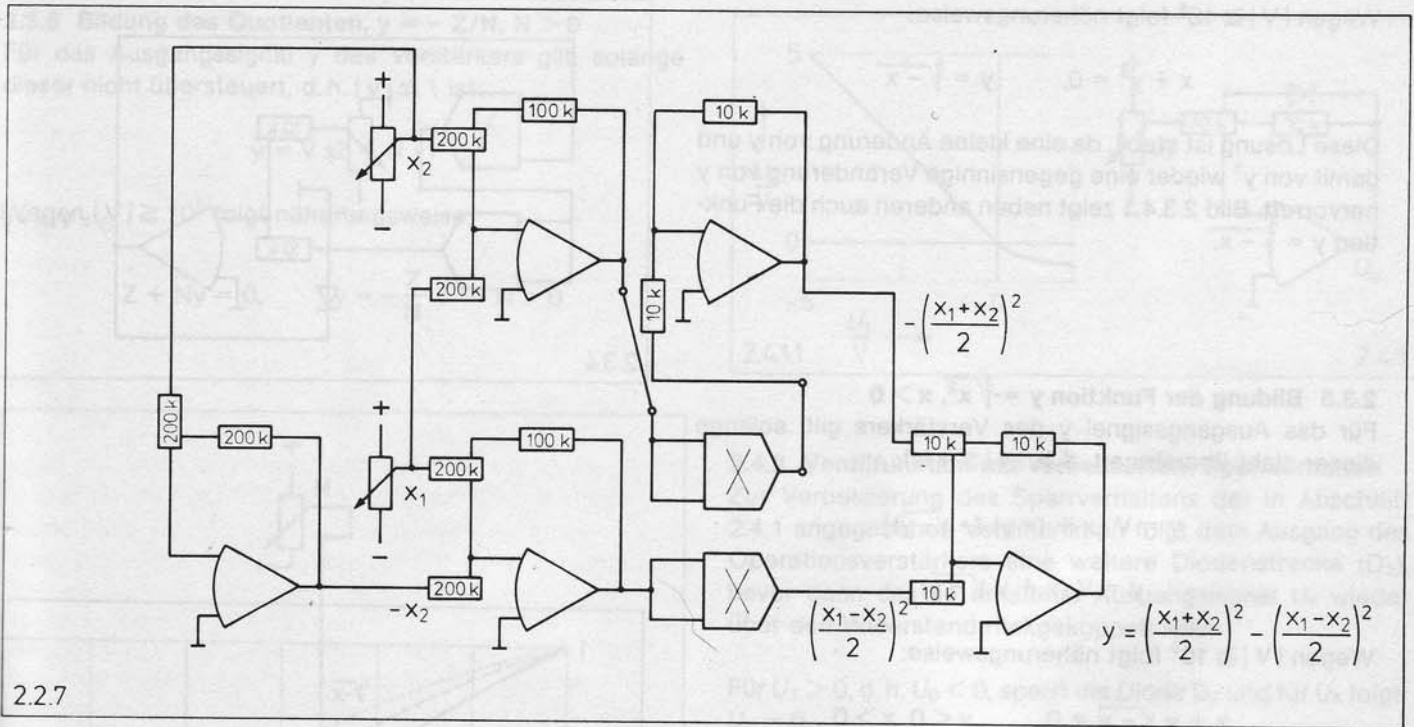


Bild 2.2.7.1 zeigt  $y$  als Funktion von  $x_1$  mit  $x_2$  als Parameter. Trotz der umfangreichen Schaltung bleibt auch hier der Fehler oft unter 2%.

### 2.3. Schaltungen mit Multiplizierer und offenem Verstärker

Die Abschnitte 2.1.2 bis 2.1.9 zeigen Beschaltungsbeispiele eines Operationsverstärkers mit diskreten linearen Elementen (Widerstand, Kondensator) zur Rückführung des Ausgangssignals auf den Eingang. Diese Rückkopplung kann im allgemeinen auch aus einem ganzen Netzwerk linearer und nichtlinearer Elemente bestehen.

In den folgenden Abschnitten 2.3.1 bis 2.3.5 werden Beispiele mit einem oder mehreren Multiplizierern und nachfolgendem Widerstand in der Rückführung eines Operationsverstärkers gegeben. Rückkopplungen mit Dioden oder Diodennetzwerken zeigen die Abschnitte 2.4.1 bis 2.4.9.

#### 2.3.1 Bildung der Quadratwurzel, $y = \sqrt{-x}$ , $x < 0$

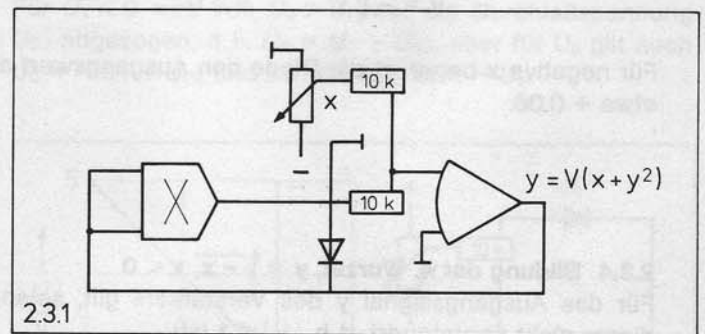
Für das Ausgangssignal  $y$  des Verstärkers gilt, solange dieser nicht übersteuert, d. h. solange  $|y| \leq 1$  ist:

$$y = V(x + y^2), \quad x < 0$$

Wegen  $|V| \geq 10^5$  folgt näherungsweise:

$$x + y^2 = 0$$

$$y = +\sqrt{-x}, \quad x < 0$$

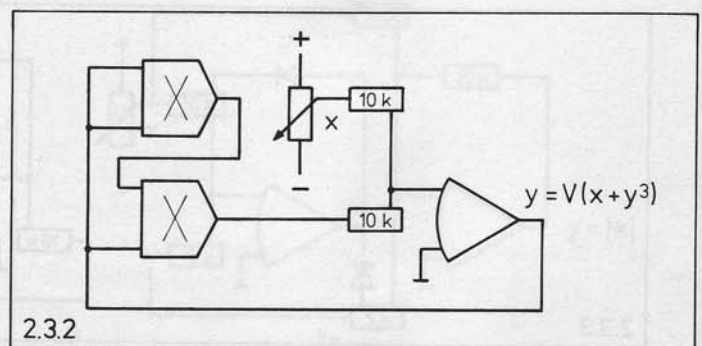


Die Diode (mit Durchlaßspannung  $U_D$ ) begrenzt negative Ausgangswerte  $y$  auf  $y \geq y_D$  mit  $y_D = -U_D/10$  V (etwa  $-0,06$ ). Damit ist die oben angegebene Lösung stabil für alle  $x < -y_D^2$ . Nur in dem kleinen Intervall  $-y_D^2 < x < 0$  gibt es zwei stabile Lösungen:  $y = +\sqrt{-x}$  und  $y = y_D$ . Für  $x \geq 0$  gilt ebenfalls  $y = y_D$ .

#### 2.3.2 Bildung der Kubikwurzel, $y = \sqrt[3]{-x}$

Für das Ausgangssignal  $y$  des Verstärkers gilt, solange dieser nicht übersteuert, d. h.  $|y| \leq 1$  ist:

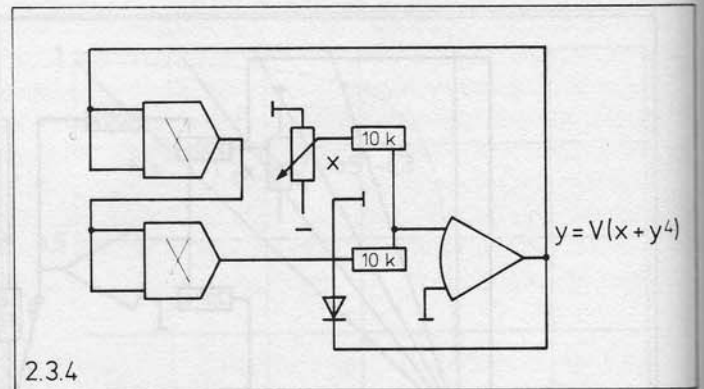
$$y = V(x + y^3)$$



Wegen  $|V| \geq 10^5$  folgt näherungsweise:

$$x + y^3 = 0, \quad y = \sqrt[3]{-x}$$

Diese Lösung ist stabil, da eine kleine Änderung von  $y$  und damit von  $y^3$  wieder eine gegensinnige Veränderung von  $y$  hervorruft. Bild 2.3.4.1 zeigt neben anderen auch die Funktion  $y = \sqrt[3]{-x}$ .



2.3.4

### 2.3.3 Bildung der Funktion $y = -\sqrt[3]{x^2}, x > 0$

Für das Ausgangssignal  $y$  des Verstärkers gilt, solange dieser nicht übersteuert, d. h.  $|y| \leq 1$  ist:

$$y = V [x + (-y) (-\sqrt{-y})]$$

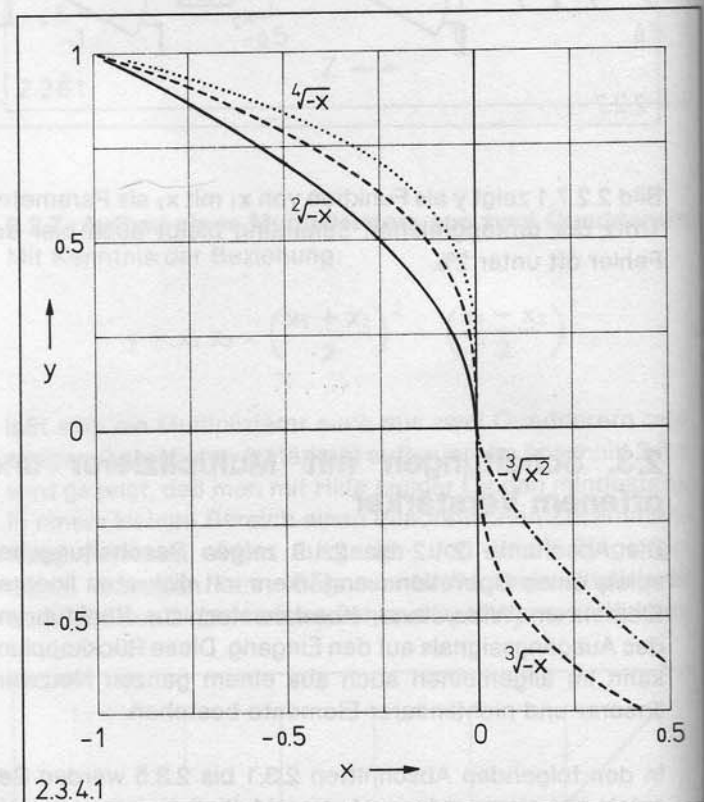
$$y = V (x + y \sqrt{-y})$$

Wegen  $|V| \geq 10^5$  folgt näherungsweise:

$$x + y \sqrt{-y} = 0, \quad y < 0, x > 0$$

$$y = -\sqrt[3]{x^2}, \quad x > 0$$

Für negative  $x$  begrenzt die Diode den Ausgangswert auf etwa  $+0,06$ .



2.3.4.1

### 2.3.4 Bildung der 4. Wurzel, $y = \sqrt[4]{-x}, x < 0$

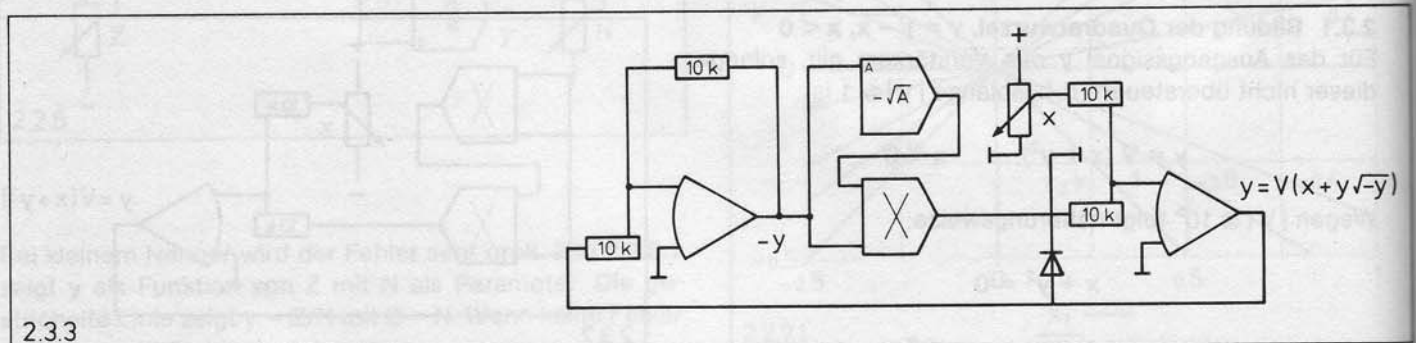
Für das Ausgangssignal  $y$  des Verstärkers gilt, solange dieser nicht übersteuert, d. h.  $|y| \leq 1$  ist:

$$y = V (x + y^4), \quad x < 0$$

Wegen  $|V| \geq 10^5$  folgt näherungsweise:

$$x + y^4 = 0, \quad y = +\sqrt[4]{-x}, \quad x < 0$$

Die Diode begrenzt wie in Abschnitt 2.3.1 negative Ausgangswerte  $y$  auf  $y > y_D$  (etwa  $0,06$ ). Damit ist die oben angegebene Lösung stabil für alle  $x < -y_D^4$ . Nur in dem äußerst kleinen Intervall  $-y_D < x < 0$  gibt es zwei stabile Lösungen  $y = +\sqrt[4]{-x}$  und  $y = y_D$ . Für  $x \geq 0$  gilt  $y = y_D$ . Bild 2.3.4.1 zeigt die Lösungen der Abschnitte 2.3.1 bis 2.3.4.



2.3.3



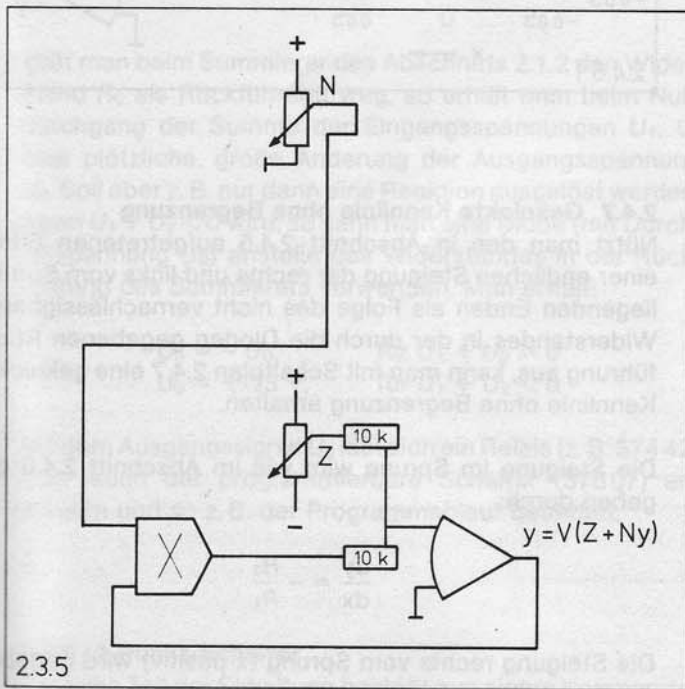
### 2.3.5 Bildung des Quotienten, $y = -Z/N, N > 0$

Für das Ausgangssignal  $y$  des Verstärkers gilt, solange dieser nicht übersteuert, d. h.  $|y| \leq 1$  ist:

$$y = V(Z + Ny)$$

Wegen  $|V| \geq 10^5$  folgt näherungsweise:

$$Z + Ny = 0, \quad y = -\frac{Z}{N}, \quad N > 0$$



Für  $N < 0$  ist  $y$  nicht stabil, da eine kleine Änderung von  $y$  und damit von  $Ny$  eine große weitere gleichartige Änderung von  $y$  hervorruft.

## 2.4. Grundschaltungen mit Dioden in der Rückführung

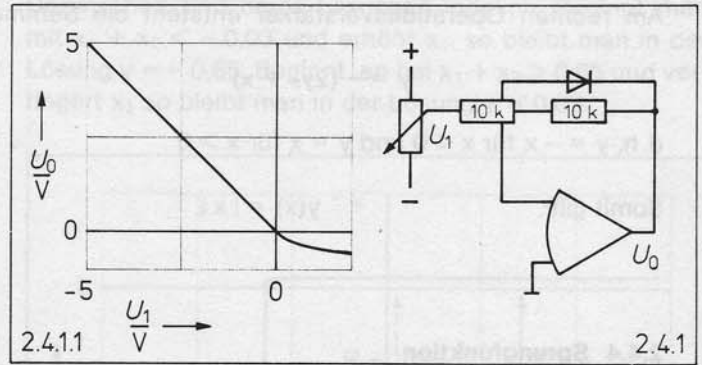
Mit einer oder mehreren Dioden in der Rückführung eines Operationsverstärkers kann man das Ausgangssignal ein- oder beidseitig auf vorgebbare Werte begrenzen.

### 2.4.1 Ventilfunktion

Der Widerstand in der Rückführung hängt von der Polarität der Ausgangsspannung  $U_o$  und damit der Eingangsspannung  $U_i$  ab. Bild 2.4.1.1 zeigt die Ausgangsspannung  $U_o$  als Funktion von  $U_i$ .

Für  $U_i < 0$  gilt  $U_o > 0$ ; die Diode sperrt und  $U_o = -U_i$ .

Für  $U_i > 0$  gilt  $U_o < 0$ ; die Diode ist niederohmig und  $U_o = -U_b$  (Durchlaßspannung  $U_b = 0,6$  V).

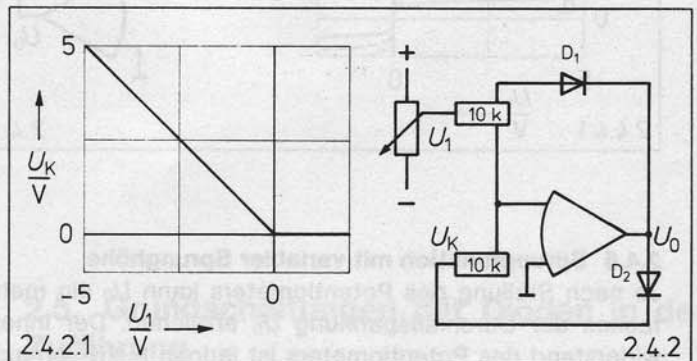


### 2.4.2 Ventilfunktion mit verbessertem Sperrverhalten

Zur Verbesserung des Sperrverhaltens der in Abschnitt 2.4.1 angegebenen Ventilfunktion folgt dem Ausgang des Operationsverstärkers eine weitere Diodenstrecke ( $D_2$ ), bevor dann das so erhaltene Ausgangssignal  $U_k$  wieder über den Widerstand rückgekoppelt wird.

Für  $U_i > 0$ , d. h.  $U_o < 0$ , sperrt die Diode  $D_2$  und für  $U_k$  folgt:  $U_k = 0$ .

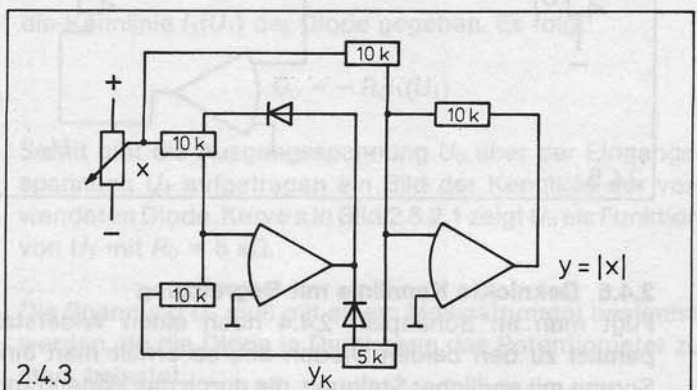
Für  $U_i < 0$  wird von  $U_o > 0$  zwar die Durchlaßspannung  $U_{D2}$  abgezogen, d. h.  $U_k = U_o - U_{D2}$ , aber für  $U_o$  gilt auch  $U_o = -U_i + U_{D2}$  und somit folgt:  $U_k = -U_i$ .



### 2.4.3 Bildung des Absolutwertes

Der Schaltplan besteht aus zwei Teilen. Am linken Operationsverstärker wird entsprechend Abschnitt 2.4.2 eine Ventilfunktion gebildet mit:

$$y_k = 0 \text{ für } x < 0 \text{ und } y_k = -x \text{ für } x > 0$$



Am rechten Operationsverstärker entsteht die Summe:

$$y = -(2y_k + x)$$

d. h.  $y = -x$  für  $x < 0$  und  $y = x$  für  $x > 0$

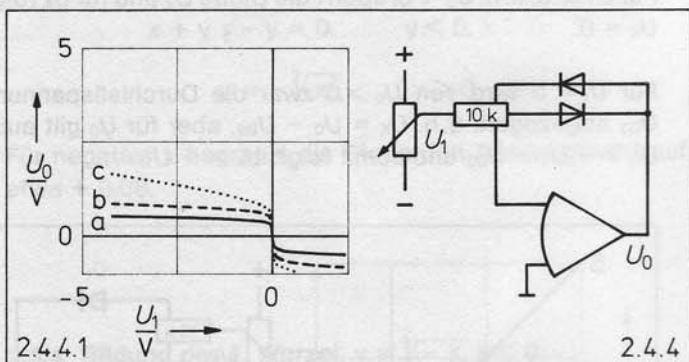
Somit gilt:  $y(x) = |x|$

### 2.4.4 Sprungfunktion

Die Ausgangsspannung  $U_0$  wird nicht nur wie in Abschnitt 2.4.1 einseitig sondern jetzt beidseitig durch die Durchlaßspannung einer Diodenstrecke begrenzt:

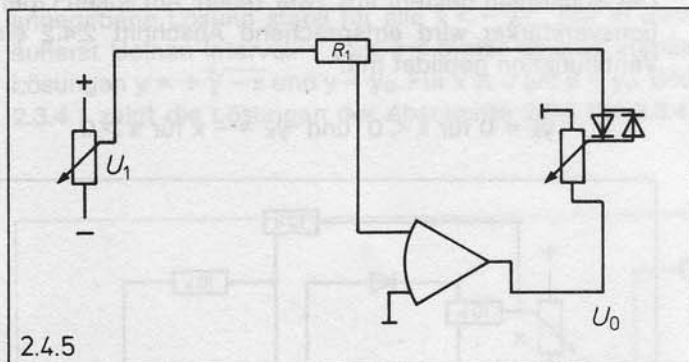
$$-U_D \leq U_0 \leq +U_D$$

Die sich durch eine Änderung von  $U_1$  ergebende Sprungfunktion  $U_0(U_1)$  zeigt Kurve a in Bild 2.4.4. Die Sprunghöhe beträgt etwa  $2 U_D$ .



### 2.4.5 Sprungfunktion mit variabler Sprunghöhe

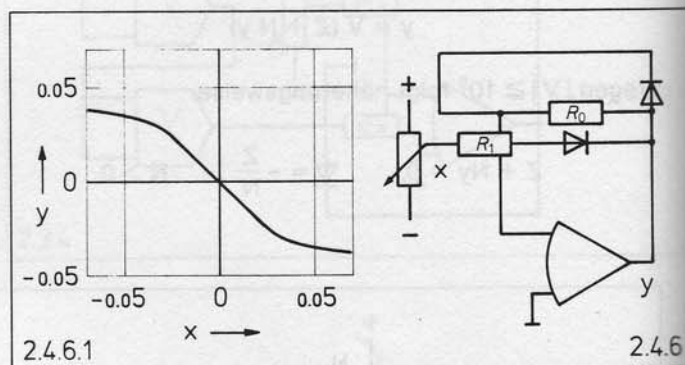
Je nach Stellung des Potentiometers kann  $U_0$  ein mehrfaches der Durchlaßspannung  $U_D$  erreichen. Der Innenwiderstand des Potentiometers ist jedoch nicht vernachlässigbar, was Kurve c in Bild 2.4.4.1 für  $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$  zeigt (Potentiometer für  $U_0$  steht auf der Mitte). Bei Vergrößerung von  $R_1$  auf  $100 \text{ k}\Omega$  erhält man Kurve b.



### 2.4.6 Geknickte Kennlinie mit Begrenzung

Fügt man im Schaltplan 2.4.4 noch einen Widerstand parallel zu den beiden Dioden ein, so erhält man einen Sprung mit endlicher Steigung, die durch das Widerstands-

verhältnis  $-R_0/R_1$  gegeben wird. Bild 2.4.6.1 zeigt eine solche geknickte Kennlinie mit Begrenzung für  $R_0 = R_1 = 10 \text{ k}\Omega$ .



### 2.4.7 Geknickte Kennlinie ohne Begrenzung

Nützt man den in Abschnitt 2.4.5 aufgetretenen Effekt einer endlichen Steigung der rechts und links vom Sprung liegenden Enden als Folge des nicht vernachlässigbaren Widerstandes in der durch die Dioden gegebenen Rückführung aus, kann man mit Schaltplan 2.4.7 eine geknickte Kennlinie ohne Begrenzung erhalten.

Die Steigung im Sprung wird wie im Abschnitt 2.4.6 gegeben durch:

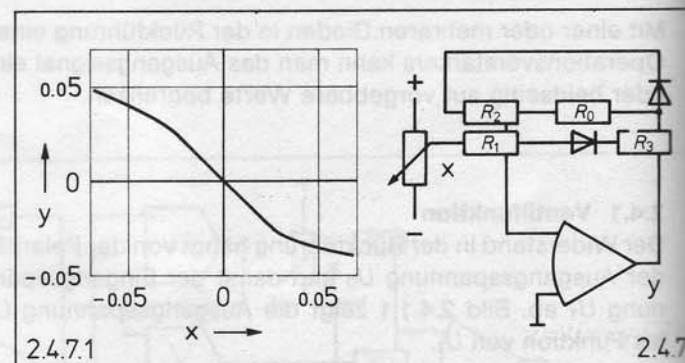
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{R_0}{R_1}$$

Die Steigung rechts vom Sprung ( $x$  positiv) wird gegeben durch:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{R_0}{R_1} \left( \frac{R_3}{R_0 + R_3} \right)$$

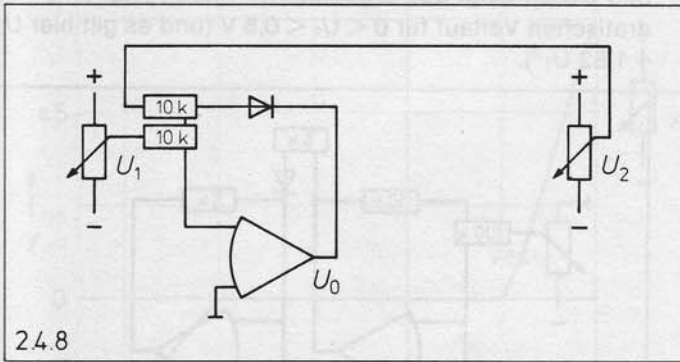
Die Steigung links vom Sprung ( $x$  negativ) wird gegeben durch:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{R_0}{R_1} \left( \frac{R_2}{R_0 + R_2} \right)$$



Im Bild 2.4.7.1 ist eine geknickte Kennlinie ohne Begrenzung wiedergegeben für  $R_0 = R_1 = 20 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$  und  $R_3 = 2 \text{ k}\Omega$ .

## 2.4.8 Komparator



Läßt man beim Summierer des Abschnitts 2.1.2 den Widerstand  $R_0$  als Rückführung weg, so erhält man beim Nulldurchgang der Summe der Eingangsspannungen  $U_1$ ,  $U_2$  eine plötzliche, große Änderung der Ausgangsspannung  $U_0$ . Soll aber z. B. nur dann eine Reaktion ausgelöst werden, wenn  $U_1 + U_2 < 0$  wird, so kann man eine Diode (mit Durchlaßspannung  $U_D$ ) anstelle des Widerstandes in der Rückführung des Summierers verwenden. Man erhält:

$$\begin{aligned} U_0 &= -U_D, & \text{für } U_1 + U_2 > 0 \\ U_0 &= +13 \text{ V}, & \text{für } U_1 + U_2 < 0 \end{aligned}$$

Mit dem Ausgangssignal  $U_0$  läßt sich ein Relais (z. B. 574 42) oder auch der programmierbare Schalter (576 07) ansteuern und so z. B. der Programmablauf beenden.

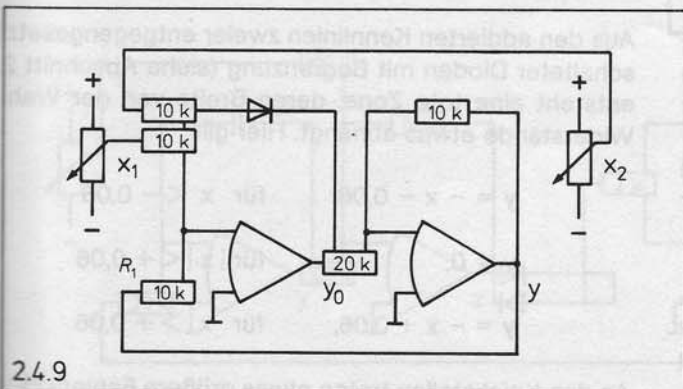
## 2.4.9 2-Punkt-Schalter

Der linke Teil der Schaltung besteht aus einem Komparator mit:

$$\begin{aligned} y_0 &= -U_D/10 \text{ V} = -0,06 & \text{für } x_1 + x_2 + y > 0 \\ y_0 &= +1,3 & \text{für } x_1 + x_2 + y < 0 \end{aligned}$$

Im rechten Teil der Schaltung wird  $y = -0,5 y_0$  gebildet. Die Gesamtschaltung hat zwei in gewissen Bereichen stabile Lösungen für  $y$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} y &= +0,03 & \text{für } x_1 + x_2 > 0,65 \\ y &= -0,65 & \text{für } x_1 + x_2 < -0,03 \end{aligned}$$



Dazwischen sind beide Lösungen möglich. Beginnt man mit  $x_1 + x_2 < -0,03$  und erhöht  $x_1$ , so bleibt man in der Lösung  $y = -0,65$ . Beginnt man bei  $x_1 + x_2 > 0,65$  und verringert  $x_1$  so bleibt man in der Lösung  $y = 0,03$ .

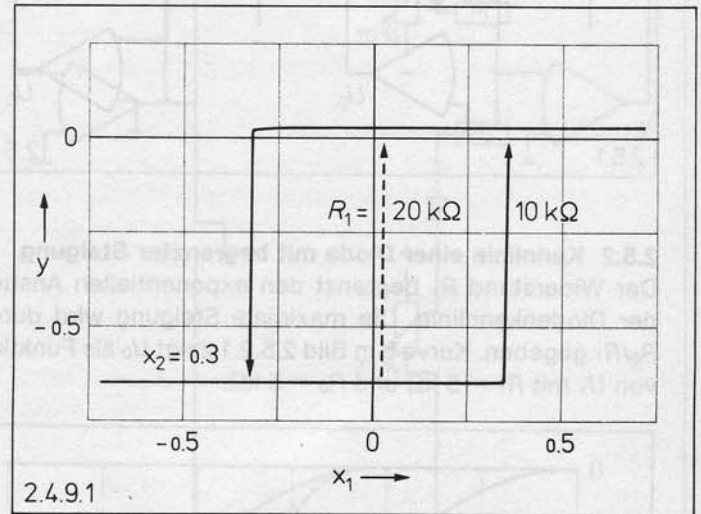


Bild 2.4.9.1 zeigt  $y$  als Funktion von  $x_1$  für  $x_2 = 0,3$ . Mit der Wahl von  $R_1$  kann der Abstand der beiden Schaltpunkte (z. B. 0,68 für  $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$  oder 0,34 für  $R_1 = 20 \text{ k}\Omega$ ) und mit der Wahl von  $x_2$  der untere Schaltpunkt von  $x_1$  (z. B.  $-0,33$  für  $x_2 = 0,3$  oder  $-0,7$  für  $x_2 = 0,67$ ) variiert werden.

## 2.5. Grundschaltungen mit Dioden in der Zuführung

### 2.5.1 Kennlinie einer Diode

Mit den Voraussetzungen des Abschnitts 2.1.2 gilt:

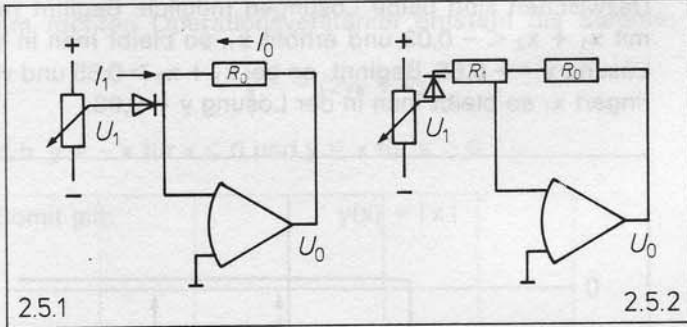
$$I_0 = -I_1$$

mit  $I_0 = U_0/R_0$ . Der Zusammenhang von  $I_1$  und  $U_1$  wird durch die Kennlinie  $I_1(U_1)$  der Diode gegeben. Es folgt:

$$U_0 = -R_0 I_1(U_1)$$

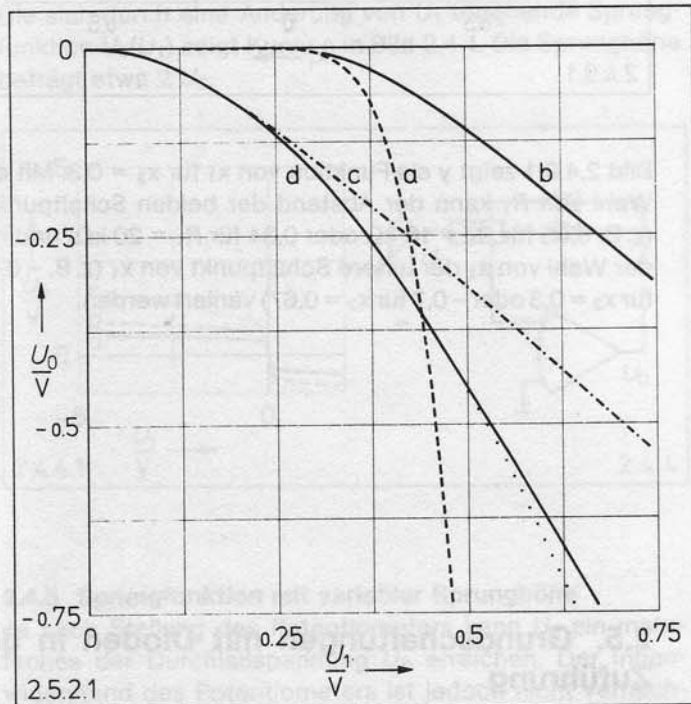
Somit gibt die Ausgangsspannung  $U_0$  über der Eingangsspannung  $U_1$  aufgetragen ein Bild der Kennlinie der verwendeten Diode. Kurve a in Bild 2.5.2.1 zeigt  $U_0$  als Funktion von  $U_1$  mit  $R_0 = 5 \text{ k}\Omega$ .

Die Spannung  $U_1$  muß mit einem Meßinstrument bestimmt werden, da die Diode in Durchgang das Potentiometer zu stark belastet.



### 2.5.2 Kennlinie einer Diode mit begrenzter Steigung

Der Widerstand  $R_1$  begrenzt den exponentiellen Anstieg der Diodenkennlinie. Die maximale Steigung wird durch  $R_0/R_1$  gegeben. Kurve b in Bild 2.5.2.1 zeigt  $U_0$  als Funktion von  $U_1$  mit  $R_1 = 5 \text{ k}\Omega$  und  $R_0 = 5 \text{ k}\Omega$ .

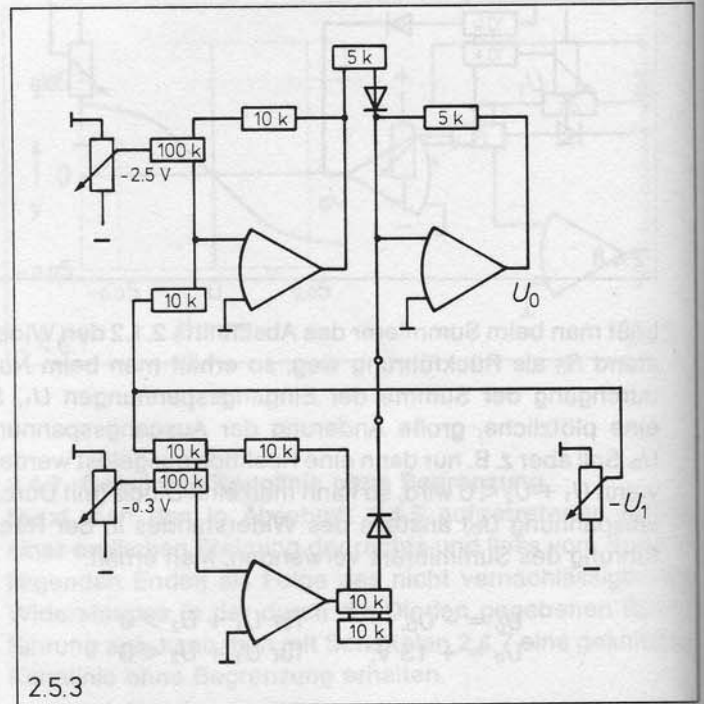


### 2.5.3 Erzeugung einer quadratischen Kennlinie durch vorgespannte Dioden

Die Kurve b in Bild 2.5.2.1 (Kennlinie einer Diode mit begrenzter Steigung) hat näherungsweise einen quadratischen Verlauf für  $0,25 \text{ V} < U_1 < 0,5 \text{ V}$ . Durch geeignete Addition solcher Teilstücke läßt sich auch über einen größeren Bereich ein quadratischer Zusammenhang zwischen Eingangs- und Ausgangsspannung erreichen. Dazu wird zunächst eine geeignete Spannung (hier  $0,25 \text{ V}$ ) zu  $U_1$  addiert, bevor man auf die Diode geht, damit die quadratische Kennlinie im Ursprung beginnt (Kurve c in Bild 2.5.2.1). Wir haben jetzt einen quadratischen Verlauf für  $0 < U_1 < 0,25 \text{ V}$  (es gilt hier z. B.  $U_0 = -1,82 U_1^2$ ).

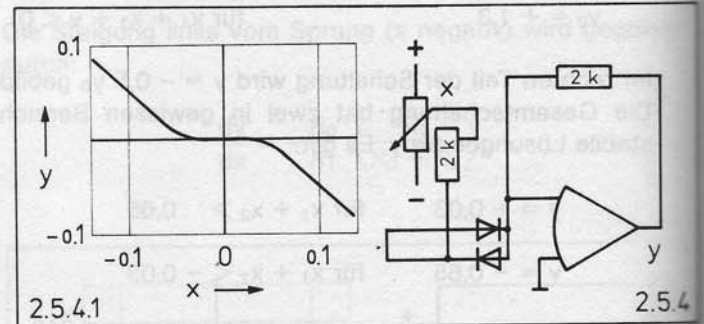
Über die zweite Diodenstrecke wird zu der Ausgangsspannung  $U_0$  noch ein zweiter quadratischer Anfang einer Diodenkennlinie mit Begrenzung addiert (hier noch einmal Kurve c aus Bild 2.5.2.1, jedoch um  $0,22 \text{ V}$  verschoben, d. h.

zu  $U_1$  wird eine Spannung von  $0,03 \text{ V}$  addiert). Kurve d in Bild 2.5.2.1 zeigt das Ergebnis. Wir haben jetzt einen quadratischen Verlauf für  $0 < U_1 < 0,5 \text{ V}$  (und es gilt hier  $U_0 = -1,82 U_1^2$ ).



Durch Verwendung weiterer Diodenstrecken ließe sich der Gültigkeitsbereich der quadratischen Kennlinie weiter vergrößern. Man hat also einen Quadrierer zur Verfügung, um gemäß Abschnitt 2.2.7 einen Parabelmultiplizierer aufbauen zu können.

### 2.5.4 Tote Zone



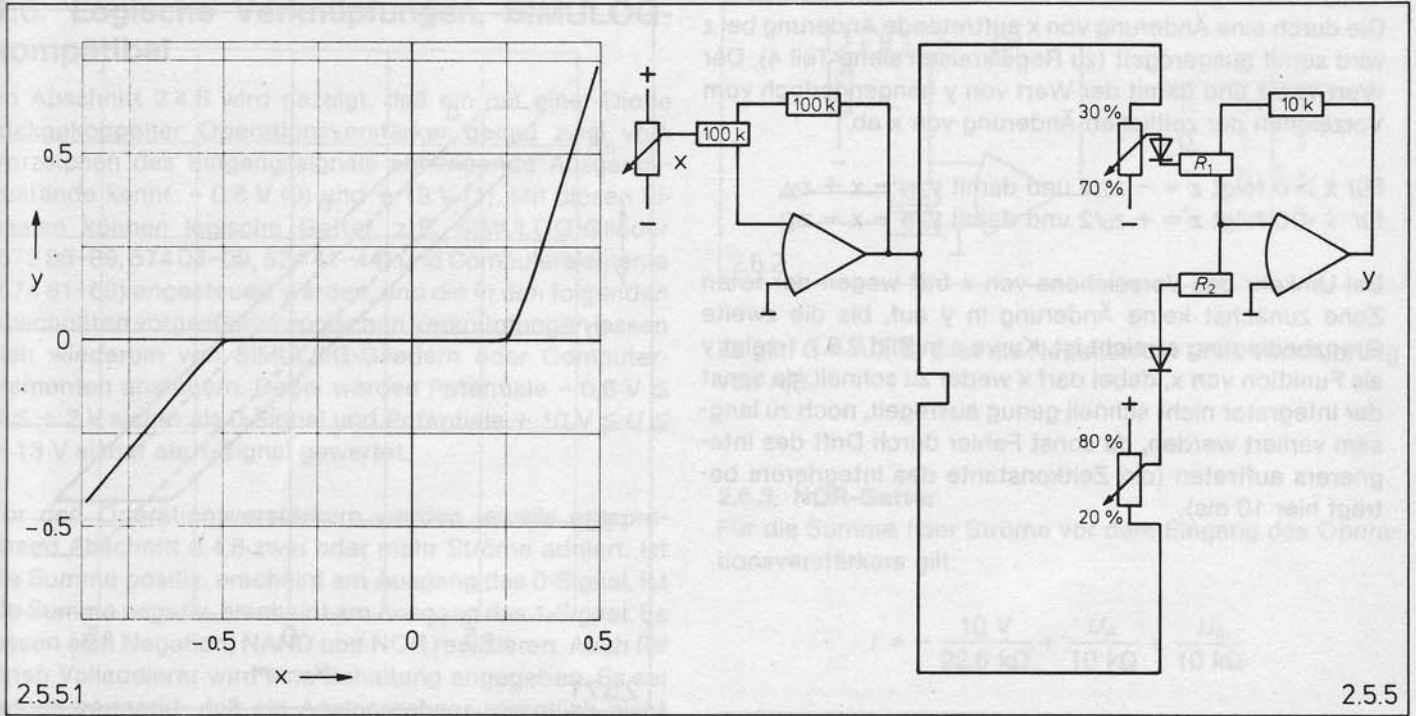
Aus den addierten Kennlinien zweier entgegengesetzt geschalteter Dioden mit Begrenzung (siehe Abschnitt 2.5.2) entsteht eine tote Zone, deren Breite von der Wahl der Widerstände etwas abhängt. Hier gilt:

$$y = -x - 0,06, \quad \text{für } x < -0,06$$

$$y = 0, \quad \text{für } |x| < +0,06$$

$$y = -x + 0,06, \quad \text{für } x > +0,06$$

An den Knickstellen treten etwas größere Fehler (2%) auf.



**2.5.5 Tote Zone mit variabler Breite**

Mit den Potentiometern vor den Diodenstrecken lassen sich die Knickpunkte wählen und mit den Widerständen vor dem letzten Operationsverstärker die Steigungen außerhalb der toten Zone. Bild 2.5.5.1 zeigt das Ausgangssignal y als Funktion des Eingangssignals x für  $R_1 = 5\text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 2\text{ k}\Omega$  und den im Schaltplan 2.5.5 als Beispiel angegebenen Teilverhältnissen am Potentiometer. (Bei der Berechnung der Steigung außerhalb der toten Zone durch das Widerstandsverhältnis am letzten Operationsverstärker muß das Teilverhältnis der Potentiometer mit berücksichtigt werden.)

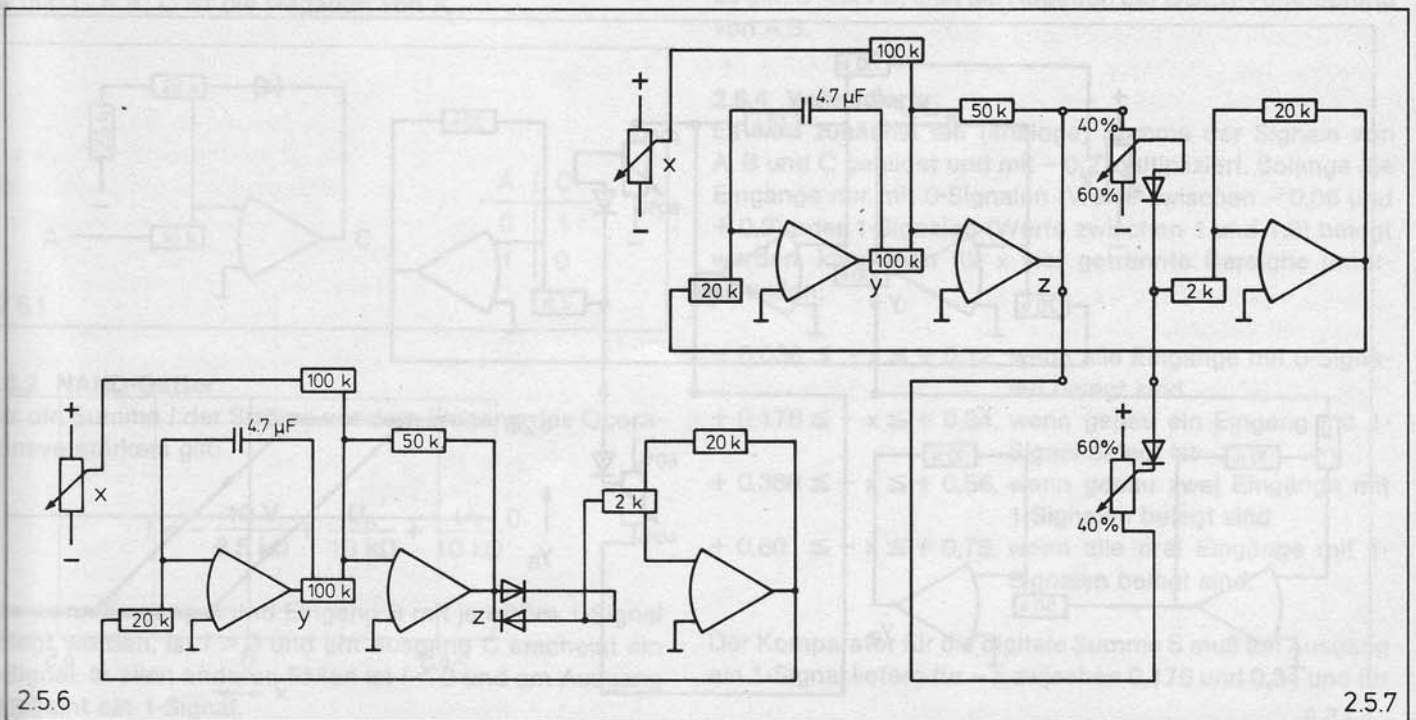
**2.5.6 Getriebelose**

Mit dem mittleren Operationsverstärker wird die Summe gebildet:

$$z = -\frac{1}{2}(x + y)$$

Es folgt eine Schaltung für eine tote Zone (siehe Abschnitt 2.5.4) der Breite  $z_0$  (hier etwa 0,08). Der nachfolgende Verstärker und Integrierer sorgen dafür, daß y solange geändert wird, bis gilt:

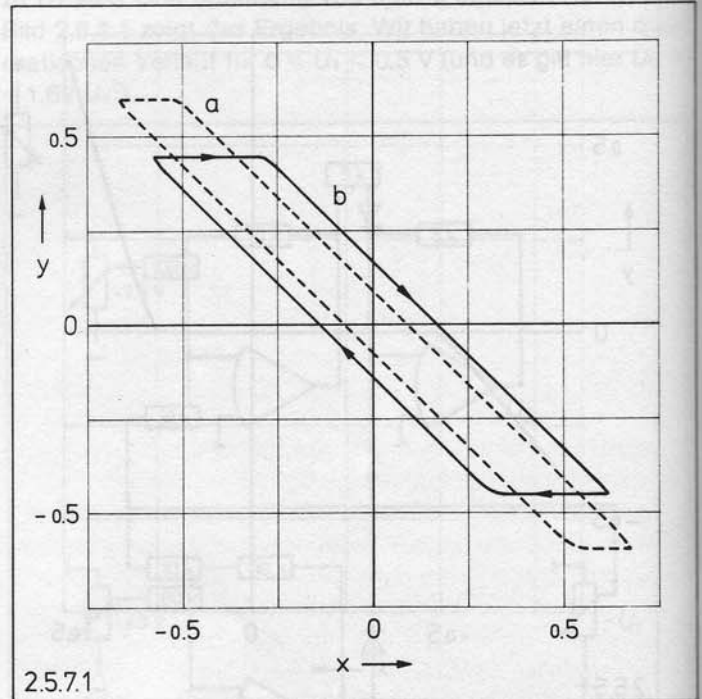
$$|z| < z_0/2$$



Die durch eine Änderung von  $x$  auftretende Änderung bei  $z$  wird somit ausgeglichen (zu Regelkreisen siehe Teil 4). Der Wert von  $z$  und damit der Wert von  $y$  hängen jedoch vom Vorzeichen der zeitlichen Änderung von  $x$  ab.

Für  $\dot{x} > 0$  folgt  $z = -z_0/2$  und damit  $y = -x + z_0$ ,  
für  $\dot{x} < 0$  folgt  $z = +z_0/2$  und damit  $y = -x - z_0$ .

Bei Umkehr des Vorzeichens von  $\dot{x}$  tritt wegen der toten Zone zunächst keine Änderung in  $y$  auf, bis die zweite Grenzbedingung erreicht ist. Kurve a in Bild 2.5.7.1 zeigt  $y$  als Funktion von  $x$ , dabei darf  $x$  weder zu schnell, da sonst der Integrator nicht schnell genug ausregelt, noch zu langsam variiert werden, da sonst Fehler durch Drift des Integrierers auftreten (die Zeitkonstante des Integrierers beträgt hier 10 ms).



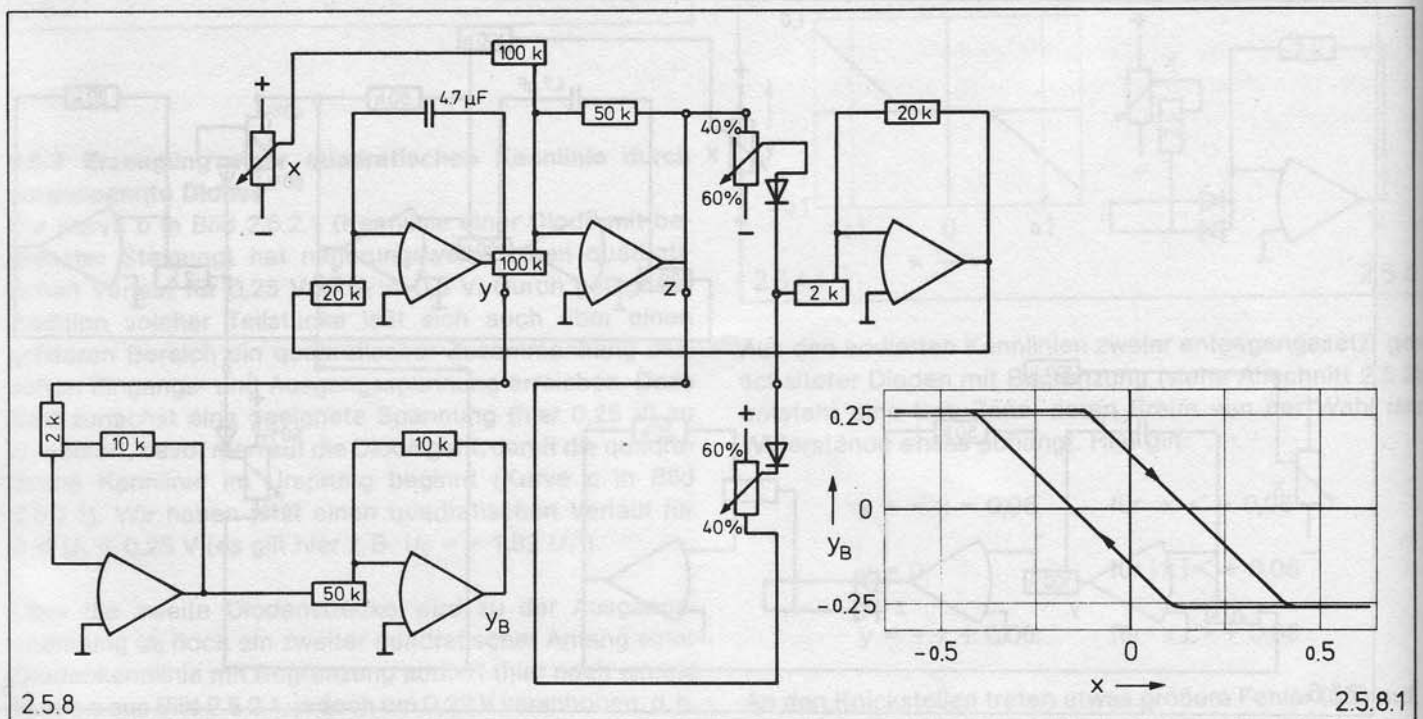
### 2.5.7 Getriebelose mit variablem Spiel

Das Spiel der Getriebelose im Abschnitt 2.5.6 wird gegeben durch die Breite der toten Zone dividiert durch die Verstärkung am mittleren Operationsverstärker (bei der Bildung von  $z$ ). Durch eine Verkleinerung des Widerstandes in der Rückführung kann somit das Spiel vergrößert werden. Es treten jedoch dann rasch große Schwankungen bei  $y$  auf. Günstiger ist eine Variation der toten Zone entsprechend Abschnitt 2.5.5.

Kurve b in Bild 2.5.7.1 zeigt  $y$  als Funktion von  $x$  mit den im Schaltplan 2.5.7 als Beispiel angegebenen Teilverhältnissen an den Potentiometern.

### 2.5.8 Getriebelose mit Begrenzung (Hysterese)

Wird die Getriebelose des Abschnitts 2.5.7 z. B. durch die gewünschte Übersteuerung eines Operationsverstärkers entsprechend Schaltplan 2.5.8 (links unten) begrenzt, so erhält man Bild 2.5.8.1.



## 2.6. Logische Verknüpfungen, SIMULOG-kompatibel

Im Abschnitt 2.4.8 wird gezeigt, daß ein mit einer Diode rückgekoppelter Operationsverstärker genau zwei vom Vorzeichen des Eingangssignals abhängende Ausgangszustände kennt:  $-0,6\text{ V}$  (0) und  $+13\text{ V}$  (1). Mit diesen Signalen können logische Gatter, z.B. SIMULOG-Glieder (573 85-89, 574 04-09, 574 41-44) und Computerelemente (574 61-69) angesteuert werden, und die in den folgenden Abschnitten vorgestellten logischen Verknüpfungen lassen sich wiederum von SIMULOG-Gliedern oder Computerelementen ansteuern. Dabei werden Potentiale  $-0,6\text{ V} \leq U \leq +2\text{ V}$  sicher als 0-Signal und Potentiale  $+10\text{ V} \leq U \leq +13\text{ V}$  sicher als 1-Signal gewertet.

Vor den Operationsverstärkern werden jeweils entsprechend Abschnitt 2.4.8 zwei oder mehr Ströme addiert. Ist die Summe positiv, erscheint am Ausgang das 0-Signal, ist die Summe negativ, erscheint am Ausgang das 1-Signal. Es lassen sich Negation, NAND und NOR realisieren. Auch für einen Volladdierer wird eine Schaltung angegeben. Es sei jedoch vermerkt, daß ein Analogrechner eigentlich nicht für digitales Arbeiten gedacht ist, aber es geht.

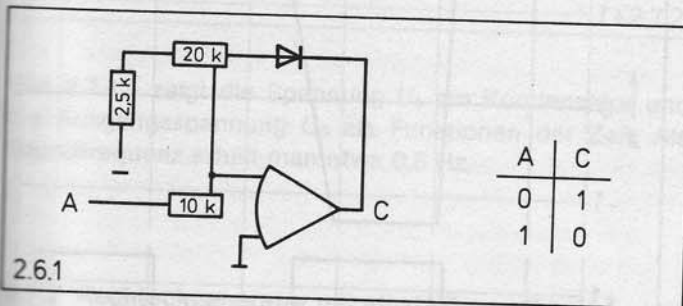
### 2.6.1 Negation

Für die Summe  $I$  der Ströme vor dem Eingang des Operationsverstärkers gilt:

$$I = -\frac{10\text{ V}}{22,5\text{ k}\Omega} + \frac{U_A}{10\text{ k}\Omega}$$

Wird der Eingang A mit einem 0-Signal belegt ( $-0,6\text{ V} \leq U_A \leq +2\text{ V}$ ), so ist  $I < 0$  und am Ausgang C erscheint ein 1-Signal ( $+13\text{ V}$ ). Wird der Eingang A mit einem 1-Signal belegt ( $+10\text{ V} \leq U_A \leq +13\text{ V}$ ), so ist  $I > 0$  und am Ausgang C erscheint ein 0-Signal ( $-0,6\text{ V}$ ).

Es gilt:  $C = \bar{A}$ ; C ist die Negation von A.

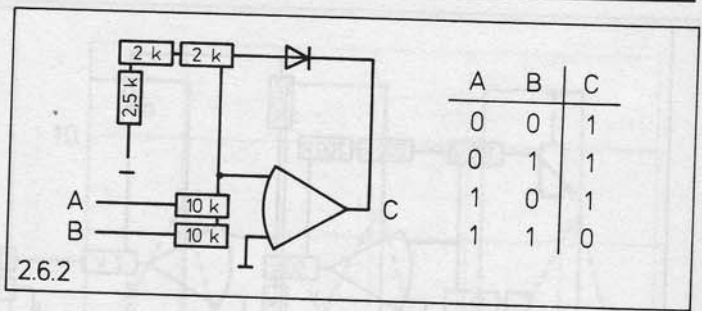


### 2.6.2 NAND-Gatter

Für die Summe  $I$  der Ströme vor dem Eingang des Operationsverstärkers gilt:

$$I = -\frac{10\text{ V}}{6,5\text{ k}\Omega} + \frac{U_A}{10\text{ k}\Omega} + \frac{U_B}{10\text{ k}\Omega}$$

Nur wenn Eingang A und Eingang B mit je einem 1-Signal belegt werden, ist  $I > 0$  und am Ausgang C erscheint ein 0-Signal. In allen anderen Fällen ist  $I < 0$  und am Ausgang C erscheint ein 1-Signal.

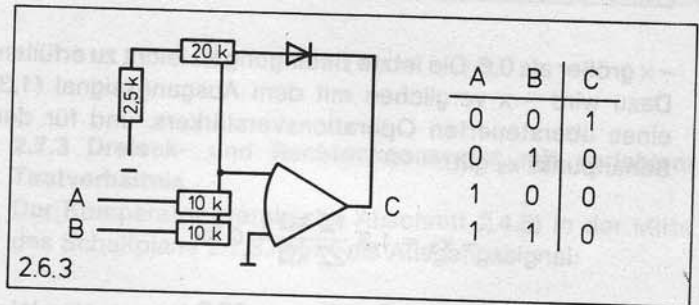


Es gilt:  $C = \overline{A \wedge B}$ ; C ist die Negation der UND-Verknüpfung von A, B.

### 2.6.3 NOR-Gatter

Für die Summe  $I$  der Ströme vor dem Eingang des Operationsverstärkers gilt:

$$I = -\frac{10\text{ V}}{22,5\text{ k}\Omega} + \frac{U_A}{10\text{ k}\Omega} + \frac{U_B}{10\text{ k}\Omega}$$



Nur wenn beide Eingänge A und B mit einem 0-Signal belegt sind, ist  $I < 0$  und am Ausgang C erscheint ein 1-Signal. Ist Eingang A oder Eingang B (oder sind beide) mit einem 1-Signal belegt, gilt  $I > 0$  und am Ausgang C erscheint ein 0-Signal.

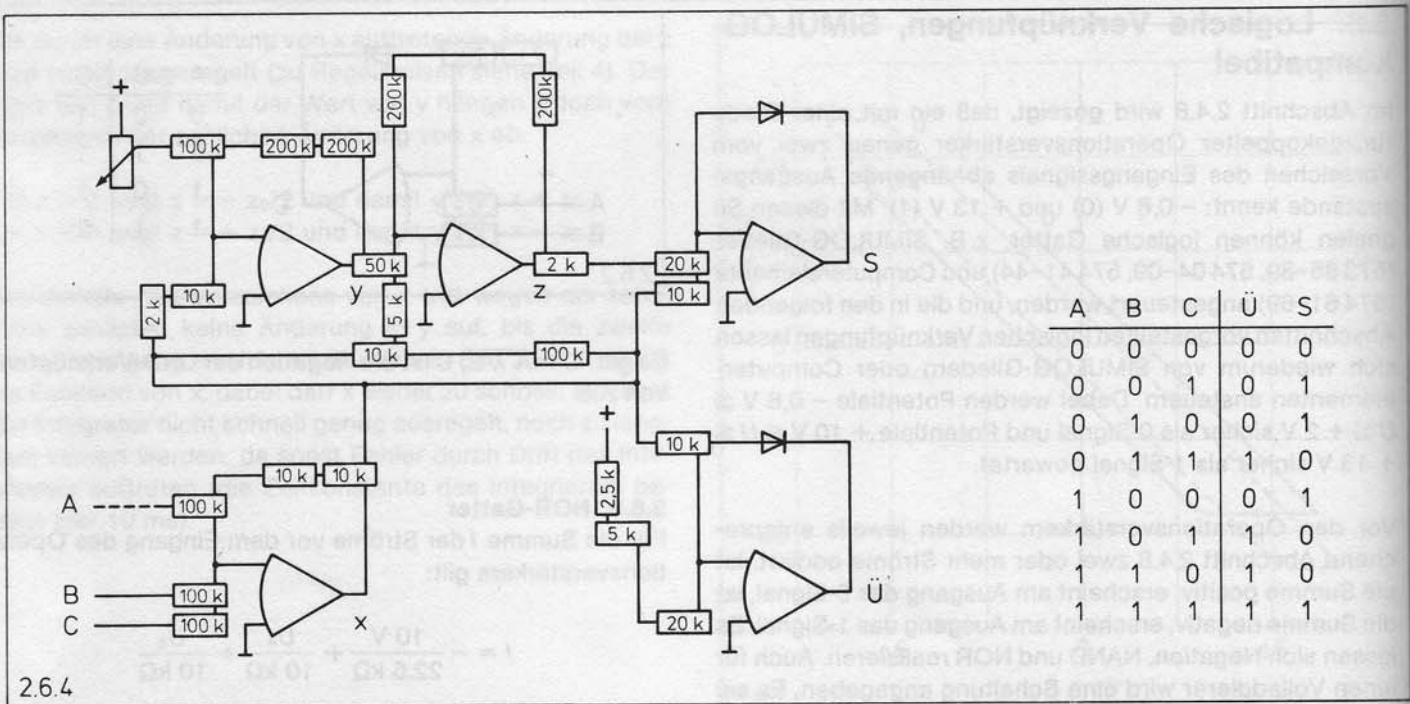
Es gilt:  $C = \overline{A \vee B}$ ; C ist die Negation der ODER-Verknüpfung von A, B.

### 2.6.4 Volladdierer

Es wird zunächst die (analoge) Summe der Signale von A, B und C gebildet und mit  $-0,2$  multipliziert. Solange die Eingänge nur mit 0-Signalen (Werte zwischen  $-0,06$  und  $+0,2$ ) oder 1-Signalen (Werte zwischen  $1$  und  $1,3$ ) belegt werden, kann man für  $x$  vier getrennte Bereiche unterscheiden:

- $-0,036 \leq -x \leq +0,12$ , wenn alle Eingänge mit 0-Signalen belegt sind
- $+0,176 \leq -x \leq +0,34$ , wenn genau ein Eingang mit 1-Signal belegt ist
- $+0,388 \leq -x \leq +0,56$ , wenn genau zwei Eingänge mit 1-Signalen belegt sind
- $+0,60 \leq -x \leq +0,78$ , wenn alle drei Eingänge mit 1-Signalen belegt sind.

Der Komparator für die digitale Summe  $S$  muß am Ausgang ein 1-Signal liefern für  $-x$  zwischen  $0,176$  und  $0,34$  und für



2.6.4

- x größer als 0,6. Die letzte Bedingung ist leicht zu erfüllen. Dazu wird - x verglichen mit dem Ausgangssignal (1,3) eines übersteuerten Operationsverstärkers, und für den Schaltpunkt  $x_3$  gilt:

$$-x_3 = 1,3 \frac{10 \text{ k}\Omega}{22 \text{ k}\Omega} = 0,59$$

Zur Erfüllung der ersten Forderung wird durch Vergleich von - x mit dem festen Wert 1 der untere Schaltpunkt festgelegt. y wechselt bei  $x_1$  das Vorzeichen mit:

$$-x_1 = 1,0 \frac{12 \text{ k}\Omega}{100 \text{ k}\Omega} = 0,12$$

Am nachfolgenden Operationsverstärker wird - x noch einmal mit y verglichen. Dabei wechselt z das Vorzeichen (einmal kurz oberhalb von -  $x_1$  und dann erneut) beim oberen Schaltpunkt  $x_2$  mit:

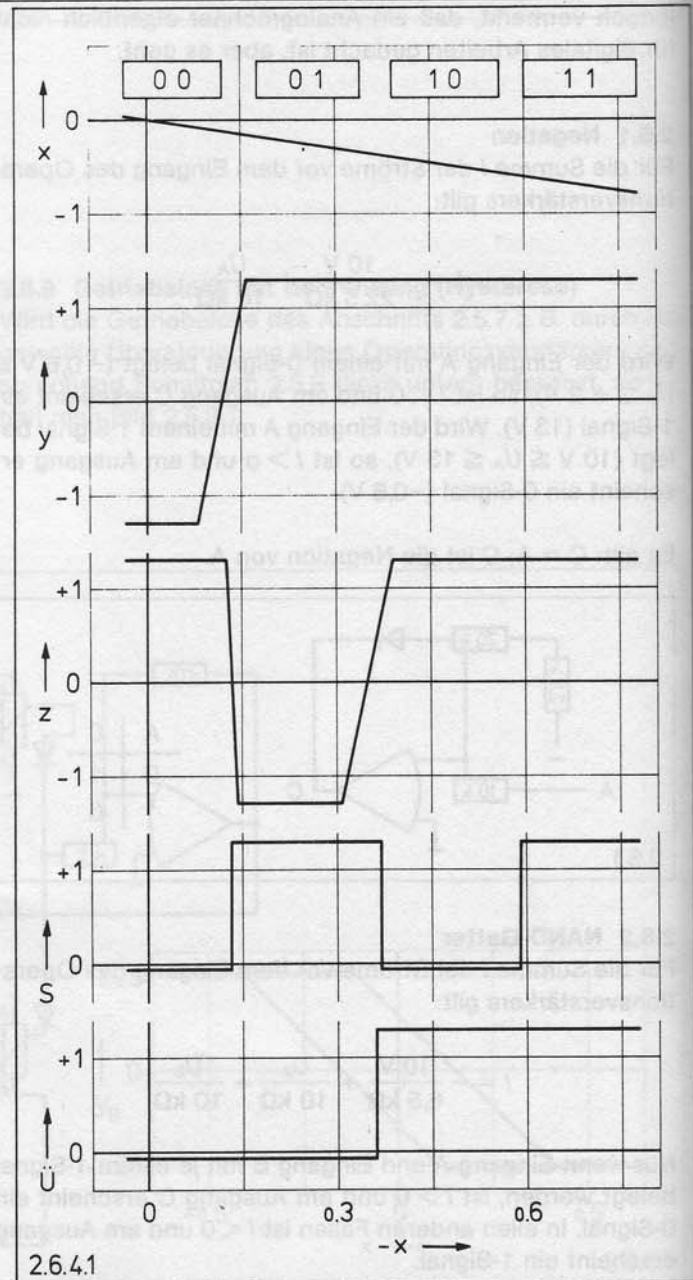
$$-x_2 = 1,3 \frac{14 \text{ k}\Omega}{50 \text{ k}\Omega} = 0,36$$

Der nachfolgende Komparator für die digitale Summe S liefert also auch für - x zwischen 0,176 und 0,34 am Ausgang ein 1-Signal.

Der Komparator für den Übertrag Ü liefert durch Vergleich von - x mit dem festen Wert 1 ein 1-Signal für alle x mit  $-x \geq -x_4$ . Für den Schaltpunkt  $x_4$  gilt:

$$-x_4 = 1,0 \frac{10 \text{ k}\Omega}{27,5 \text{ k}\Omega} = 0,36$$

In Bild 2.6.4.1 sind die Werte für x, y, z, S und Ü als Funktionen von - x noch einmal aufgetragen.



2.6.4.1



## 2.7. Generatoren

Im Abschnitt 2.5.3 wird gezeigt, daß mit zwei geeignet vorgespannten Diodenstrecken ein Stück einer quadratischen Funktion erzeugt werden kann. Mit einer genügenden Anzahl vorgespannter Dioden läßt sich jeder gewünschte stetige und eindeutige Funktionsverlauf nachbilden. Solche Funktionsgeber sollen hier jedoch nicht gezeigt werden. Es werden vielmehr einige schwingungsfähige Schaltungen als Beispiele für Sinus-, Dreieck- und Rechteckgeneratoren vorgestellt.

### 2.7.1 Rechteckgenerator

Bei der im Schaltplan 2.7.1 angegebenen Schaltung liegt der nicht invertierende Eingang nicht wie sonst an Masse sondern ebenfalls auf einem veränderlichen Potential. Verstärkt wird die Differenz beider Eingangssignale.

Für  $U_1 - U_2 < 0$  ist  $U_0$  positiv und damit  $U_2 = U_0/2$  auch positiv. Der Kondensator wird über den Widerstand (200 k $\Omega$ ) langsam (Zeitkonstante  $RC = 1$  s) aufgeladen bis  $U_1$  ebenfalls  $U_0/2$  erreicht. Jetzt wird  $U_1 - U_2$  positiv, damit  $U_0$  negativ und der Kondensator wieder umgeladen bis erneut  $U_1 = U_0/2$  erreicht ist. Für  $U_0(t)$  erhalten wir einen rechteckförmigen Verlauf.

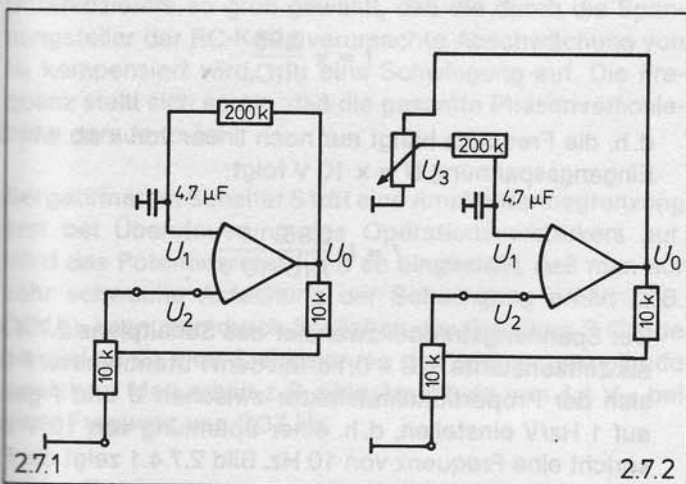


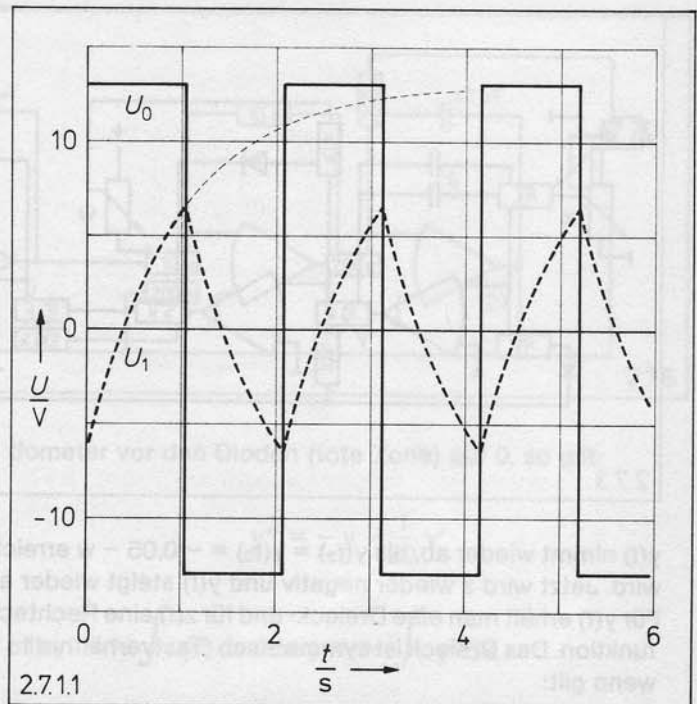
Bild 2.7.1.1 zeigt die Spannung  $U_1$  am Kondensator und die Ausgangsspannung  $U_0$  als Funktionen der Zeit. Als Grundfrequenz erhält man etwa 0,5 Hz.

### 2.7.2 Rechteckgenerator mit einstellbarer Frequenz

Der Strom zum Umladen des Kondensators kann mit dem Potentiometer verändert werden. So läßt sich die Frequenz  $f$  variieren. Für  $U_3 < 0,5 U_0$  treten keine Schwingungen mehr auf, da dann  $U_1 = U_2$  nicht mehr erreicht wird.

Beispiele:

$U_3$	$f$
$1,0 U_0$	0,5 Hz
$0,8 U_0$	0,4 Hz
$0,7 U_0$	0,33 Hz
$0,6 U_0$	0,25 Hz



### 2.7.3 Dreieck- und Rechteckgenerator mit variablem Tastverhältnis

Der Komparator (vergleiche Abschnitt 2.4.8) in der Mitte des Schaltplans 2.7.3 liefert als Ausgangssignal:

$$\begin{aligned} & -0,06, & \text{für } y + z + w > 0 \\ & +1,3, & \text{für } y + z + w < 0 \end{aligned}$$

Somit gilt für  $z$  am nachfolgenden Verstärker:

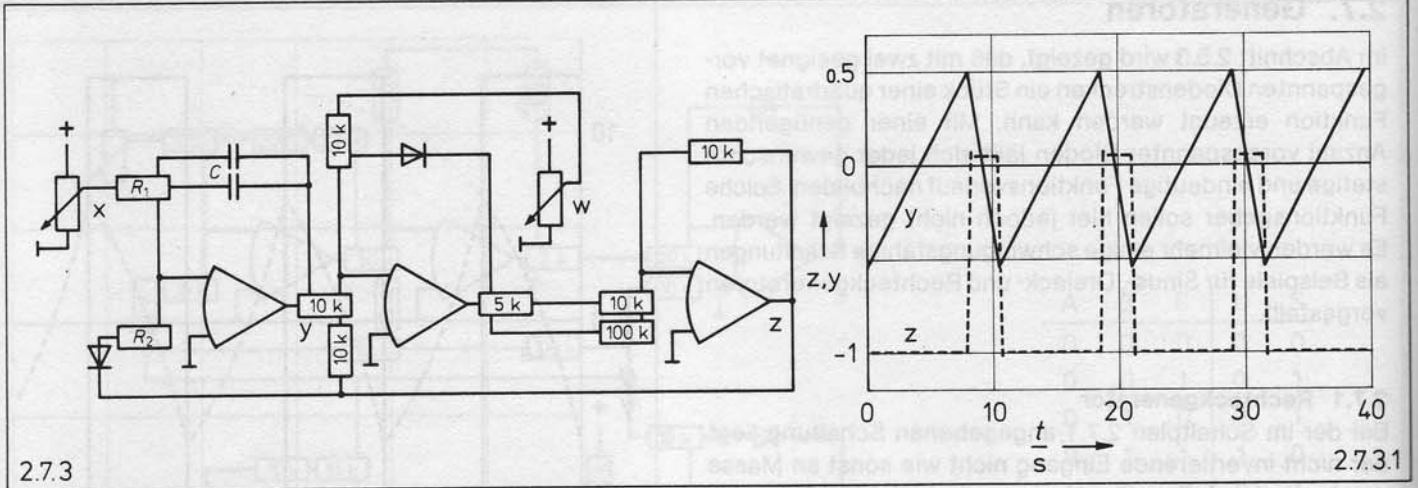
$$\begin{aligned} z &= +0,05, & \text{für } y + z + w > 0 \\ z &= -1, & \text{für } y + z + w < 0 \end{aligned}$$

Beginnt man zur Zeit  $t_0$  mit  $y(t_0) = -0,05 - w$ , so gilt mit  $z < 0$  für  $y(t)$ :

$$\begin{aligned} y(t) &= -\frac{1}{R_1 C} \int_{t_0}^t x dt - \frac{1}{R_2 C} \int_{t_0}^t z dt + y(t_0) \\ &= \left( \frac{1}{R_2 C} - \frac{1}{R_1 C} x \right) (t - t_0) + y(t_0) \end{aligned}$$

Für  $R_1 > R_2 x$  wächst  $y$  an, bis  $y(t_1) = 1 - w$  erreicht wird. Jetzt wird  $z$  positiv und es gilt für  $y(t)$ :

$$\begin{aligned} y(t) &= -\frac{1}{R_1 C} \int_{t_1}^t x dt + y(t_1) \\ &= -\frac{1}{R_1 C} x (t - t_1) + y(t_1) \end{aligned}$$



$y(t)$  nimmt wieder ab, bis  $y(t_2) = y(t_0) = -0,05 - w$  erreicht wird. Jetzt wird  $z$  wieder negativ und  $y(t)$  steigt wieder an. Für  $y(t)$  erhält man eine Dreieck- und für  $z(t)$  eine Rechteckfunktion. Das Dreieck ist symmetrisch (Tastverhältnis 1 : 1), wenn gilt:

$$\frac{1}{R_2 C} - \frac{1}{R_1 C} x = \frac{1}{R_1 C} x \quad \text{und somit } x = \frac{R_1}{2 R_2}$$

Für die Anstiegszeit  $t_A = t_1 - t_0$  und die Abfallzeit  $t_B = t_2 - t_1$  der Dreieckfunktion gilt mit  $R_1 = R_2 = R$ :

$$t_A = \left( y(t_1) - y(t_0) \right) \frac{RC}{1 - x} = RC \frac{1,05}{1 - x}$$

$$t_B = - \left( y(t_2) - y(t_1) \right) \frac{RC}{x} = RC \frac{1,05}{x}$$

Tastverhältnis  $t_A : t_B = x / (1 - x)$

$$\text{Periodendauer: } T = t_A + t_B = RC \frac{1,05}{x(1 - x)}$$

$$\text{Frequenz: } f = \frac{1}{T} = x(1 - x) / 1,05 RC$$

Mit  $w$  läßt sich die der Dreieckfunktion überlagerte Gleichspannung wählen. Bild 2.7.3.1 zeigt die Funktionen  $y(t)$  und  $z(t)$  für  $R_1 = R_2 = 200 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 9,4 \text{ }\mu\text{F}$ ,  $w = 0,5$  und  $x = 0,75$  mit einem TY-Schreiber registriert. Dadurch treten eine endliche Anstiegszeit und geringes Überschwingen bei den Rechtecken auf.

### 2.7.4 Spannungsfrequenzwandler

Wählt man im Abschnitt 2.7.3 ein Widerstandsverhältnis ungleich 1, so gilt für die Frequenz  $f$ :

$$f = x \left( 1 - \frac{R_2}{R_1} x \right) \frac{0,95}{R_1 C}$$

Mit einem extremen Widerstandsverhältnis, z.B.  $R_1/R_2 = 100$ , gilt näherungsweise:

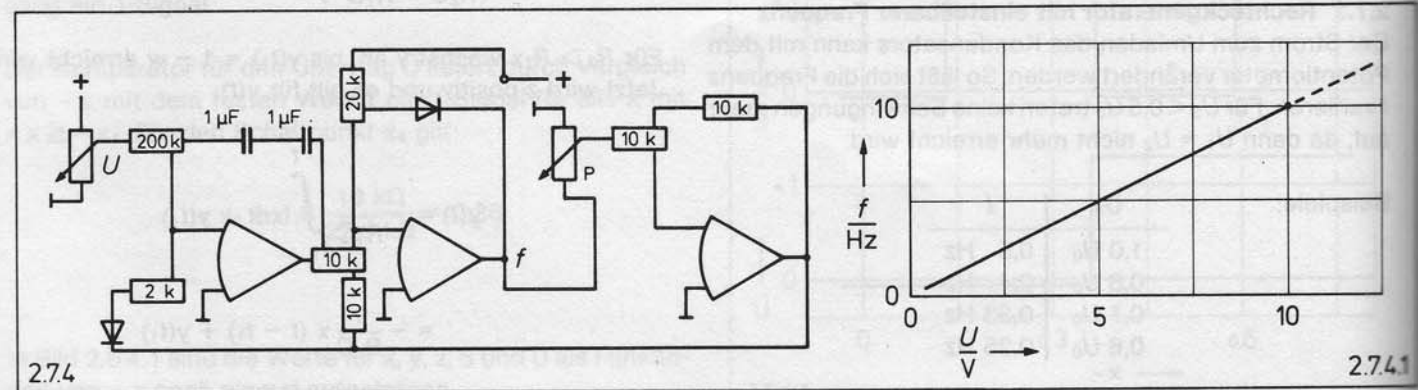
$$f = x \frac{0,95}{R_1 C}$$

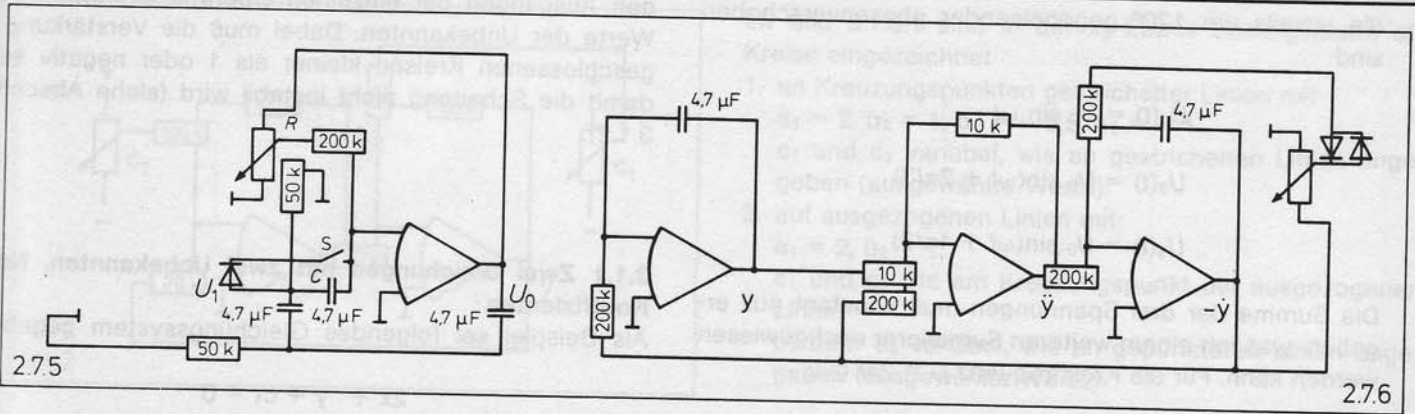
d. h. die Frequenz hängt nur noch linear von  $x$  ab. Mit der Eingangsspannung  $U = x \text{ } 10 \text{ V}$  folgt:

$$f = U \frac{0,95}{R_1 C} \frac{1}{10 \text{ V}}$$

Der Spannungsfrequenzwandler des Schaltplans 2.7.4 hat als Zeitkonstante  $R_1 C = 0,1 \text{ s}$ . Mit dem Potentiometer  $P$  läßt sich der Proportionalitätsfaktor zwischen  $U$  und  $f$  genau auf  $1 \text{ Hz/V}$  einstellen, d. h. einer Spannung von  $10 \text{ V}$  entspricht eine Frequenz von  $10 \text{ Hz}$ . Bild 2.7.4.1 zeigt die Frequenz als Funktion der Eingangsspannung für den so justierten Spannungsfrequenzwandler.

Erweitert man den Spannungsfrequenzwandler am Ausgang durch einen Digitalzähler zur Messung der Frequenz und vor dem Eingang durch einen Strom-Spannungs- und einen Widerstands-Spannungs-Umsetzer, so kann man ein digitales Vielfachmeßinstrument erhalten (siehe [16]).





**2.7.5 Sinusgenerator mit einem Operationsverstärker**  
 Der Operationsverstärker ist entsprechend Abschnitt 2.1.8 als Differenzierer geschaltet. Es gilt:

$$U_0 = -R_0 C_1 \frac{dU_1}{dt}$$

Für  $U_1 \sim \sin \omega t$  folgt  $U_0 \sim \sin(\omega t + 3\pi/2)$ . Es tritt eine frequenzunabhängige Phasenverschiebung von  $3\pi/2$  auf. Durch die dem Ausgang des Operationsverstärkers folgenden zwei RC-Glieder erhält man eine weitere, frequenzabhängige Phasenverschiebung. Wird der Faktor  $RC$  des Differenzierers so groß gewählt, daß die durch die Spannungsteiler der RC-Kette verursachte Abschwächung von  $U_0$  kompensiert wird, tritt eine Schwingung auf. Die Frequenz stellt sich so ein, daß die gesamte Phasenverschiebung gerade  $2\pi$  ist.

Bei geöffnetem Schalter S tritt eine Amplitudenbegrenzung erst bei Übersteuerung des Operationsverstärkers auf. Wird das Potentiometer für  $R$  so eingestellt, daß man nur sehr schwache Anfachung der Schwingung erhält (z.B.  $0,3 U_0$ ), kann man durch Schließen des Schalters S (Diode parallel zu C) eine Stabilisierung der Ausgangsamplitude erreichen. Man erhält z.B. eine Amplitude von  $4,4 V_{SS}$  bei einer Frequenz von  $0,37$  Hz.

**2.7.6 Sinusgenerator mit Amplitudenstabilisierung**

Während im Abschnitt 2.7.5 der Sinusgenerator nur aus einem geeignet rückgekoppelten Operationsverstärker besteht, wird mit Schaltplan 2.7.6 die Schwingungsdifferentialgleichung gelöst (vergleiche Kapitel 3.5). Steht das Poten-

tiometer vor den Dioden (tote Zone) auf 0, so gilt:

$$y'' = -y - \frac{1}{20} y'$$

$$\text{mit } y' = - \int y'' dx \text{ und } y = - \int y' dx.$$

Es entsteht eine leicht angefachte Sinusschwingung. Amplitudenbegrenzung erhält man über die tote Zone (siehe Abschnitt 2.5.5) mit geeigneter Stellung des Potentiometers. Es gilt dann:

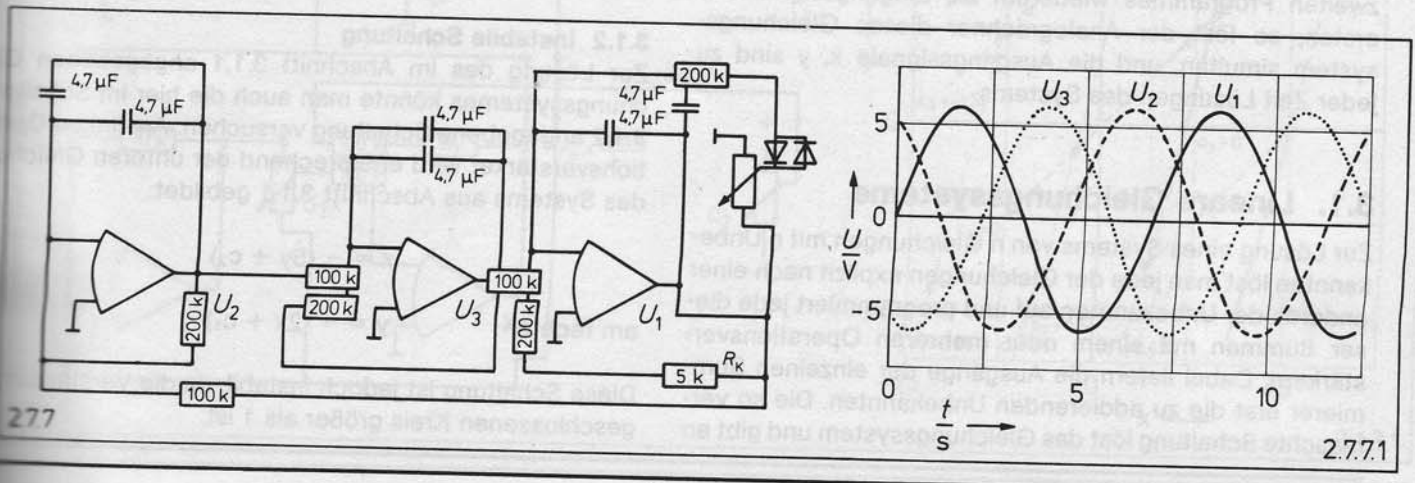
$$y'' + (R - 0,05) y' + y = 0$$

mit  $R = 0$  für kleine  $y'$  und  $R = 1$  für große  $y'$ .

**2.7.7 3-Phasen-Generator**

Es werden mit 3 geeignet beschalteten Operationsverstärkern drei gleiche frequenzabhängige Phasenverschiebungen erzeugt. Wird die Verstärkung im ganzen Kreis so groß gewählt, daß die durch die RC-Glieder verursachte Abschwächung gerade kompensiert wird, tritt eine etwas angefachte Schwingung auf. Sollte die Schaltung 2.7.7 keine Schwingung zeigen, ist  $R_K$  zu vergrößern. Die Frequenz  $f$  stellt sich so ein (hier etwa  $f = 0,147$  Hz), daß die gesamte Phasenverschiebung gerade  $2\pi$  ist, d.h. pro Verstärker  $2\pi/3$ .

Eine Amplitudenbegrenzung wird wieder erreicht über die tote Zone (Abschnitt 2.5.5) mit geeigneter Stellung des Potentiometers. Mit Schaltung 2.7.7 hat man drei sinusförmige Spannungen gleicher Amplitude zur Verfügung,



die jeweils um  $120^\circ$  gegeneinander phasenverschoben sind:

$$U_1(t) = U_0 \sin \omega t$$

$$U_2(t) = U_0 \sin(\omega t + 2\pi/3)$$

$$U_3(t) = U_0 \sin(\omega t + 4\pi/3)$$

Die Summe der drei Spannungen muß konstant null ergeben, was mit einem weiteren Summierer nachgewiesen werden kann. Für die Kreisfrequenz  $\omega = 2\pi f$  gilt:

$$\omega = \frac{\sqrt{3}}{RC} = 0,92 \text{ s}^{-1}$$

Bild 2.7.7.1 zeigt die drei Spannungen  $U_1(t)$ ,  $U_2(t)$  und  $U_3(t)$  als Funktionen der Zeit.

### 3. Lösung mathematischer Probleme

In der Mathematik gibt es viele Anwendungsmöglichkeiten für einen Analogrechner. Er kann addieren, subtrahieren, multiplizieren, dividieren, die Wurzel ziehen und vor allem integrieren. So ist die Lösung unbestimmter Integrale (Kapitel 3.2) eine wichtige Anwendung. Es lassen sich Polynome (Kapitel 3.3) bilden und Additionstheoreme für sinus und cosinus (Kapitel 3.7) nachweisen.

Neben diesen Beispielen, in denen nur die normalen Rechenoperationen Verwendung finden, gibt es noch eine zweite und viel wichtigere Gruppe von Anwendungen für den Analogrechner: die simultane Lösung von Gleichungssystemen und gewöhnlichen Differentialgleichungen (Kapitel 3.4 bis 3.6) zu vorgegebenen Anfangsbedingungen. Ein solches System sich gegenseitig bestimmender Funktionen ist z. B. auch:

$$y(t) = f_1(x, t) \text{ und } x(t) = f_2(y, t)$$

Werden beide Funktionen programmiert derart, daß das Ausgangssignal  $y$  des ersten Programmes als Eingangssignal des zweiten dient und das Ausgangssignal  $x$  des zweiten Programmes wiederum als Eingangssignal des ersten, so löst der Analogrechner dieses Gleichungssystem simultan, und die Ausgangssignale  $x$ ,  $y$  sind zu jeder Zeit Lösungen des Systems.

#### 3.1. Lineare Gleichungssysteme

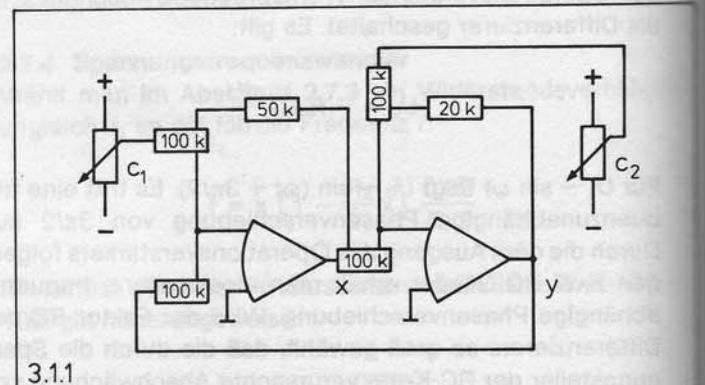
Zur Lösung eines Systems von  $n$  Gleichungen mit  $n$  Unbekannten löst man jede der Gleichungen explizit nach einer anderen der Unbekannten auf und programmiert jede dieser Summen mit einem oder mehreren Operationsverstärkern. Dabei liefern die Ausgänge der einzelnen Summierer erst die zu addierenden Unbekannten. Die so vermaschte Schaltung löst das Gleichungssystem und gibt an

den Ausgängen der einzelnen Operationsverstärker die Werte der Unbekannten. Dabei muß die Verstärkung in geschlossenen Kreisen kleiner als 1 oder negativ sein, damit die Schaltung nicht instabil wird (siehe Abschnitt 3.1.2).

#### 3.1.1 Zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten, feste Koeffizienten

Als Beispiel sei folgendes Gleichungssystem gegeben:

$$\begin{aligned} 2x + y + c_1 &= 0 \\ x + 5y + c_2 &= 0 \end{aligned}$$



Am linken Operationsverstärker wird entsprechend der oberen Gleichung als Summe gebildet:

$$x = -\frac{1}{2}(y + c_1)$$

Am rechten Operationsverstärker wird entsprechend der unteren Gleichung gebildet:

$$y = -\frac{1}{5}(x + c_2)$$

Die Ausgangssignale  $x$  und  $y$  sind für alle  $c_1$  und  $c_2$  mit  $-1 \leq c_1 \leq +1$  und  $-1 \leq c_2 \leq +1$  Lösungen des Gleichungssystems und es gilt  $|x| \leq 1$  und  $|y| \leq 1$ . Mit  $c_1 = -0,7$  und  $c_2 = 1$  folgt z. B.  $x = 0,5$  und  $y = -0,3$ .

#### 3.1.2 Instabile Schaltung

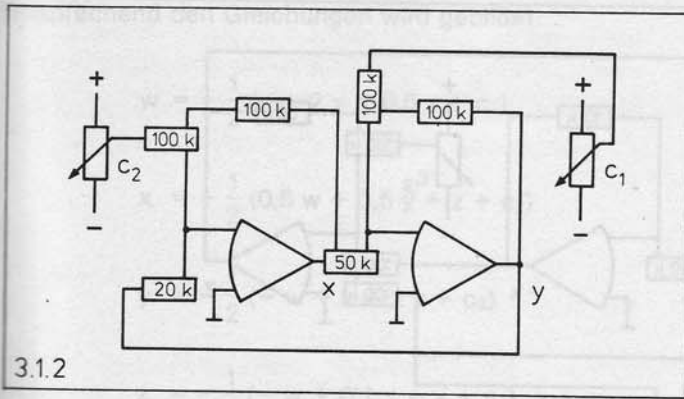
Zur Lösung des im Abschnitt 3.1.1 angegebenen Gleichungssystems könnte man auch die hier im Schaltplan 3.1.2 angegebene Schaltung versuchen. Am linken Operationsverstärker wird entsprechend der unteren Gleichung des Systems aus Abschnitt 3.1.1 gebildet:

$$x = -(5y + c_2)$$

am rechten:

$$y = -(2x + c_1)$$

Diese Schaltung ist jedoch instabil, da die Verstärkung im geschlossenen Kreis größer als 1 ist.



Im Bild 3.1.3.1 sind in der xy-Ebene Lösungspaare als Kreise eingezeichnet

1. an Kreuzungspunkten gestrichelter Linien mit  $a_1 = 2, b_2 = 1, b_1 = -0,5, a_2 = -1$   $c_1$  und  $c_2$  variabel, wie an gestrichelten Linien angegeben (ausgewählte Werte).
2. auf ausgezogenen Linien mit:  $a_1 = 2, b_2 = 1,$   $c_1$  und  $c_2$  wie am Kreuzungspunkt der ausgezogenen Linien  $b_1$  oder  $a_2$  variabel, wie an gepunkteten Linien angegeben (ausgewählte Werte).

### 3.1.3 Zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten, variable Koeffizienten

Als Beispiel sei folgendes Gleichungssystem gegeben:

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

Im Schaltplan wird gebildet:

$$x = -\frac{1}{a_1}(b_1y + c_1)$$

$$y = -\frac{1}{b_2}(a_2x + c_2)$$

### 3.1.4 Drei Gleichungen mit drei Unbekannten

Als Beispiel sei folgendes Gleichungssystem gegeben:

$$5x + 0,5y + z + c_1 = 0$$

$$2x + y + 0,5z + c_2 = 0$$

$$-x + y + 2z + c_3 = 0$$

Entsprechend der ersten Gleichung wird gebildet:

$$x = -\frac{1}{5}(0,5y + z + c_1)$$

Entsprechend der zweiten Gleichung wird gebildet:

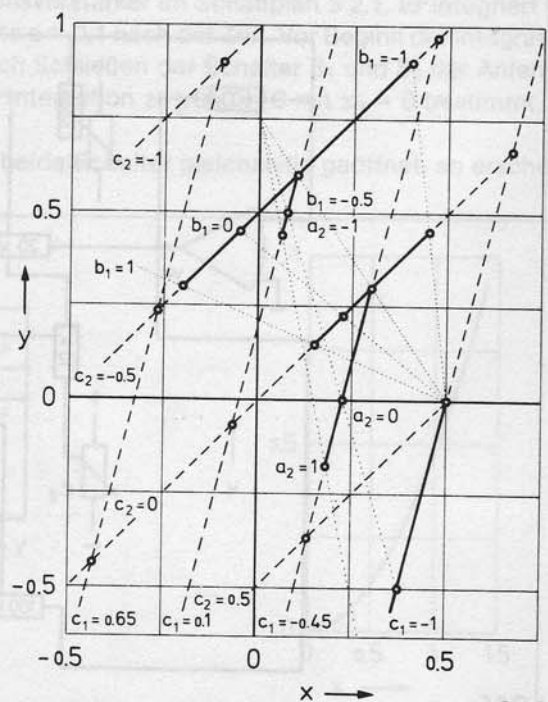
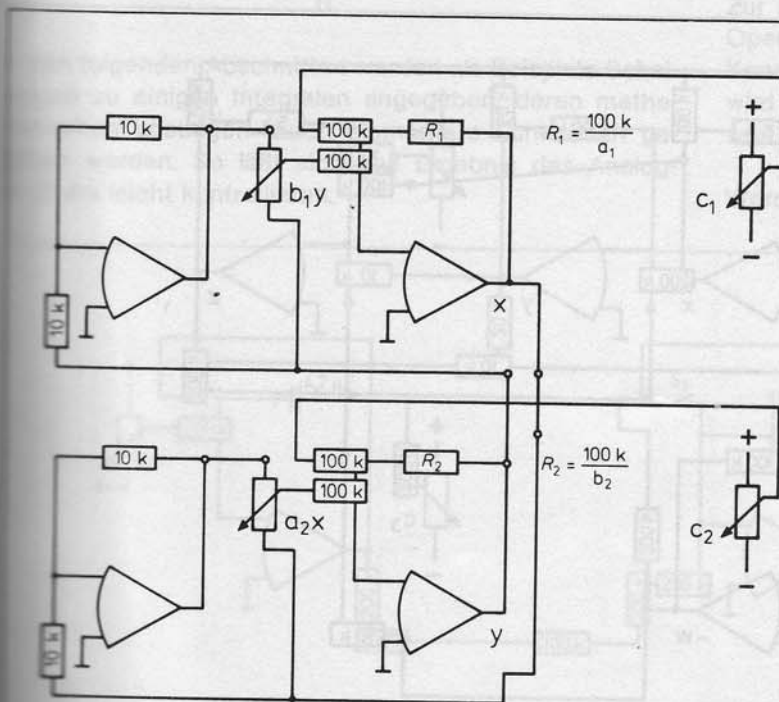
$$y = -(2x + 0,5z + c_2)$$

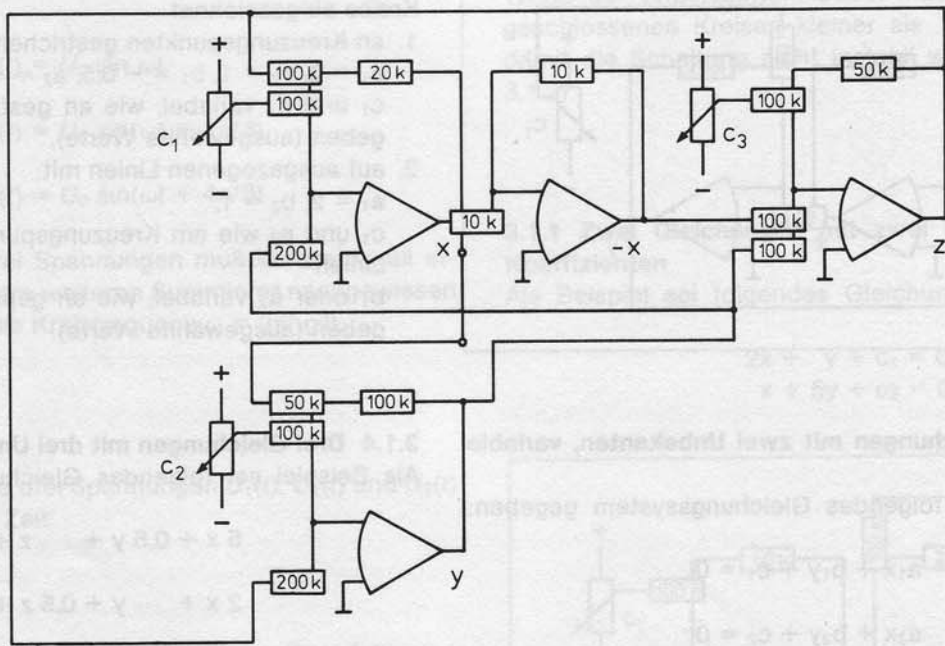
Entsprechend der dritten Gleichung wird gebildet:

$$z = -\frac{1}{2}(-x + y + c_3)$$

mit:  $a_1 = 100 \text{ k}\Omega/R_1 > 0, |b_1| \leq 1, |c_1| \leq 1, |a_2| \leq 1,$   
 $b_2 = 100 \text{ k}\Omega/R_2 > 0$  und  $|c_2| \leq 1.$

Je nach Wahl der Koeffizienten kann die Schaltung stabil oder instabil oder einer der Verstärker übersteuert sein. Die Schaltung ist stabil, wenn gilt:  $a_2b_1/a_1b_2 < 1.$





3.1.4

Die Konstanten  $c_1$ ,  $c_2$  und  $c_3$  können nicht ganz frei gewählt werden, es wird sonst der eine oder andere Operationsverstärker übersteuert werden. Mit  $c_1 = 0,7$ ,  $c_2 = -0,9$  und  $c_3 = 0,3$  ist z. B. der Verstärker für  $y$  übersteuert.

Mit  $c_1 = -0,8$ ,  $c_2 = -0,9$  und  $c_3 = 0,6$  folgt als Lösung:  $x = 0,2$ ,  $y = 0,8$  und  $z = -0,6$ .

### 3.1.5 Vier Gleichungen mit vier Unbekannten

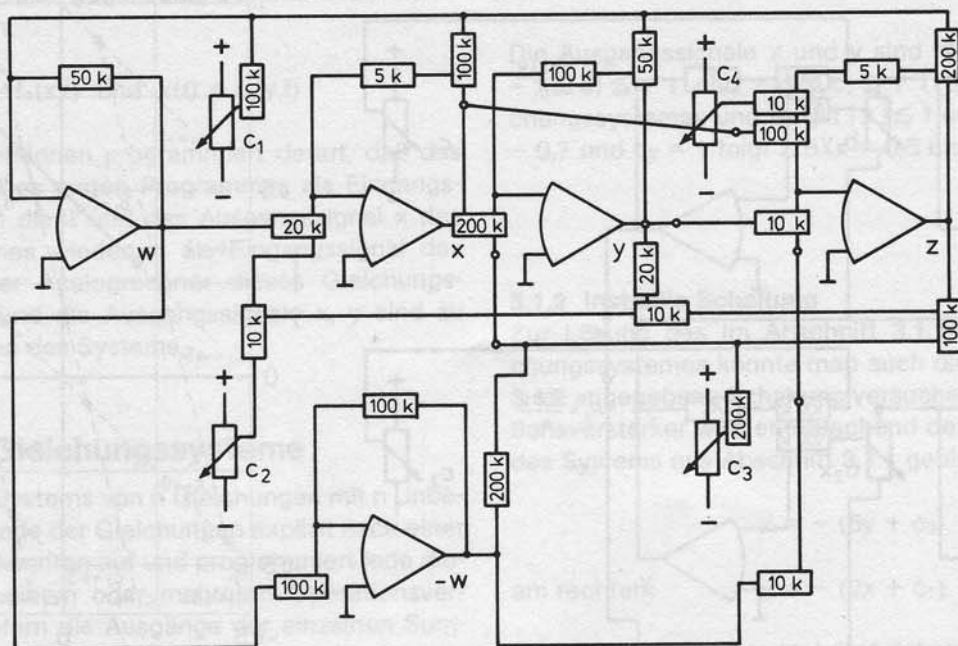
Als Beispiel sei folgendes Gleichungssystem gegeben

$$2w + x + 2y + 0,5z + c_1 = 0$$

$$0,5w + 2x + 0,5y + z + c_2 = 0$$

$$-w + x + 2y + 2z + c_3 = 0$$

$$-w + 0,1x + y + 2z + c_4 = 0$$



3.1.5

Entsprechend den Gleichungen wird gebildet:

$$w = -\frac{1}{2}(x + 2y + 0,5z + c_1)$$

$$x = -\frac{1}{2}(0,5w + 0,5y + z + c_2)$$

$$y = -\frac{1}{2}(-w + x + 2z + c_3)$$

$$z = -\frac{1}{2}(-w + 0,1x + y + c_4)$$

Die Konstanten  $c_1, c_2, c_3$  und  $c_4$  können nicht beliebig variiert werden, da sonst gelegentlich der eine oder andere Operationsverstärker übersteuert wird. Mit  $c_1 = -0,9, c_2 = 1, c_3 = -0,3, c_4 = -0,9$  erhält man als Lösung:  $w = 0,5, x = -1, y = 0,3$  und  $z = 0,6$ .

Schaltungen für vier Gleichungen mit vier Unbekannten werden leicht instabil, besonders dann, wenn am einzelnen Operationsverstärker nicht genügend abgeschwächt wird. Die Verstärkung der Schwankung einer jeden Variablen muß kleiner als 1 sein.

### 3.2. Elementare Integrale

Die Lösung von unbestimmten Integralen ist ein wichtiges Anwendungsgebiet eines Analogrechners. Im Abschnitt 2.1.6 wird mit einem Operationsverstärker gebildet:

$$y(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t y_1(t) dt + y(0)$$

In den folgenden Abschnitten werden als Beispiele Schaltungen zu einigen Integralen angegeben, deren mathematischen Lösungen durch elementare Funktionen gegeben werden. So läßt sich das Ergebnis des Analogrechners leicht kontrollieren.

Ein Analogrechner kann nur mit der Zeit integrieren. Soll die Zeit als unabhängige Variable ersetzt werden durch z. B.  $x = t/\alpha$ , so erscheint am Ausgang eines Integrierers (vergleiche Abschnitt 2.1.6):

$$y(x) = -\frac{\alpha}{RC} \int_0^x y_1(x) dx + y(0)$$

Der Faktor  $\alpha$  wird hier so gewählt, daß der interessierende Bereich von  $x$  einer gut darstellbaren Zeit entspricht, z. B. 10 s für Registrierung mit TY-Schreiber oder 10 ms für Wiedergabe auf einem Oszilloskop (siehe Kapitel 6.2).

#### 3.2.1 Lösung des Integrals $y = \int x dx$

Um am Ausgang eines Integrierers das unbestimmte Integral

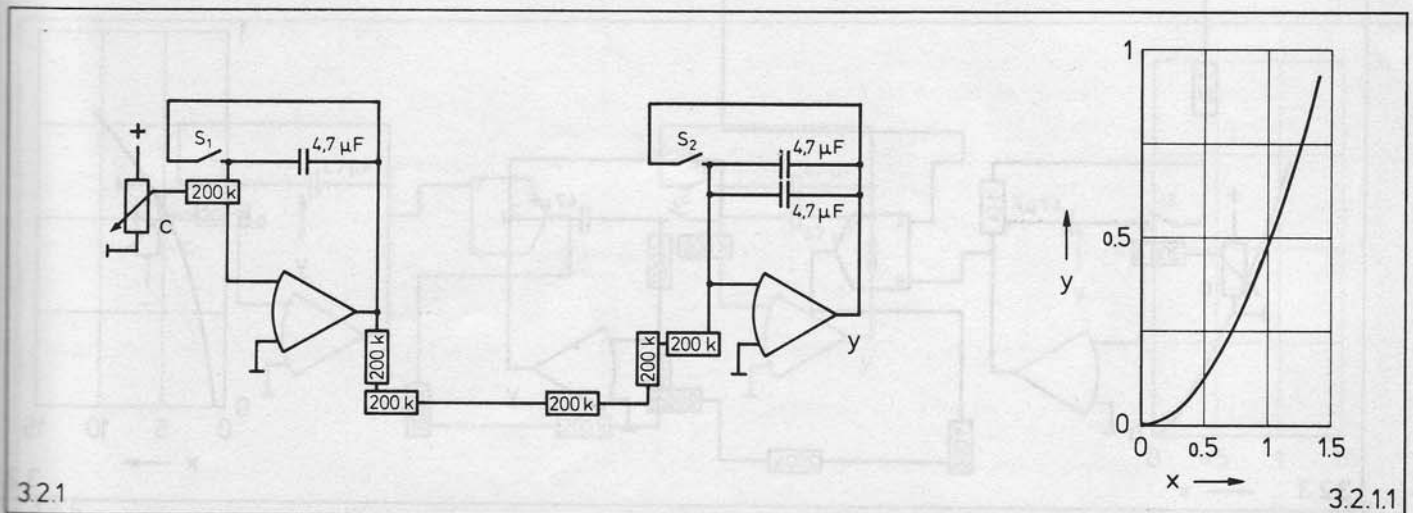
$$y(x) = \int_0^x x dx$$

zu erhalten, setzt man  $x = t/\alpha$  mit  $\alpha = 10$  s (entsprechend Vorbemerkung zu Kapitel 3.2), führt dem Integrierer am Eingang die Funktion  $y_1(x) = -x$  zu und berechnet:

$$y(x) = -\frac{1}{\alpha} \int_0^x (-x) dt, \quad \text{mit } x = \frac{t}{10 \text{ s}}$$

Zur Erzeugung der Funktion  $y_1(x) = -x$  dient der linke Operationsverstärker im Schaltplan 3.2.1. Er integriert die Konstante  $c = 0,1$  nach der Zeit. Vor Beginn der Integration wird durch Schließen der Schalter  $S_1$  und  $S_2$  der Anfangswert der Integration zu  $y(x_0) = 0$  mit  $x_0 = 0$  bestimmt.

Werden beide Schalter gleichzeitig geöffnet, so erscheint



3.2.1

3.2.1.1

am linken Operationsverstärker

$$-x = -\frac{t}{10 \text{ s}}$$

und am rechten ( $RC = 10 \text{ s}$ ):

$$y(x) = -\frac{1}{RC} \int_0^x (-x) dt = \int_0^x x dx = \frac{1}{2} x^2$$

Da die Zeitkonstante am linken Operationsverstärker nicht genau 1 s und am rechten nicht genau 10 s ist, erhält man das beste Ergebnis für  $c = 0,0885$ . Bild 3.2.1.1 zeigt die Lösung für  $x \leq 1$ .

### 3.2.2 Lösung des Integrals $y = -\int x^2 dx$

Setzt man  $x = t/\alpha$  mit  $\alpha = 10 \text{ s}$ , so ist zu berechnen:

$$y(x) = -\frac{1}{\alpha} \int_0^x x^2 dt, \quad \text{mit } x = \frac{t}{10 \text{ s}}$$

Vor Beginn der Integration wird durch Schließen der Schalter  $S_1$  und  $S_2$  der Anfangswert zu  $y(x_0) = 0$  mit  $x_0 = 0$  gewählt. Werden beide Schalter gleichzeitig geöffnet, so wird am linken Operationsverstärker gebildet mit  $c = 1/10$

$$x = \frac{t}{10 \text{ s}}$$

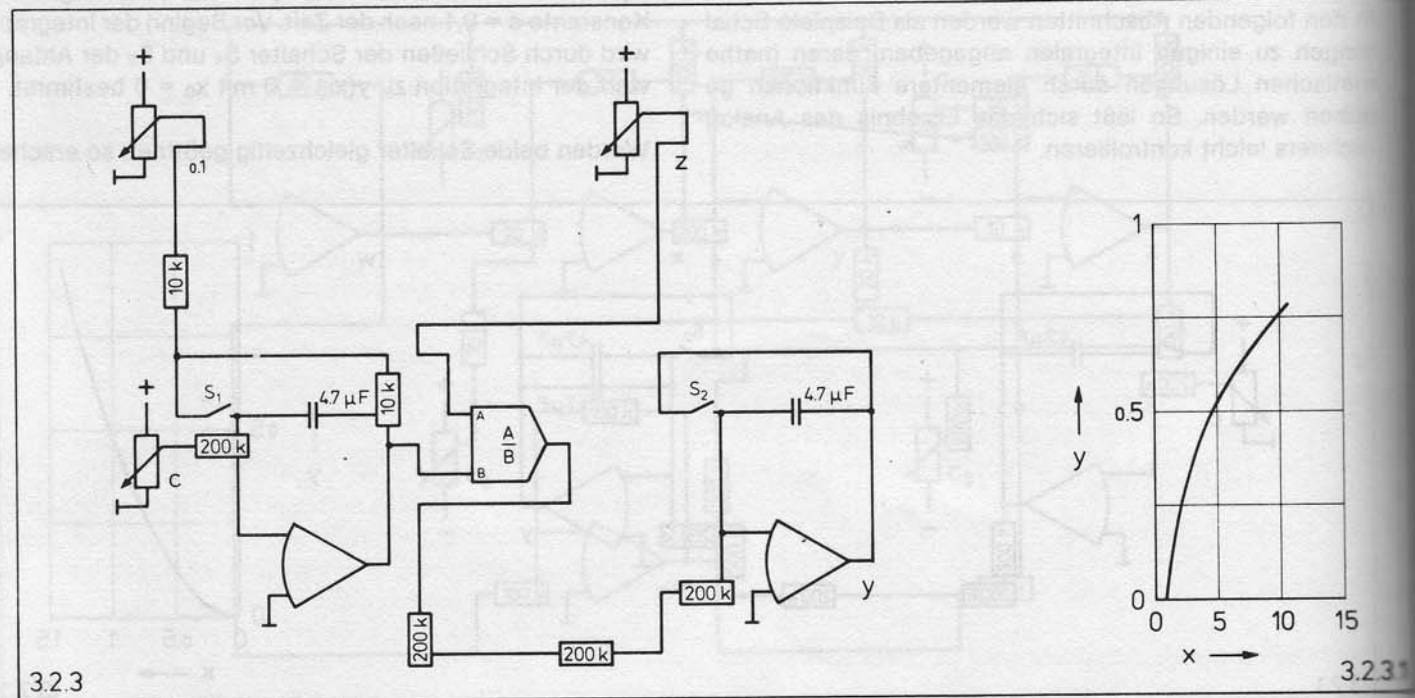
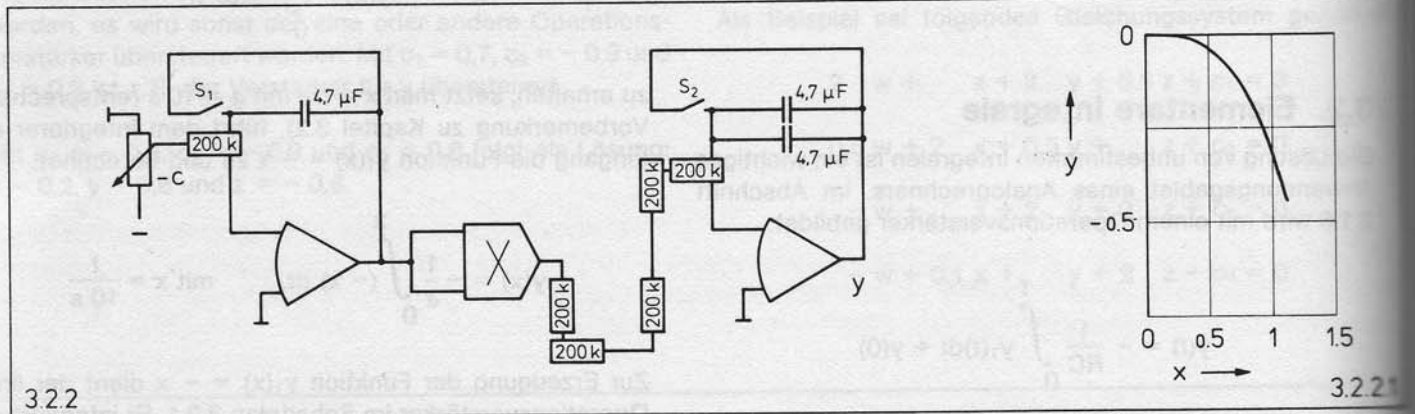
am Multiplizierer erscheint:

$$x^2 = \frac{t^2}{100 \text{ s}^2}$$

und der rechte Operationsverstärker liefert ( $RC = 10 \text{ s}$ )

$$y(x) = -\frac{1}{RC} \int_0^x x^2 dt = -\int_0^x x^2 dx = -\frac{1}{3} x^3$$

Da die Zeitkonstante am linken Operationsverstärker nicht genau 1 s und am rechten nicht genau 10 s ist, erhält man das beste Ergebnis für  $c = 0,091$ . Bild 3.2.2.1 zeigt die Lösung  $y(x)$  für  $x \leq 1$ .





### 3.2.3 Lösung des Integrals $y = \frac{1}{3} \int \frac{1}{x} dx$

Setzt man  $x = t/\alpha$  mit  $\alpha = 1$  s und führt dem Integrierer am Eingang die Funktion  $-1/x$  zu, so ist zu berechnen:

$$y(x) = -\frac{1}{3\alpha} \int_1^x \left(-\frac{1}{x}\right) dt, \quad \text{mit } x = \frac{t}{1 \text{ s}}$$

Vor Beginn der Integration wird durch Schließen der Schalter  $S_1$  und  $S_2$  der Anfangswert zu  $y(x_0) = 0$  mit  $x_0 = 1$  gewählt. Werden beide Schalter gleichzeitig geöffnet, so erscheint am linken Operationsverstärker mit  $c = 1/10$ :

$$-\frac{1}{10} x = -\frac{t}{10 \text{ s}}$$

am Dividierer mit  $z = 1/10$ :

$$-\frac{1}{x} = -\frac{1}{10} \frac{10}{x} = -\frac{1 \text{ s}}{t}$$

und am rechten Operationsverstärker mit  $RC = 3$  s:

$$y(x) = -\frac{1}{RC} \int_1^x \left(-\frac{1}{x}\right) dt = \frac{1}{3} \int_1^x \frac{1}{x} dx = -\frac{1}{3} \ln x$$

Da die Zeitkonstante am linken Operationsverstärker nicht genau 1 s und am rechten nicht genau 3 s ist, erhält man das beste Ergebnis für  $c = 0,094$  und  $z = 0,094$ . Bild 3.2.3.1 zeigt die Lösung  $y(x)$  für  $1 \leq x \leq 10$ .

### 3.2.4 Lösung des Integrals $y = \int \sqrt{x} dx$

Setzt man  $x = t/\alpha$  mit  $\alpha = 10$  s und führt dem Integrierer am Eingang die Funktion  $-\sqrt{x}$  zu, so ist zu berechnen:

$$y(x) = -\frac{1}{\alpha} \int_0^x \left(-\sqrt{x}\right) dt, \quad \text{mit } x = \frac{t}{10 \text{ s}}$$

Vor Beginn der Integration wird durch Schließen der Schalter  $S_1$  und  $S_2$  der Anfangswert zu  $y(x_0) = 0$  mit  $x_0 = 0$  gewählt. Werden beide Schalter gleichzeitig geöffnet, so erscheint am linken Operationsverstärker mit  $c = 1/10$ :

$$x = \frac{t}{10 \text{ s}}$$

am Radizierer:

$$-\sqrt{x} = -\sqrt{\frac{t}{10 \text{ s}}}$$

und am rechten Operationsverstärker mit  $RC = 10$  s:

$$y(x) = -\frac{1}{RC} \int_0^x \left(-\sqrt{x}\right) dt = \int_0^x \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x \sqrt{x}$$

Da die Zeitkonstante am linken Operationsverstärker nicht genau 1 s und am rechten nicht genau 10 s ist, erhält man das beste Ergebnis für  $c = 0,083$ . Bild 3.2.4.1 zeigt die Lösung  $y(x)$  für  $x \leq 1$ .

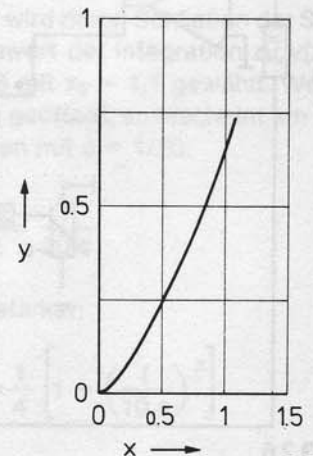
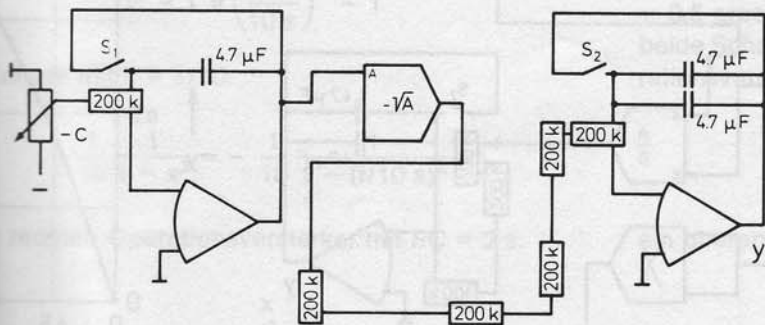
### 3.2.5 Lösung des Integrals $y = -a \int \cos \omega t dt$

Bei geöffnetem Schalter S gilt entsprechend Abschnitt 2.1.6:

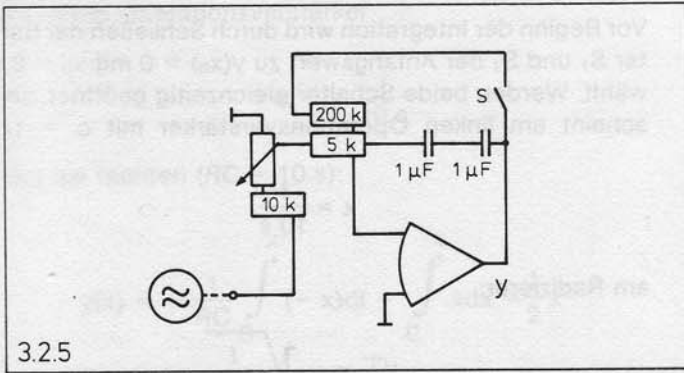
$$y(t) = -a \int_0^t \cos \omega t dt + y(0)$$

$$= -\frac{a}{\omega} \sin \omega t + y(0)$$

mit  $a = 1/RC = 400 \text{ s}^{-1}$ . Die Zeitfunktion  $\cos \omega t$  kann man einem RC-Oszillator (58700) entnehmen. Es ist darauf zu achten, daß die Eingangsspannung des Operationsverstärkers  $\pm 15$  V nicht überschreiten darf.



3.2.4.1



Vor Beginn der Integration wird durch Schließen der Schalter  $S_1$  und  $S_2$  der Anfangswert zu  $y(x_0) = 0$  mit  $x_0 = 0$  gewählt. Werden beide Schalter gleichzeitig geöffnet, so erscheint am mittlerem Operationsverstärker mit  $c = 1/20$ :

$$\frac{1}{2} x = \frac{t}{20 \text{ s}}$$

am linken Operationsverstärker:

$$-\frac{1}{4}(1+x^2) = -\left[\frac{1}{4} + \left(\frac{t}{20 \text{ s}}\right)^2\right]$$

am Dividierer mit  $z = 1/8$ :

$$-\frac{1}{2(1+x^2)} = -\frac{1}{2[1+(t/20 \text{ s})^2]}$$

und am rechten Operationsverstärker mit  $RC = 5 \text{ s}$ :

$$y(x) = -\frac{1}{RC} \int_0^x \left(-\frac{1}{2(1+x^2)}\right) dt$$

$$= \int_0^x \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x$$

Auf einem Ein- oder Zweikanal-Oszilloskop lassen sich bei Triggerung mit dem Eingangssignal die Phasenverschiebung und das Amplitudenverhältnis von Ausgangs- und Eingangssignal des Integrierers gut beobachten. Für  $\omega = a$  sind beide Amplituden gleich, d.h. hier bei  $\omega = 400 \text{ s}^{-1}$ , bzw. bei einer Frequenz von  $f = 64 \text{ Hz}$ . Bei kleineren Frequenzen wird die Ausgangsamplitude größer.

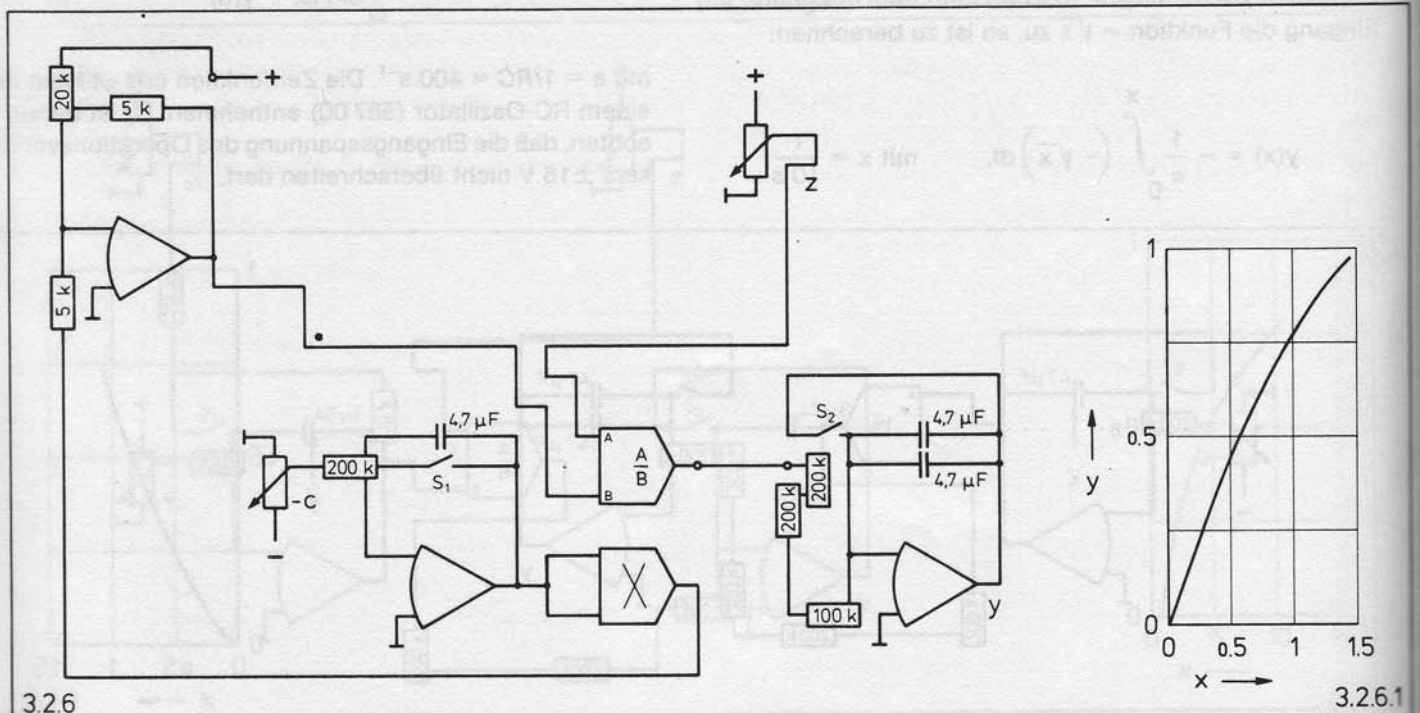
Der konstante Wert  $y(0)$  kann sich als Folge der Drift des Operationsverstärkers langsam ändern. Mit Schließen des Schalters  $S$  wird  $y(0) = 0$  gesetzt. Durch den zusätzlichen (zwar großen) Widerstand in der Rückführung tritt jedoch ein (für die genannten Frequenzen) kleiner Fehler in Amplitude ( $< 0,05\%$ ) und Phase ( $< 0,5\%$ ) auf.

### 3.2.6 Lösung des Integrals $y = \int \frac{1}{1+x^2} dx$

Setzt man  $x = t/\alpha$  mit  $\alpha = 10 \text{ s}$  und führt dem Integrierer am Eingang die Funktion  $-1/(1+x^2)$  zu, so ist zu berechnen:

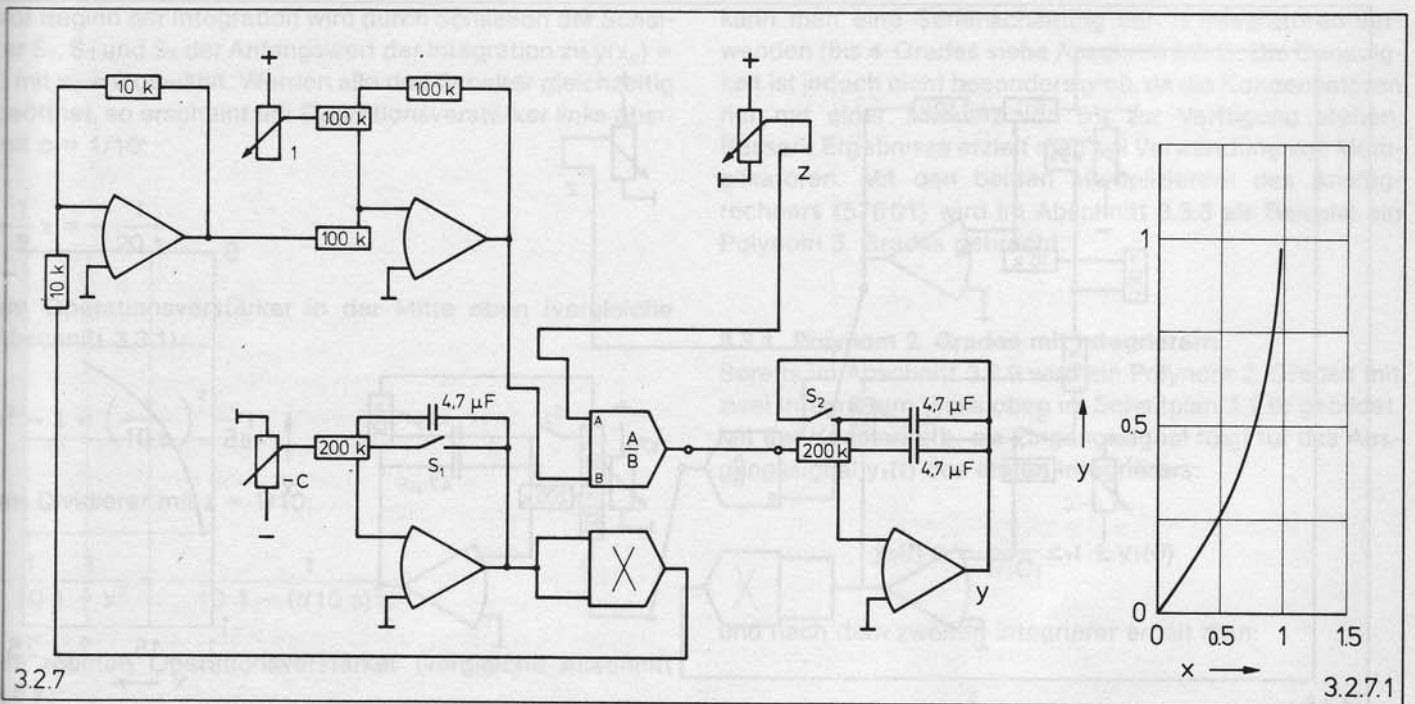
$$y(x) = -\frac{1}{\alpha} \int_0^x \left(-\frac{1}{1+x^2}\right) dt, \quad \text{mit } x = \frac{t}{10 \text{ s}}$$

Da die Zeitkonstante am mittleren Operationsverstärker nicht genau  $1 \text{ s}$  und am rechten nicht genau  $5 \text{ s}$  ist, erhält man das beste Ergebnis für  $c = 0,047$  und  $z = 0,1175$ . Bild 3.2.6.1 zeigt die Lösung  $y(x)$  für  $x < 1,5$ .



3.2.6

3.2.6.1



3.2.7

3.2.7.1

### 3.2.7 Lösung des Integrals $y = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-x^2} dx, x < 1$

Setzt man  $x = t/\alpha$  mit  $\alpha = 10$  s und führt dem Integrierer am Eingang die Funktion  $-1/(1-x^2)$  zu, so ist zu berechnen:

$$y(x) = -\frac{1}{2\alpha} \int_0^x \frac{1}{x^2-1} dt, \quad \text{mit } x = \frac{t}{10 \text{ s}}$$

Vor Beginn der Integration wird durch Schließen der Schalter  $S_1$  und  $S_2$  der Anfangswert zu  $y(x_0) = 0$  mit  $x_0 = 0$  gewählt. Werden beide Schalter gleichzeitig geöffnet, so wird gebildet am Operationsverstärker unten in der Mitte mit  $c = 1/10$ :

$$x = \frac{t}{10 \text{ s}}$$

am Operationsverstärker oben in der Mitte:

$$x^2 - 1 = \left(\frac{t}{10 \text{ s}}\right)^2 - 1$$

am Dividierer mit  $z = 1/10$ :

$$-\frac{1}{10} \frac{1}{1-x^2} = -\frac{1}{10} \frac{1}{1-(t/10 \text{ s})^2}$$

und am rechten Operationsverstärker mit  $RC = 2$  s:

$$y(x) = -\frac{1}{RC} \int_0^x \frac{1}{10} \frac{1}{x^2-1} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^x \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arctgh} x$$

Da die Zeitkonstante am ersten Operationsverstärker nicht genau 1 s und am letzten nicht genau 2 s ist, erhält man das beste Ergebnis für  $c = 0,094$  und  $z = 0,094$ . Bild 3.2.7.1 zeigt die Lösung  $y(x)$  für  $x < 1$ .

### 3.2.8 Lösung des Integrals $y = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2-1} dx, x > 1$

Setzt man  $x = t/\alpha$  mit  $\alpha = 10$  s, so ist zu berechnen:

$$y(x) = -\frac{1}{2\alpha} \int_{1,1}^x \frac{1}{1-x^2} dt, \quad \text{mit } x = \frac{t}{10 \text{ s}}$$

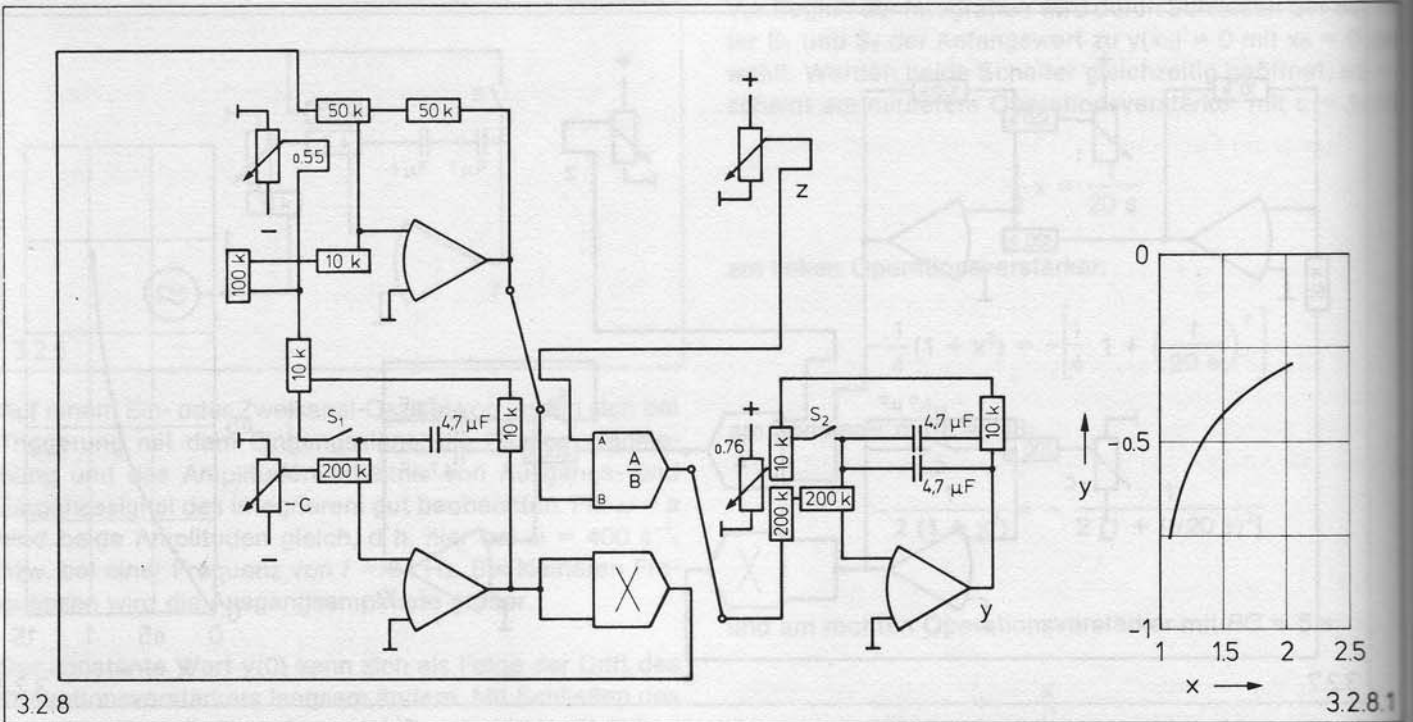
Vor Beginn der Integration wird durch Schließen der Schalter  $S_1$  und  $S_2$  der Anfangswert der Integration zu  $y(x_0) = -0,5 \operatorname{arctgh} x_0 = -0,76$  mit  $x_0 = 1,1$  gewählt. Werden beide Schalter gleichzeitig geöffnet, so erscheint am Operationsverstärker links unten mit  $c = 1/20$ :

$$\frac{x}{2} = \frac{t}{20 \text{ s}}$$

am oberen Operationsverstärker:

$$\frac{1}{4}(1-x^2) = \frac{1}{4} \left[ 1 - \left(\frac{t}{10 \text{ s}}\right)^2 \right]$$

am Dividierer mit  $z = 1/20$ :



$$\frac{1}{5} \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{5} \frac{1}{1-(t/10 \text{ s})^2}$$

und am rechten Operationsverstärker mit  $RC = 4 \text{ s}$ :

$$y(x) = -\frac{1}{RC} \int_{1,1}^x \frac{1}{5} \frac{1}{1-x^2} dt - 0,76$$

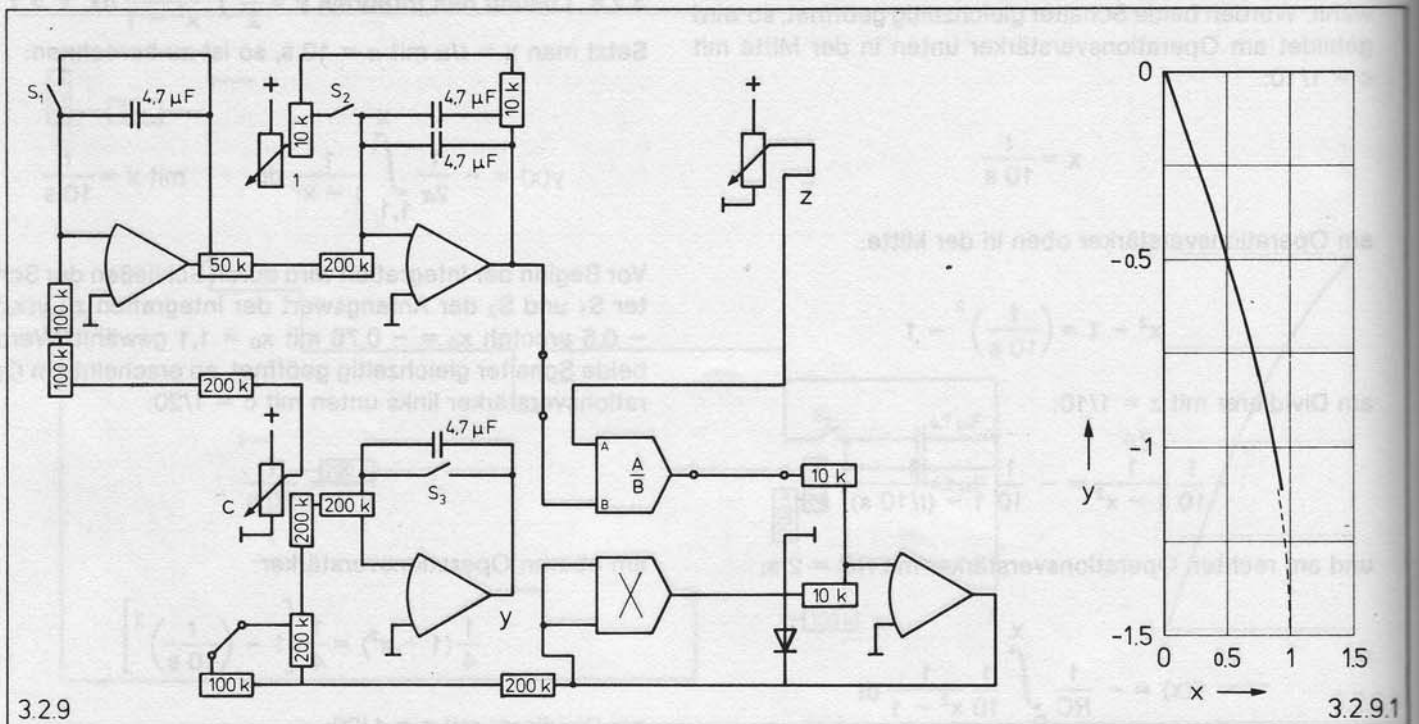
$$= \frac{1}{2} \int_{1,1}^x \frac{1}{x^2-1} dx - 0,76 = -\frac{1}{2} \operatorname{arccth} x$$

Da die Zeitkonstante am ersten Operationsverstärker nicht genau 1 s und am letzten nicht genau 4 s ist, erhält man das beste Ergebnis für  $c = 0,047$  und  $z = 0,047$ . Bild 3.2.8.1 zeigt die Lösung  $y(x)$  für  $1,1 \leq x \leq 2$ .

**3.2.9 Lösung des Integrals  $y = - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx, x < 1$**

Setzt man  $x = t/\alpha$  mit  $\alpha = 10 \text{ s}$ , so ist zu berechnen:

$$y(x) = -\frac{1}{\alpha} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dt, \quad \text{mit } x = \frac{t}{10 \text{ s}}$$



Vor Beginn der Integration wird durch Schließen der Schalter  $S_1$ ,  $S_2$  und  $S_3$  der Anfangswert der Integration zu  $y(x_0) = 0$  mit  $x_0 = 0$  gewählt. Werden alle drei Schalter gleichzeitig geöffnet, so erscheint am Operationsverstärker links oben mit  $c = 1/10$ :

$$-\frac{1}{2}x = -\frac{t}{20 \text{ s}}$$

am Operationsverstärker in der Mitte oben (vergleiche Abschnitt 3.3.1):

$$x^2 - 1 = \left(\frac{t}{10 \text{ s}}\right)^2 - 1$$

am Dividierer mit  $z = 1/10$ :

$$-\frac{1}{10} \frac{1}{1-x^2} = -\frac{1}{10} \frac{1}{1-(t/10 \text{ s})^2}$$

am rechten Operationsverstärker (vergleiche Abschnitt 2.3.1):

$$\sqrt{\frac{1}{10} \frac{1}{1-x^2}} = \sqrt{\frac{1}{10} \frac{1}{1-(t/10 \text{ s})^2}}$$

und am Operationsverstärker in der Mitte unten mit  $RC = \sqrt{10} \text{ s}$ :

$$y(x) = -\frac{1}{RC} \int_0^x \sqrt{\frac{1}{10} \frac{1}{1-x^2}} dt$$

$$= -\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\arcsin x$$

Da die Zeitkonstante am ersten Operationsverstärker nicht genau 2 s und am zweiten nicht genau 2,5 s ist, erhält man das beste Ergebnis für  $c = 0,0885$ . Bild 3.2.9.1 zeigt die Lösung  $y(x)$  für  $x < 1$ .

### 3.3. Polynome

Im Kapitel 3.2 wird zur Erzeugung einer mit der Zeit zunehmenden Variablen  $x = t/\alpha$  ein Integrierer verwendet, dem am Eingang ein konstanter Wert  $c$  zugeführt wird. So erhält man ein Polynom 1. Grades. Im Abschnitt 3.2.9 werden zur Erzeugung der Funktion  $x^2 - 1$  (ein Polynom 2. Grades) zwei hintereinander geschaltete Integratoren verwendet (siehe auch Abschnitt 3.3.1).

Zur Erzeugung eines Polynomes n-ten Grades  $y(x)$  mit

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

kann man eine Serienschaltung von  $n$  Integratoren verwenden (bis 4. Grades siehe Abschnitt 3.3.2). Die Genauigkeit ist jedoch nicht besonders groß, da die Kondensatoren nur mit einer Toleranz von 5% zur Verfügung stehen. Bessere Ergebnisse erzielt man bei Verwendung von Multiplikatoren. Mit den beiden Multiplizierern des Analogrechners (57601) wird im Abschnitt 3.3.3 als Beispiel ein Polynom 3. Grades gebracht.

#### 3.3.1 Polynom 2. Grades mit Integrierern

Bereits im Abschnitt 3.2.9 wird ein Polynom 2. Grades mit zwei Integratoren (links oben im Schaltplan 3.2.9) gebildet. Mit der Konstante  $c_1$  als Eingangssignal folgt für das Ausgangssignal  $y_1(t)$  des ersten Integrierers:

$$y_1(t) = -\frac{1}{R_1C_1} c_1 t + y_1(0)$$

und nach dem zweiten Integrierer erhält man:

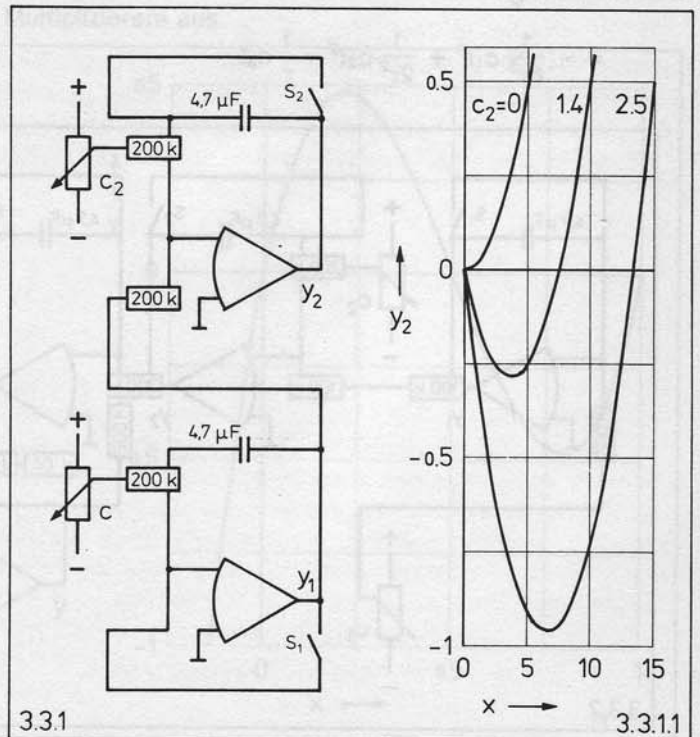
$$y_2(t) = -\frac{1}{R_2C_2} \int_0^t y_1(t) dt + y_2(0)$$

$$= \frac{1}{R_1C_1} \frac{1}{R_2C_2} \frac{1}{2} c_1 t^2 - \frac{1}{R_2C_2} y_1(0) t + y_2(0)$$

Im Abschnitt 3.2.9 gilt:  $y_1(0) = 0$ ,  $y_2(0) = -1$ ,  $c_1 = 0,0885$ ,  $R_1C_1 = 1,88 \text{ s}$ ,  $R_2C_2 = 2,35 \text{ s}$  und  $t = x 10 \text{ s}$ . So folgt:

$$y_2(x) = x^2 - 1$$

Führt man dem zweiten Integrierer neben dem Ausgangssignal des ersten noch ein zweites, konstantes Eingangssignal  $c_2$  zu, so folgt für den Ausgang:



$$y_2(t) = \frac{1}{R_1 C_1} \frac{1}{R_2 C_2} \frac{1}{2} c_1 t^2 - \frac{1}{R_2 C_2} (c_2 + y_1(0)) t + y_2(0)$$

Im Schaltplan 3.3.1 gilt:  $R_1 C_1 = R_2 C_2 = 0,94 \text{ s}$  und  $y_1(0) = y_2(0) = 0$  mit variablen  $c_1$  und  $c_2$ . Es folgt für  $x = t/\alpha$  mit  $\alpha = 1 \text{ s}$ :

$$y_1(x) = -1,064 c_1 x$$

$$y_2(x) = +0,566 c_1 x^2 - 1,064 c_2 x$$

Bild 3.3.1.1 zeigt die mit einem TY-Schreiber registrierten Ausgangssignale  $y_2(x)$  mit  $c_1 = 0,035$  und drei verschiedenen Werten für  $c_2$ .

### 3.3.2 Polynom 4. Grades mit Integrierern

Der Schaltplan 3.3.1 wird um zwei weitere Integrierer erweitert zu Schaltplan 3.3.2, mit dem Polynome bis 4. Grades dargestellt werden können. Die Zeitkonstanten betragen hier alle  $\tau = 0,94 \text{ s}$ , es gilt ferner  $y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = y_4(0) = 0$  und die Konstanten  $c_1$  bis  $c_4$  sind frei wählbar zwischen  $-1$  und  $+1$ . Somit folgt für die Ausgangssignale der vier Integrierer:

$$y_1(t) = -\frac{1}{\tau} \int_0^t c_1 dt = -\frac{1}{\tau} c_1 t$$

$$y_2(t) = -\frac{1}{\tau} \int_0^t (y_1(t) + c_2) dt = +\frac{1}{2\tau^2} c_1 t^2 - \frac{1}{\tau} c_2 t$$

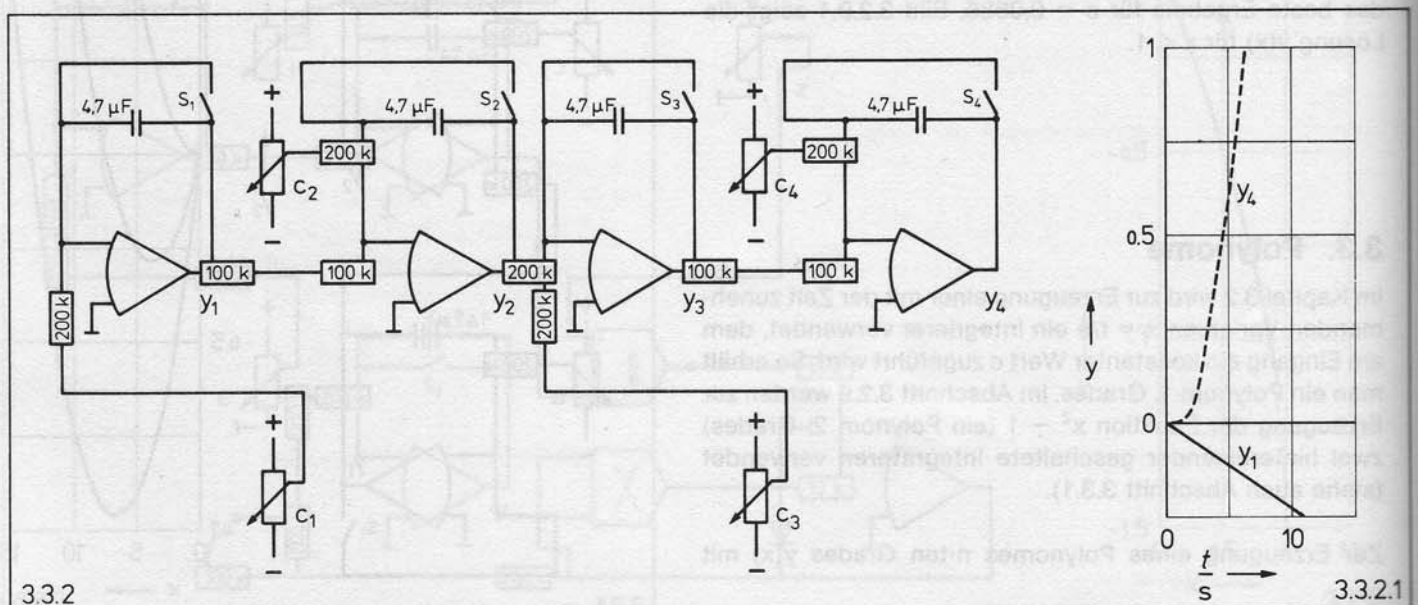
$$y_3(t) = -\frac{1}{\tau} \int_0^t (y_2(t) + c_3) dt = -\frac{1}{6\tau^3} c_1 t^3 + \frac{1}{2\tau^2} c_2 t^2 - \frac{1}{\tau} c_3 t$$

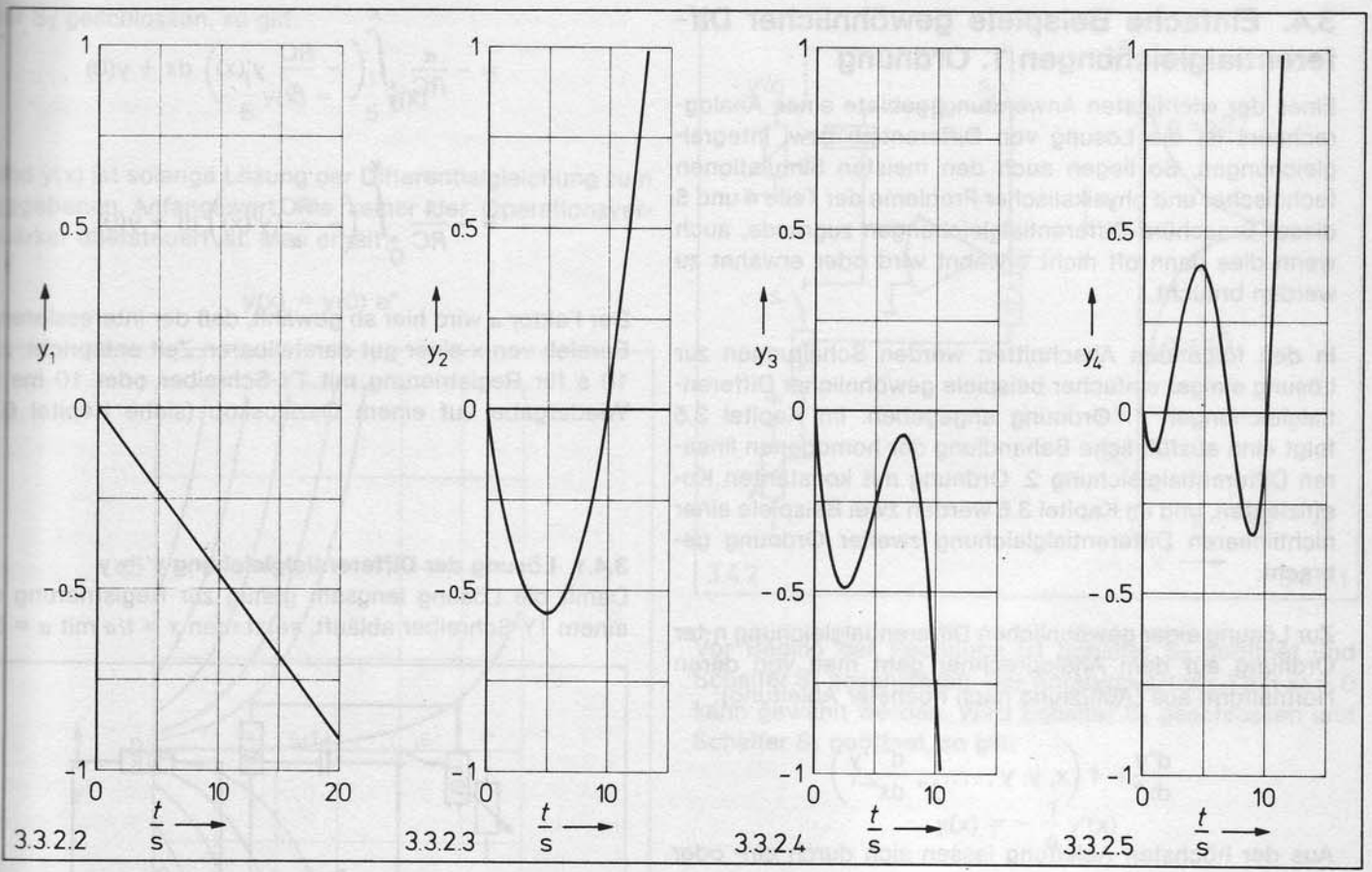
$$y_4(t) = -\frac{1}{\tau} \int_0^t (y_3(t) + c_4) dt = +\frac{1}{24\tau^4} c_1 t^4 - \frac{1}{6\tau^2} c_2 t^3 + \frac{1}{2\tau^2} c_3 t^2 - \frac{1}{\tau} c_4 t$$

Es werden vier Schalter benötigt. Steht der programmierbare Schalter (57607) nicht zur Verfügung, muß man den Satz Steckelemente (57603) ergänzen durch einen Kippschalter (57913). Wählt man jedoch eine der Konstanten  $c = c_m$  zu Null, so kann man am m-ten Integrierer den Schalter durch einen Verbindungsstecker ersetzen, der bereits kurz vor Beginn der Rechnung gelöst werden kann. Zu Beginn der Integration müssen dann alle Schalter gleichzeitig geöffnet werden.

Das Ergebnis kann nur solange den gewünschten Verlauf zeigen, wie keiner der Operationsverstärker übersteuert ist, was bei vierfacher Integration schnell erreicht werden kann. Bild 3.3.2.1 zeigt z. B. für  $c_1 = 0,043$  und  $c_2 = c_3 = c_4 = 0$  die Ausgangsfunktionen  $y_1(t)$  und  $y_4(t)$ . So wird der letzte Verstärker bereits nach etwa 4-6 s übersteuert.

Bilder 3.3.2.2 bis 3.3.2.5 zeigen die Funktionen  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$ ,  $y_3(t)$  und  $y_4(t)$  mit  $c_1 = 0,043$ ,  $c_2 = 0,220$ ,  $c_3 = 0,430$  und  $c_4 = 0,300$ . Da insbesondere die Funktion  $y_4(t)$  sehr stark von  $c_1$  bis  $c_4$  abhängt, empfiehlt es sich, die Konstanten nach Einstellung mit einem Meßinstrument noch fein nachzuregulieren durch ihr mit einem TY-Schreiber registriertes Ausgangssignal. So lassen sich auch Fehler der Kondensatoren und damit der Zeitkonstanten  $\tau$  kompensieren. Mit  $c_1$  muß  $y_1(t)$  im Bild 3.3.2.2 nach 20 s den Wert  $-0,92$  erreichen. Mit  $c_2$  muß  $y_2(t)$  im Bild 3.3.2.3 im Minimum nach etwa 5 s den Wert  $-0,56$  erreichen. Mit  $c_3$  muß  $y_3(t)$  im Bild 3.3.2.4 im Maximum nach etwa 7 s den Wert  $-0,06$  erreichen. Und mit  $c_4$  muß  $y_4(t)$  im Bild 3.3.2.5 im 2. Minimum nach etwa 9 s den Wert  $-0,29$  erreichen. Die im Bild wiedergegebene, mit einem TY-Schreiber registrierte





Kurve weicht geringfügig von dieser Forderung ab (das entspräche  $c_4 = 0,304$  statt  $0,300$ ). Wird mit vier getrennten Kippschaltern gearbeitet, so ist die Kurve als Folge nicht genau definierter Schaltzeiten weit schlechter reproduzierbar.

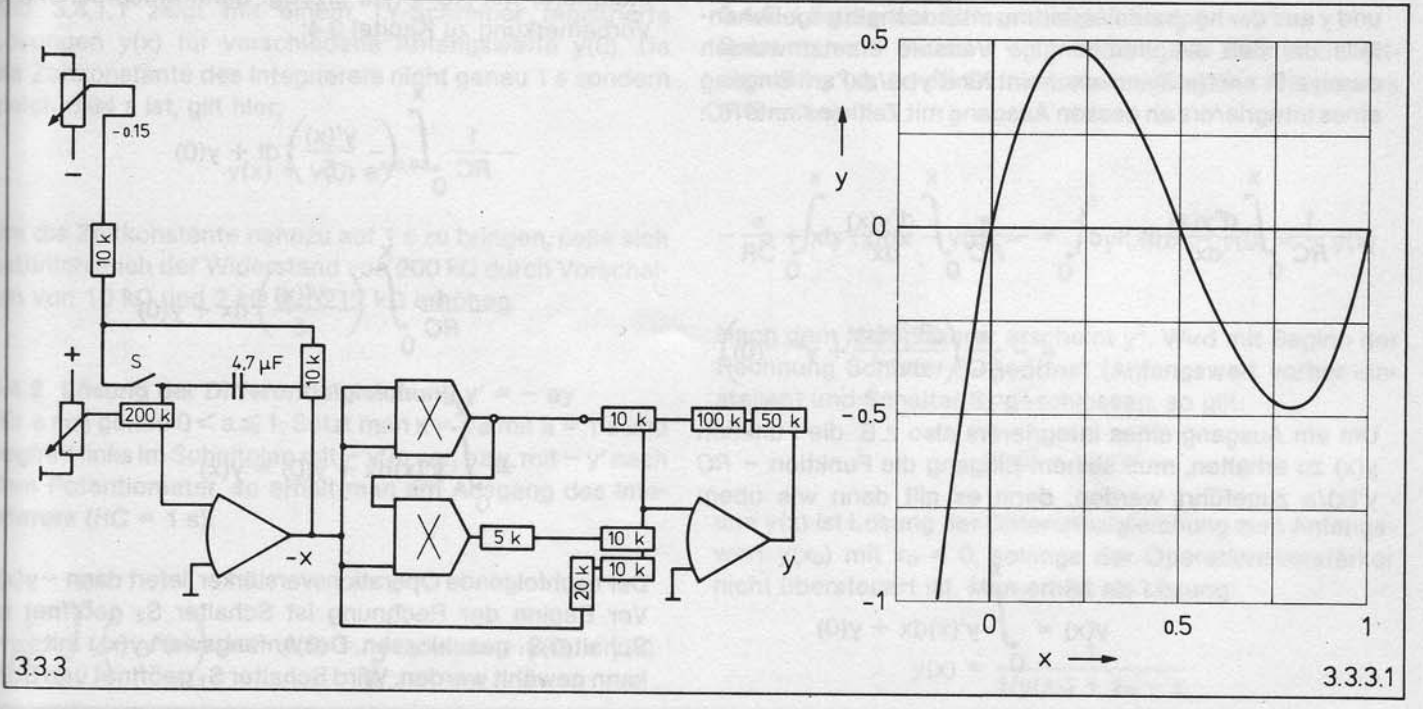
Öffnen des Schalters am linken Operationsverstärker - x gebildet und am rechten Verstärker:

$$y(x) = 10x^3 - 15x^2 + 5x$$

**3.3.3 Polynom 3. Grades mit Multiplizierern**

Setzt man  $x = t/\alpha$  mit  $\alpha = 10$  s, wählt  $c = 0,094$  und bei geschlossenem Schalter S den Anfangswert des Integrierers zur Erzeugung von  $-x$  zu  $-x_0 = 0,15$ , so wird nach dem

Bild 3.3.3.1 zeigt das Ergebnis für  $-0,15 \leq x \leq 1$  registriert mit einem TY-Schreiber. Steht dagegen ein XY-Schreiber zur Verfügung, kann auf die Erzeugung eines der Zeit proportionalen  $x$  mit einem Integrierer verzichtet werden. Zur Vorgabe von  $x$  reicht dann ein Potentiometer vor den Multiplizierern aus.



3.3.3

3.3.3.1

### 3.4. Einfache Beispiele gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung

Eines der wichtigsten Anwendungsgebiete eines Analogrechners ist die Lösung von Differential- bzw. Integralgleichungen. So liegen auch den meisten Simulationen technischer und physikalischer Probleme der Teile 4 und 5 dieser Broschüre Differentialgleichungen zugrunde, auch wenn dies dann oft nicht erwähnt wird oder erwähnt zu werden braucht.

In den folgenden Abschnitten werden Schaltungen zur Lösung einiger einfacher Beispiele gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung angegeben. Im Kapitel 3.5 folgt eine ausführliche Behandlung der homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, und im Kapitel 3.6 werden zwei Beispiele einer nichtlinearen Differentialgleichung zweiter Ordnung gebracht.

Zur Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung n-ter Ordnung auf dem Analogrechner geht man von deren Normalform aus (Auflösung nach höchster Ableitung):

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, y', \dots, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)$$

Aus der höchsten Ableitung lassen sich durch ein- oder mehrmalige Integration die niedrigeren Ableitungen und  $y$  berechnen. Aus diesen Funktionen kann man wiederum entsprechend der Differentialgleichung  $d^n y/dx^n$  erhalten. Durch Schließen des Kreises wird die Differentialgleichung erfüllt und  $y$  ist Lösung der Differentialgleichung (solange kein Operationsverstärker oder Dividierer übersteuert ist). Man erhält jeweils eine Lösung zu vorgegebenen Anfangsbedingungen.

Ein Analogrechner kann jedoch nur nach der Zeit integrieren (vergleiche Vorbemerkung zu Kapitel 3.2 und Abschnitt 2.1.6). Bei der Berechnung der niedrigeren Ableitungen und  $y$  aus der höchsten Ableitung muß deshalb gegebenenfalls die Zeit als unabhängige Variable ersetzt werden durch z. B.  $x = t/\alpha$ . Dann erscheint für  $d^n y(x)/dx^n$  am Eingang eines Integrierers an dessen Ausgang mit Zeitkonstante  $RC$ :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{RC} \int_0^x \frac{d^n y(x)}{dx^n} dt + c &= -\frac{\alpha}{RC} \int_0^x \frac{d^n y(x)}{dx^n} dx + c \\ &= -\frac{\alpha}{RC} \left( \frac{d^{n-1} y(x)}{dx^{n-1}} + y^{(n-1)}(0) \right) \end{aligned}$$

Um am Ausgang eines Integrierers also z. B. die Funktion  $y(x)$  zu erhalten, muß seinem Eingang die Funktion  $-RC y'(x)/\alpha$  zugeführt werden, denn es gilt dann wie oben:

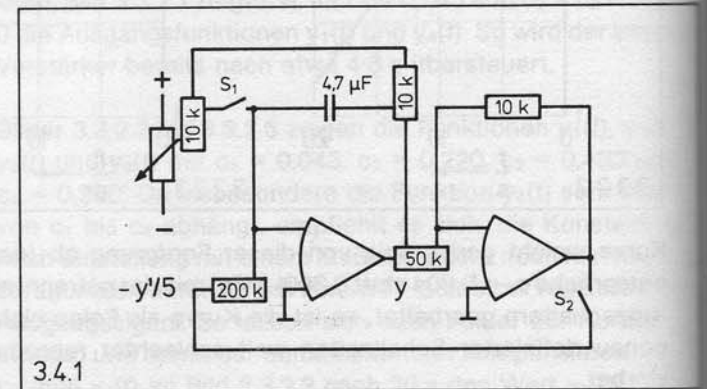
$$y(x) = \int_0^x y'(x) dx + y(0)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{\alpha}{RC} \int_0^x \left( -\frac{RC}{\alpha} y'(x) \right) dx + y(0) \\ &= -\frac{1}{RC} \int_0^x \left( -\frac{RC}{\alpha} y'(x) \right) dt + y(0) \end{aligned}$$

Der Faktor  $\alpha$  wird hier so gewählt, daß der interessierende Bereich von  $x$  einer gut darstellbaren Zeit entspricht, z. B. 10 s für Registrierung mit TY-Schreiber oder 10 ms für Wiedergabe auf einem Oszilloskop (siehe Kapitel 6.2).

#### 3.4.1 Lösung der Differentialgleichung $y' = y$

Damit die Lösung langsam genug zur Registrierung mit einem TY-Schreiber abläuft, setzt man  $x = t/\alpha$  mit  $\alpha = 5$  s.



Zur Programmierung der Differentialgleichung

$$y'(x) = y(x)$$

wird im Schaltplan 3.4.1 links mit  $-y'(x)/5$  begonnen; der Integrierer mit  $RC = 1$  s erzeugt dann entsprechend der Vorbemerkung zu Kapitel 3.4:

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{RC} \int_0^x \left( -\frac{y'(x)}{5} \right) dt + y(0) \\ &= -\frac{\alpha}{RC} \int_0^x \left( -\frac{y'(x)}{5} \right) dx + y(0) \\ &= \int_0^x y'(x) dx + y(0) = y(x) \end{aligned}$$

Der nachfolgende Operationsverstärker liefert dann  $-y(x)/5$ . Vor Beginn der Rechnung ist Schalter  $S_2$  geöffnet und Schalter  $S_1$  geschlossen. Der Anfangswert  $y(x_0)$  mit  $x_0 = 0$  kann gewählt werden. Wird Schalter  $S_1$  geöffnet und Schal-



ter  $S_2$  geschlossen, so gilt:

$$-\frac{1}{5} y(x) = -\frac{1}{5} y'(x)$$

und  $y(x)$  ist solange Lösung der Differentialgleichung zum gegebenen Anfangswert, wie keiner der Operationsverstärker übersteuert ist. Man erhält:

$$y(x) = y(0) e^x$$

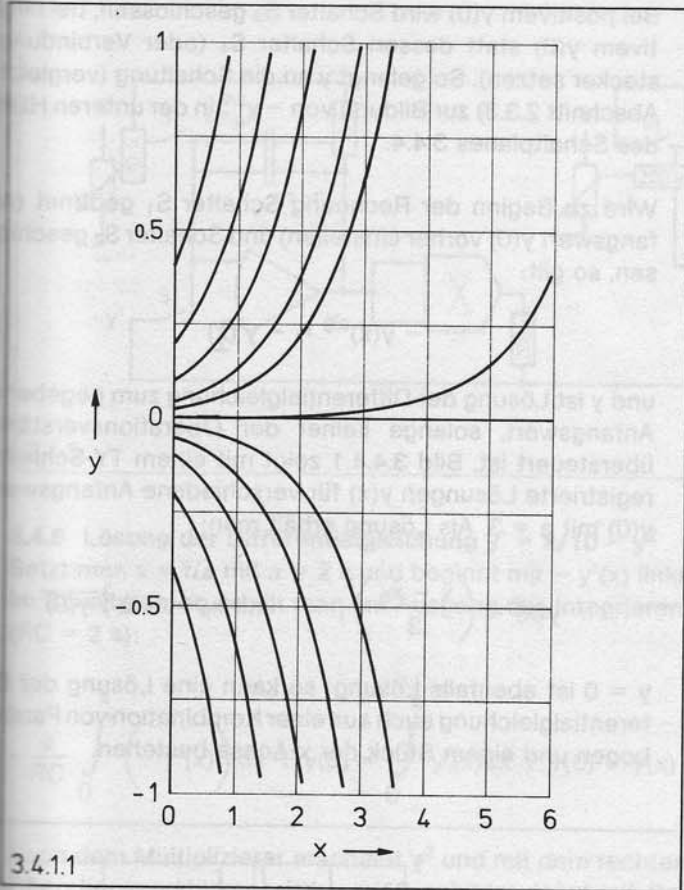


Bild 3.4.1.1 zeigt mit einem TY-Schreiber registrierte Lösungen  $y(x)$  für verschiedene Anfangswerte  $y(0)$ . Da die Zeitkonstante des Integrierers nicht genau 1 s sondern gleich 0,94 s ist, gilt hier:

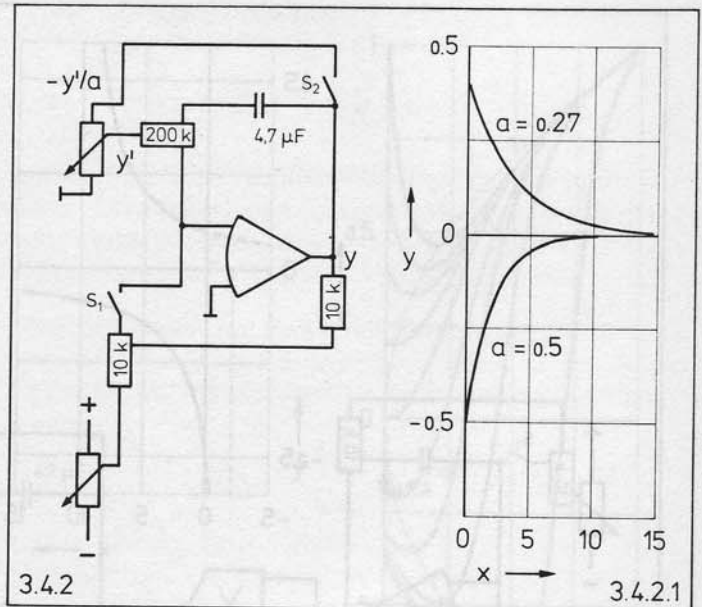
$$y(x) = y(0) e^{x/0,94}$$

Um die Zeitkonstante nahezu auf 1 s zu bringen, ließe sich natürlich auch der Widerstand von 200 k $\Omega$  durch Vorschalten von 10 k $\Omega$  und 2 k $\Omega$  auf 212 k $\Omega$  erhöhen.

### 3.4.2 Lösung der Differentialgleichung $y' = -ay$

Für  $a$  soll gelten  $0 < a \leq 1$ . Setzt man  $x = t/\alpha$  mit  $\alpha = 1$  s und beginnt links im Schaltplan mit  $-y'/a$  vor, bzw. mit  $-y'$  nach dem Potentiometer, so erhält man am Ausgang des Integrierers ( $RC = 1$  s):

$$-\frac{\alpha}{RC} \int_0^x (-y'(x)) dx + y(0) = \int_0^x y'(x) dx + y(0) = y(x)$$



Vor Beginn der Rechnung ist Schalter  $S_2$  geöffnet und Schalter  $S_1$  geschlossen. Der Anfangswert  $y(x_0)$  mit  $x_0 = 0$  kann gewählt werden. Wird Schalter  $S_2$  geschlossen und Schalter  $S_1$  geöffnet, so gilt:

$$y(x) = -\frac{1}{a} y'(x)$$

und  $y(x)$  ist Lösung der Differentialgleichung zum Anfangswert  $y(0)$ , solange der Operationsverstärker nicht übersteuert ist.

Bild 3.4.2.1 zeigt zwei Lösungen  $y(x)$  mit verschiedenen Anfangswerten  $y(0)$  und Faktoren  $a$ . Als Lösung erhält man:

$$y(x) = y(0) e^{-ax}$$

### 3.4.3 Lösung der Differentialgleichung $y' = y^2$

Setzt man  $x = t/\alpha$  mit  $\alpha = 1$  s und beginnt links im Schaltplan mit  $y'(x)$ , so erhält man am Ausgang des Integrierers ( $RC = 1$  s):

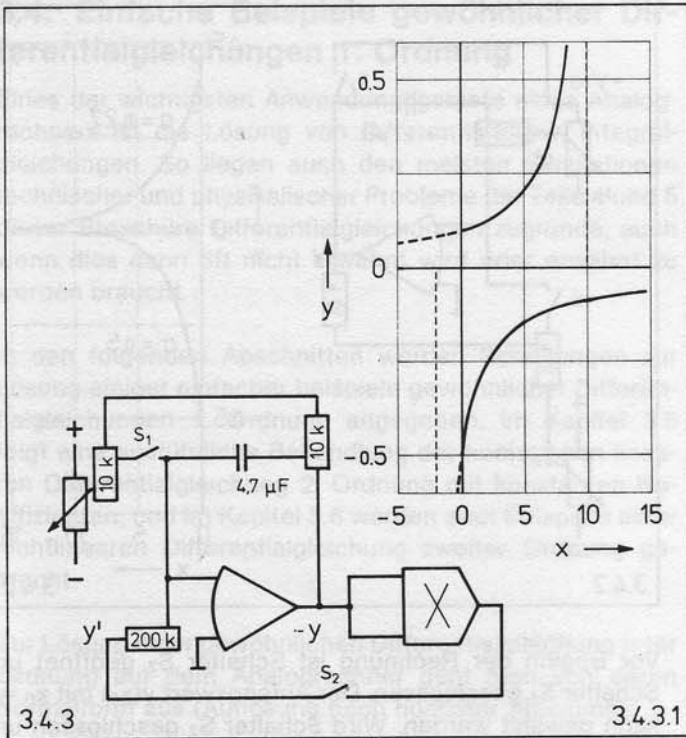
$$-\frac{\alpha}{RC} \int_0^x y'(x) dx - y(0) = - \int_0^x y'(x) dx - y(0) = -y(x)$$

Nach dem Multiplizierer erscheint  $y^2$ . Wird mit Beginn der Rechnung Schalter  $S_1$  geöffnet (Anfangswert vorher einstellen) und Schalter  $S_2$  geschlossen, so gilt:

$$y(x)^2 = y'(x)$$

und  $y(x)$  ist Lösung der Differentialgleichung zum Anfangswert  $y(x_0)$  mit  $x_0 = 0$ , solange der Operationsverstärker nicht übersteuert ist. Man erhält als Lösung:

$$y(x) = \frac{1}{1/y(x_0) + x_0 - x}$$



mit den Asymptoten  $y = 0$  und  $y = x_0 + 1/y(x_0)$ . Für die im Bild 3.4.3.1 wiedergegebenen Lösungen zu einem positiven und einem negativen Anfangswert gilt  $x_0 = 0$ .

### 3.4.4 Lösung der Differentialgleichung $y' = y^{2/3}$

Setzt man  $x = t/\alpha$  mit  $\alpha = a$  und beginnt mit  $-y'(x)$  vor, bzw. mit  $-y'(x)/a$  nach dem Potentiometer links unten im Schaltplan, so erhält man am Ausgang des Integrierers ( $RC = 1$  s) links oben:

$$-\frac{\alpha}{RC} \int_0^x \left( -\frac{y'(x)}{a} \right) dx + y(0) = \int_0^x y'(x) dx + y(0) = y(x)$$

Bei positivem  $y(0)$  wird Schalter  $S_3$  geschlossen, bei negativem  $y(0)$  statt dessen Schalter  $S_4$  (oder Verbindungsstecker setzen). So gelangt  $y$  an die Schaltung (vergleiche Abschnitt 2.3.3) zur Bildung von  $-y^{2/3}$  in der unteren Hälfte des Schaltplanes 3.4.4.

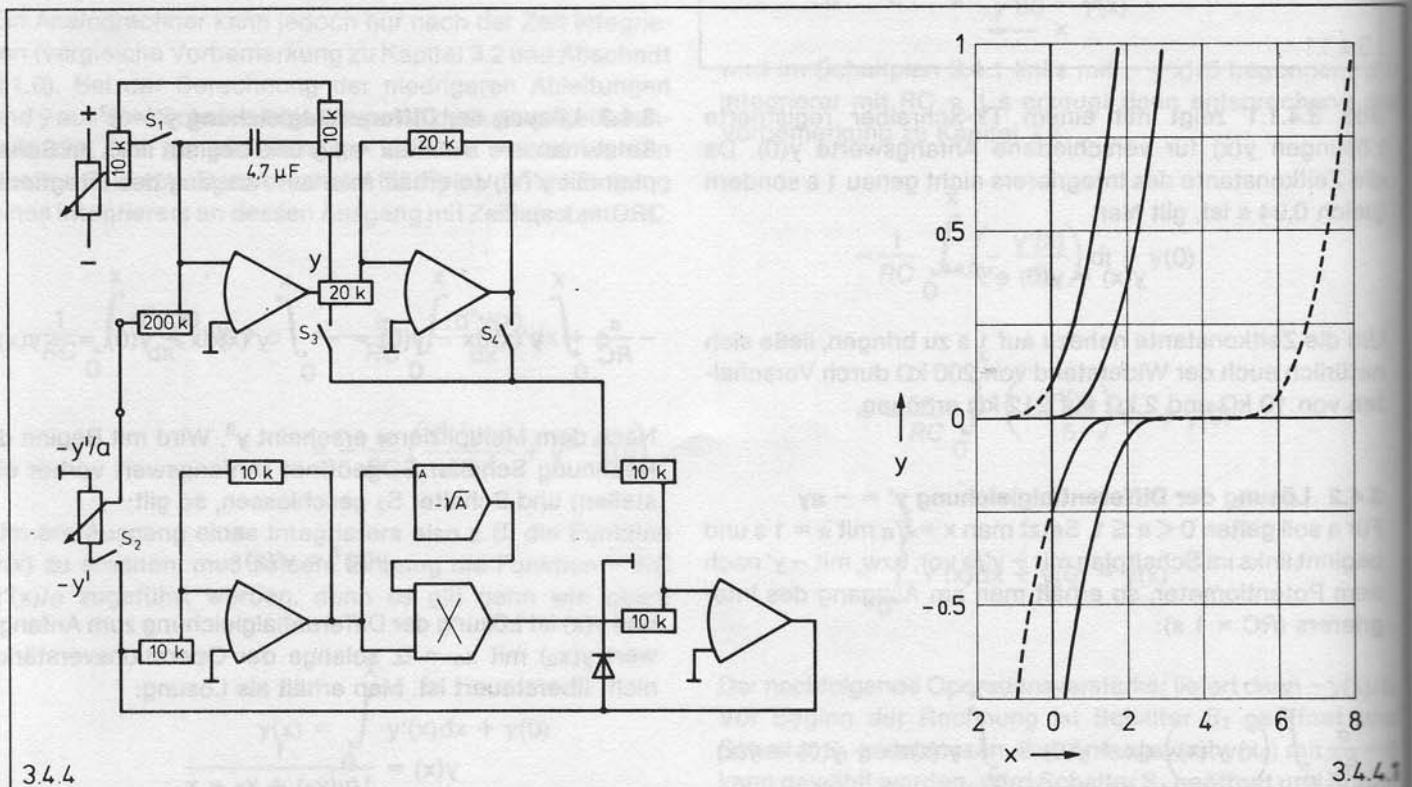
Wird zu Beginn der Rechnung Schalter  $S_1$  geöffnet (Anfangswert  $y(0)$  vorher einstellen) und Schalter  $S_2$  geschlossen, so gilt:

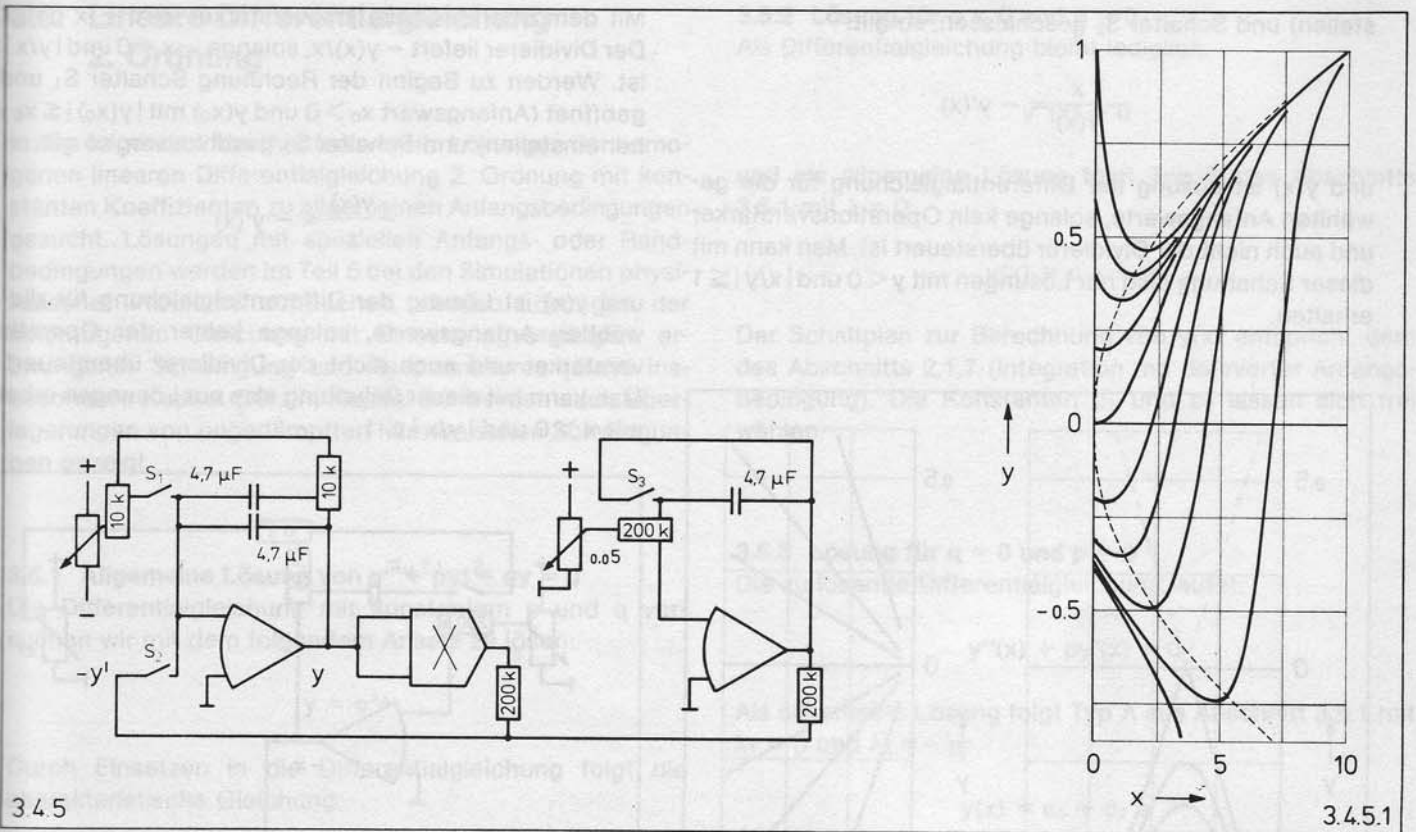
$$-y(x)^{2/3} = -y'(x)$$

und  $y$  ist Lösung der Differentialgleichung zum gegebenen Anfangswert, solange keiner der Operationsverstärker übersteuert ist. Bild 3.4.4.1 zeigt mit einem TY-Schreiber registrierte Lösungen  $y(x)$  für verschiedene Anfangswerte  $y(0)$  mit  $a = 3$ . Als Lösung erhält man:

$$y(x) = \left( \frac{x - x_0}{3} \right)^3, \quad \text{mit } x_0 = -3 \sqrt[3]{y(0)}$$

$y = 0$  ist ebenfalls Lösung; so kann eine Lösung der Differentialgleichung auch aus einer Kombination von Parabelbogen und einem Stück der  $x$ -Achse bestehen.





**3.4.5 Lösung der Differentialgleichung  $y' = x/10 - y^2$**   
 Setzt man  $x = t/\alpha$  mit  $\alpha = 2$  s und beginnt mit  $-y'(x)$  links im Schaltplan, so erhält man am Ausgang des Integrierers ( $RC = 2$  s):

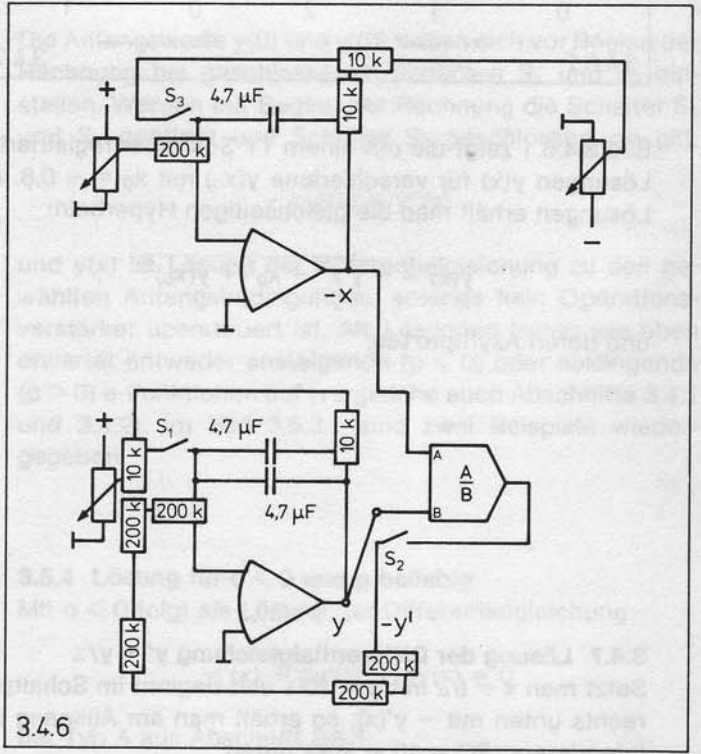
$$-\frac{\alpha}{RC} \int_0^x (-y'(x)) dx + y(x_0) = \int_0^x y'(x) dx + y(x_0) = y(x)$$

$$-\frac{\alpha}{RC} \int_0^x (-y'(x)) dx + y(0) = \int_0^x y'(x) dx + y(0) = y(x)$$

Nach dem Multiplizierer erscheint  $y^2$  und mit dem rechten Operationsverstärker wird  $-x/10$  gebildet. Wird mit Beginn der Rechnung Schalter  $S_1$  geöffnet (Anfangswert  $y(0)$  vorher einstellen), Schalter  $S_3$  geöffnet und Schalter  $S_2$  geschlossen, so gilt:

$$-\frac{1}{10} x + y(x)^2 = y'(x)$$

und  $y$  ist Lösung der Differentialgleichung zum Anfangswert  $y(0)$ , solange kein Operationsverstärker übersteuert ist. Bild 3.4.5.1 zeigt mit einem TY-Schreiber registrierte Lösungen  $y(x)$  für verschiedene  $y(0)$ . Die Parabel  $y = \sqrt{x/10}$  tritt als Ort der Minima der Lösungen und als Asymptote auf.



**3.4.6 Lösung der Differentialgleichung  $y' = x/y$**   
 Setzt man  $x = t/\alpha$  mit  $\alpha = 10$  s und beginnt im Schaltplan rechts unten mit  $-y'(x)$ , so erhält man am Ausgang des Integrierers ( $RC = 10$  s) links unten:

Mit dem oberen Operationsverstärker wird  $-x$  gebildet. Der Dividierer liefert  $-x/y(x)$ , solange  $y < 0$  und  $|x/y| \leq 1$  ist. Werden zu Beginn der Rechnung Schalter  $S_1$  und  $S_3$  geöffnet (Anfangswerte  $x_0$  und  $y(x_0) \leq -|x_0|$  vorher ein-

stellen) und Schalter  $S_2$  geschlossen, so gilt:

$$-\frac{x}{y(x)} = -y'(x)$$

und  $y(x)$  ist Lösung der Differentialgleichung für die gewählten Anfangswerte, solange kein Operationsverstärker und auch nicht der Dividierer übersteuert ist. Man kann mit dieser Schaltung also nur Lösungen mit  $y < 0$  und  $|x/y| \leq 1$  erhalten.

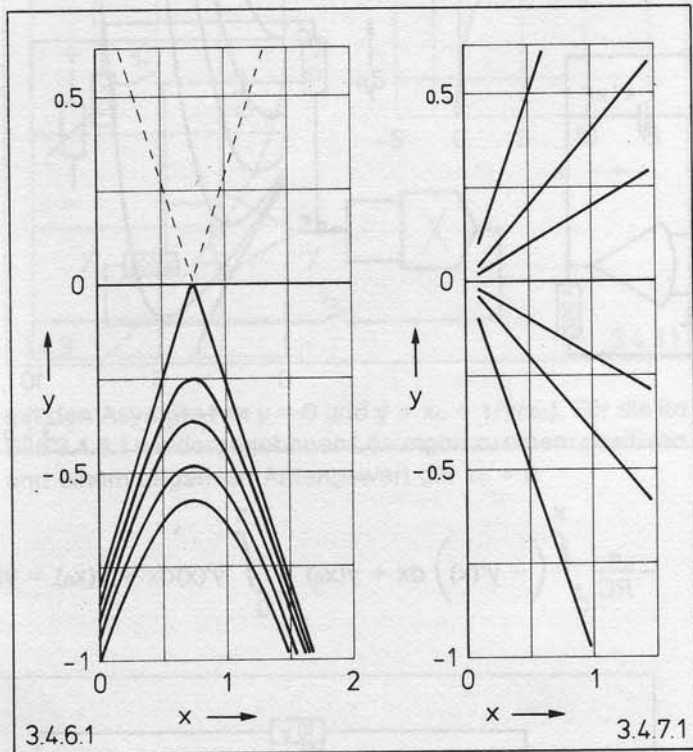


Bild 3.4.6.1 zeigt die mit einem TY-Schreiber registrierten Lösungen  $y(x)$  für verschiedene  $y(x_0)$  mit  $x_0 = -0,8$ . Als Lösungen erhält man die gleichseitigen Hyperbeln:

$$y(x) = -\sqrt{x^2 - x_0^2 + y(x_0)^2}$$

und deren Asymptoten.

### 3.4.7 Lösung der Differentialgleichung $y' = y/x$

Setzt man  $x = t/\alpha$  mit  $\alpha = 10$  s und beginnt im Schaltplan rechts unten mit  $-y'(x)$ , so erhält man am Ausgang des Integrierers ( $RC = 10$  s) links unten:

$$-\frac{\alpha}{RC} \int_0^x (-y'(x)) dx + y(x_0) = \int_0^x y'(x) dx + y(x_0) = y(x)$$

Mit dem oberen Operationsverstärker wird  $-x$  gebildet. Der Dividierer liefert  $-y(x)/x$ , solange  $-x < 0$  und  $|y/x| \leq 1$  ist. Werden zu Beginn der Rechnung Schalter  $S_1$  und  $S_2$  geöffnet (Anfangswert  $x_0 > 0$  und  $y(x_0)$  mit  $|y(x_0)| \leq x_0$  vorher einstellen) und Schalter  $S_2$  geschlossen, so gilt:

$$-\frac{y(x)}{x} = -y'(x)$$

und  $y(x)$  ist Lösung der Differentialgleichung für die gewählten Anfangswerte, solange keiner der Operationsverstärker und auch nicht der Dividierer übersteuert ist. Man kann mit dieser Schaltung also nur Lösungen erhalten mit  $x > 0$  und  $|y/x| \leq 1$ .

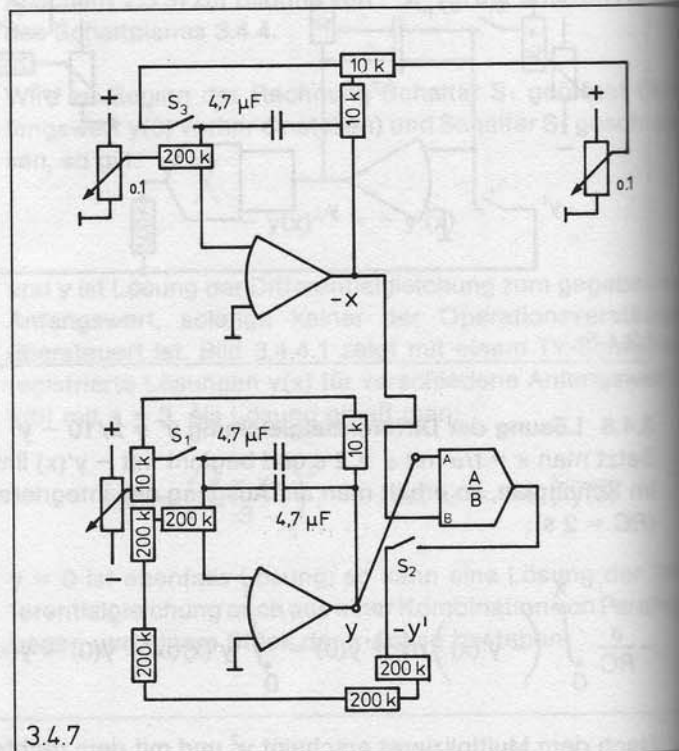


Bild 3.4.7.1 zeigt mit einem TY-Schreiber registrierte Lösungen  $y(x)$  für verschiedene Anfangswerte  $y(x_0)$  mit  $x_0 = 0,1$ . Als Lösungen erhält man die Geraden durch den Ursprung:

$$y(x) = \frac{y(x_0)}{x_0} x$$

Um schöne Geraden als Lösungen zu erhalten, ist es notwendig, daß das Ausgangssignal des Dividierers konstant ist, d. h.  $x$  muß genauso rasch steigen wie  $y$ . Das Potentiometer links oben zur Erzeugung von  $1/10$  gegebenenfalls etwas verstellen.

### 3.5. Lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

In den folgenden Abschnitten werden Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten zu allgemeinen Anfangsbedingungen gesucht. Lösungen mit speziellen Anfangs- oder Randbedingungen werden im Teil 5 bei den Simulationen physikalischer Probleme auftauchen, ebenso Lösungen der inhomogenen Gleichung mit Einschwingvorgängen, erzwungener Schwingung und Resonanzkurve (siehe insbesondere Kapitel 5.6). Im Kapitel 3.7 werden auch Überlagerungen von ungedämpften harmonischen Schwingungen gezeigt.

#### 3.5.1 Allgemeine Lösung von $y'' + py' + qy = 0$

Die Differentialgleichung mit konstantem  $p$  und  $q$  versuchen wir mit dem folgendem Ansatz zu lösen:

$$y = e^{\lambda x}$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung folgt die charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

mit den Lösungen für  $\lambda$ :

$$\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Wir unterscheiden je nach Art der Wurzeln der charakteristischen Gleichung drei verschiedene Lösungstypen:

**Typ A:** Es gibt zwei reelle Wurzeln, d. h.  $p^2 - 4q > 0$ . Dann lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung:

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

**Typ B:** Es gibt genau eine reelle Wurzel, d. h. es gilt  $p^2 - 4q = 0$ . Die allgemeine Lösung lautet:

$$y(x) = (c_1 x + c_2) e^{\lambda x}$$

**Typ C:** Es gibt zwei konjugiert komplexe Wurzeln, d. h.  $p^2 - 4q < 0$ . Unter Berücksichtigung der Eulerschen Beziehung  $e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha$  lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung:

$$y(x) = e^{-\frac{p}{2}x} [c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x]$$

$$\text{mit } \omega = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$$

Alle drei Lösungstypen haben je zwei frei wählbare Konstanten  $c_1$  und  $c_2$ , dadurch lassen sich gewünschte Anfangswerte erreichen. Häufig verlangt man für  $x = 0$  bestimmte Werte für  $y(0)$  und  $y'(0)$ .

#### 3.5.2 Lösung für $q = 0$ und $p = 0$

Als Differentialgleichung bleibt lediglich

$$y''(x) = 0$$

und als allgemeine Lösung folgt Typ B des Abschnitts 3.5.1 mit  $\lambda = 0$ :

$$y(x) = c_1 x + c_2$$

Der Schaltplan zur Berechnung von  $y(x)$  entspricht dem des Abschnitts 2.1.7 (Integration mit definierter Anfangsbedingung). Die Konstanten  $c_1$  und  $c_2$  lassen sich frei wählen.

#### 3.5.3 Lösung für $q = 0$ und $p \neq 0$

Die zu lösende Differentialgleichung lautet:

$$y''(x) + py'(x) = 0$$

Als allgemeine Lösung folgt Typ A aus Abschnitt 3.5.1 mit  $\lambda_1 = 0$  und  $\lambda_2 = -p$ :

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{-px}$$

Im Schaltplan 3.5.3 erhält man aus  $y''(x)$  nach dem ersten Integrieren  $y'(x)$  und nach dem zweiten  $y(x)$ . Der Operationsverstärker links unten dient zusammen mit dem nachfolgenden Potentiometer zur Erzeugung von  $-py'(x)$ . Dabei kann  $p$  wahlweise positiv (Knopf am Potentiometer nach links drehen) oder negativ sein (Knopf nach rechts drehen).

Die Anfangswerte  $y(0)$  und  $y'(0)$  lassen sich vor Beginn der Rechnung bei geschlossenen Schaltern  $S_1$  und  $S_2$  einstellen. Werden mit Beginn der Rechnung die Schalter  $S_1$  und  $S_2$  geöffnet und Schalter  $S_3$  geschlossen, so gilt:

$$-py'(x) = y''(x)$$

und  $y(x)$  ist Lösung der Differentialgleichung zu den gewählten Anfangsbedingungen, solange kein Operationsverstärker übersteuert ist. Als Lösungen treten wie oben erwartet entweder ansteigende ( $p < 0$ ) oder abklingende ( $p > 0$ ) e-Funktionen auf (vergleiche auch Abschnitte 3.4.1 und 3.4.2). Im Bild 3.5.3.1 sind zwei Beispiele wiedergegeben.

#### 3.5.4 Lösung für $q < 0$ und $p$ beliebig

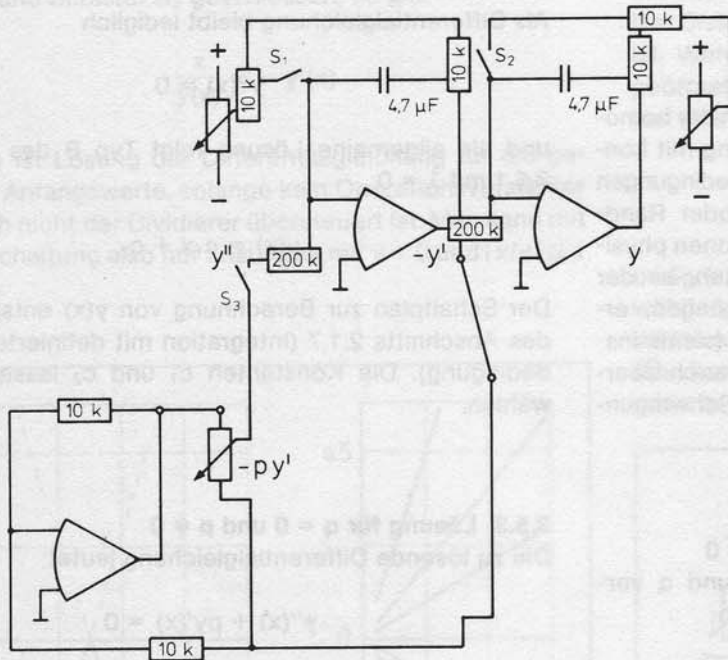
Mit  $q < 0$  folgt als Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0$$

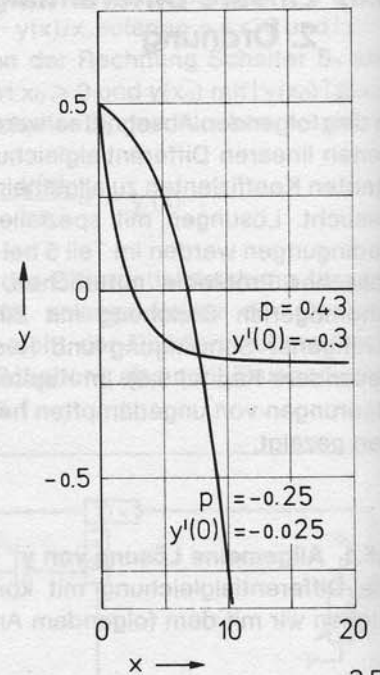
der Typ A aus Abschnitt 3.5.1:

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

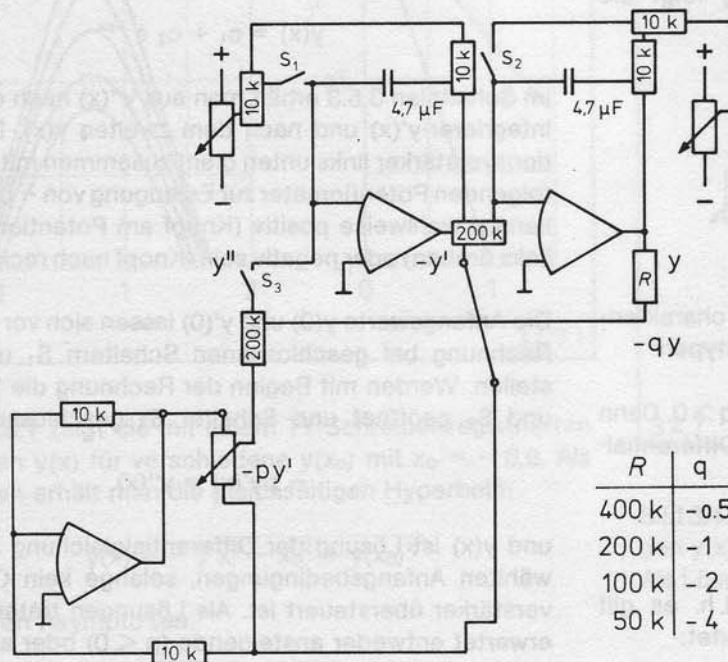
$$\text{mit: } \lambda_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$



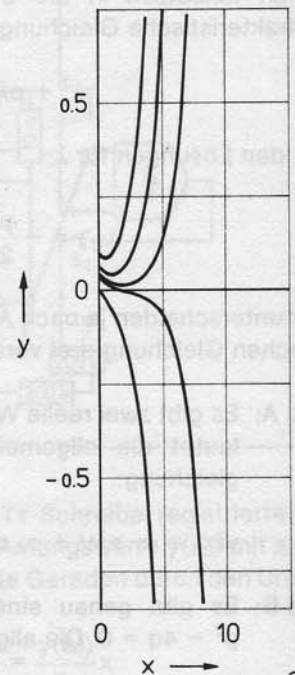
3.5.3



3.5.3.1



3.5.4



3.5.4.1

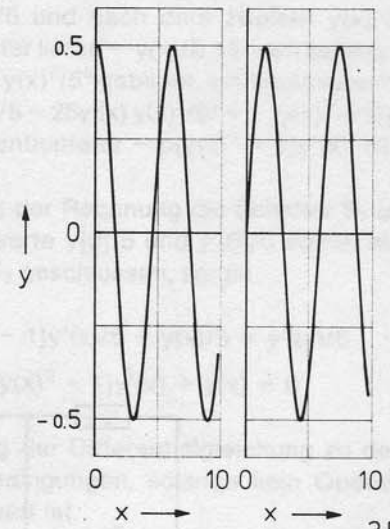
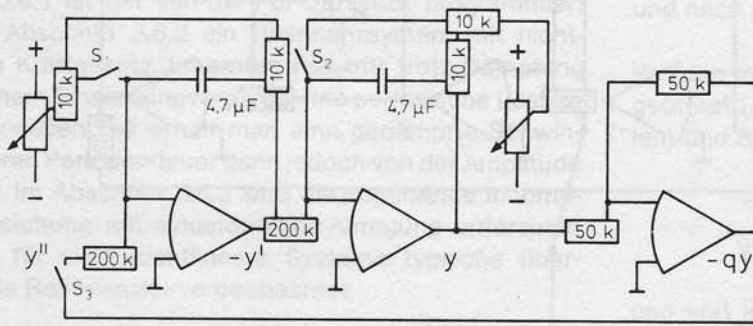
$$\lambda_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Im Schaltplan 3.5.4 erhält man wieder aus  $y''(x)$  mit zwei Integrierern  $-y'(x)$  und  $y(x)$ . Die Zeitkonstanten der Integrierer sind gleich 1 s. Die Erzeugung von  $-py'(x)$  erfolgt ebenso wie in Abschnitt 3.5.3. Der Faktor  $-q$  mit  $q < 0$  wird durch geeignete Wahl des dem rechten Integrierer folgenden Widerstandes  $R$  eingestellt. Mit  $R = 200 \text{ k}\Omega$  folgt z. B.  $q = -1$ .

Werden mit Beginn der Rechnung die Schalter  $S_1$  und  $S_2$  geöffnet (Anfangswerte  $y(0)$  und  $y'(0)$  vorher einstellen) und Schalter  $S_3$  geschlossen, so gilt:

$$-py'(x) - qy(x) = y''(x)$$

und  $y(x)$  ist Lösung der Differentialgleichung zu den gewählten Anfangsbedingungen, solange kein Operationsverstärker übersteuert ist. Man findet je nach Wahl der Anfangsbedingungen eine abklingende oder ansteigende e-Funktion oder allgemein eine Kombination beider als Lösung. Für die im Bild 3.5.4.1 angegebenen Lösungen gilt  $q = -1$ .



3.5.5

### 3.5.5 Lösung für $q > 0$ und $p = 0$

Es bleibt die Differentialgleichung einer ungedämpften harmonischen Schwingung:

$$y''(x) + qy(x) = 0$$

und als allgemeine Lösung folgt Typ C aus Abschnitt 3.5.1 mit  $\omega = \sqrt{q}$ :

$$y(x) = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x$$

Im Schaltplan erhält man aus  $y''(x)$  nach zwei Integrierern (mit Zeitkonstante  $RC = 1$  s)  $-y'(x)$  und  $y(x)$ . Ein nachfolgender Inverter liefert  $-qy(x)$ . Der Faktor  $q$  kann durch ein geeignetes Widerstandsverhältnis am Inverter eingestellt werden.

Werden zu Beginn der Rechnung die Schalter  $S_2$  und  $S_1$  geöffnet (Anfangswerte  $y(0)$  und  $y'(0)$  vorher einstellen) und Schalter  $S_3$  geschlossen, so gilt:

$$-qy(x) = y''(x)$$

und  $y(x)$  ist Lösung der Differentialgleichung zu den gewählten Anfangswerten, solange kein Operationsverstärker übersteuert ist. Man erhält eine harmonische Schwingung mit der Periode  $X = 2\pi/\omega$ . Im Bild 3.5.5.1 sind (mit  $q = 1$ ) zwei Beispiele gewählt,

links:  $y(0) = 0,5$  und  $y'(0) = 0$   
rechts:  $y(0) = 0$  und  $y'(0) = 0,5$

Zur Berechnung von  $-y'(x)$  aus  $y''(x)$  und von  $y(x)$  aus  $-y'(x)$  mit zwei Integrierern wird, was in den letzten Abschnitten nicht erwähnt ist, entsprechend Vorbemerkung zu Kapitel 3.4 (siehe auch Kapitel 3.2 und Abschnitt 2.1.6) die Zeit als unabhängige Variable ersetzt durch  $x = t/\alpha$ . Dann erscheint z. B. mit  $y''(x)$  am Eingang eines Integrierers an dessen Ausgang:

$$-\frac{1}{RC} \int_0^x y''(x) dt + c = -\frac{\alpha}{RC} \int_0^x y''(x) dx + c$$

Mit  $\alpha = 1$  s und  $RC = 1$  s folgt für das Ausgangssignal:

$$-\int_0^x y''(x) dx - y'(0) = -y'(x)$$

Will man nicht mit der dimensionslosen Variablen  $x$  sondern mit der dimensionsbehafteten Variablen  $t$  rechnen, so sind dann auch die Konstanten  $p$ ,  $q$ ,  $\lambda$ ,  $\omega$  und gelegentlich  $c_1$  nicht mehr dimensionslos und ebenso muß die Dimension der Zeitkonstante der Integrierer mit berücksichtigt werden. Viele Beispiele der Physik im Teil 5 dieser Broschüre werden mit der Zeit  $t$  als unabhängige Variable behandelt.

### 3.5.6 Lösung für $q > 0$ und $p$ beliebig

Mit  $q > 0$  können als Lösung der Differentialgleichung:

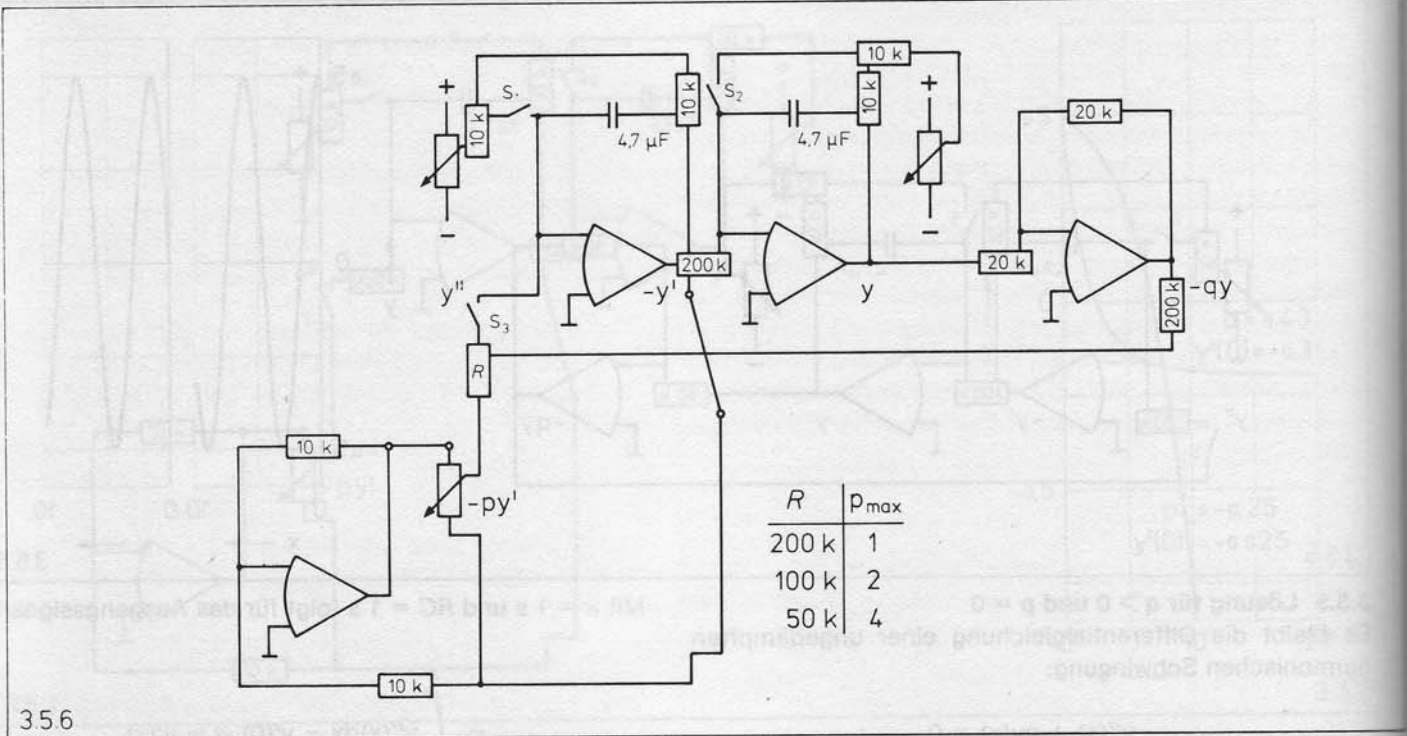
$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0$$

je nach Wahl von  $p$  und  $q$  alle drei Typen aus Abschnitt 3.5.1 als Lösungen auftreten. Im Schaltplan erhält man aus  $y''(x)$  wie in Abschnitt 3.5.4 wieder  $-y'(x)$ ,  $-py'(x)$ ,  $y(x)$  und durch Inverter  $-qy(x)$ . Durch geeignete Wahl des dem  $-py'(x)$  erzeugenden Potentiometer folgenden Widerstandes  $R$  lassen sich die maximalen Werte von  $p$  vorgeben. Für  $R = 100$  k $\Omega$  folgt z. B.:  $-2 \leq p \leq +2$ .

Werden zu Beginn der Rechnung die Schalter  $S_1$  und  $S_2$  geöffnet (Anfangswerte  $y(0)$  und  $y'(0)$  vorher einstellen) und Schalter  $S_3$  geschlossen, so gilt:

$$-py'(x) - qy(x) = y''(x)$$

und  $y(x)$  ist Lösung der Differentialgleichung zu den gewählten Anfangsbedingungen, solange kein Operationsverstärker übersteuert ist. Lösungsbeispiele sind in den beiden folgenden Abschnitten angegeben.



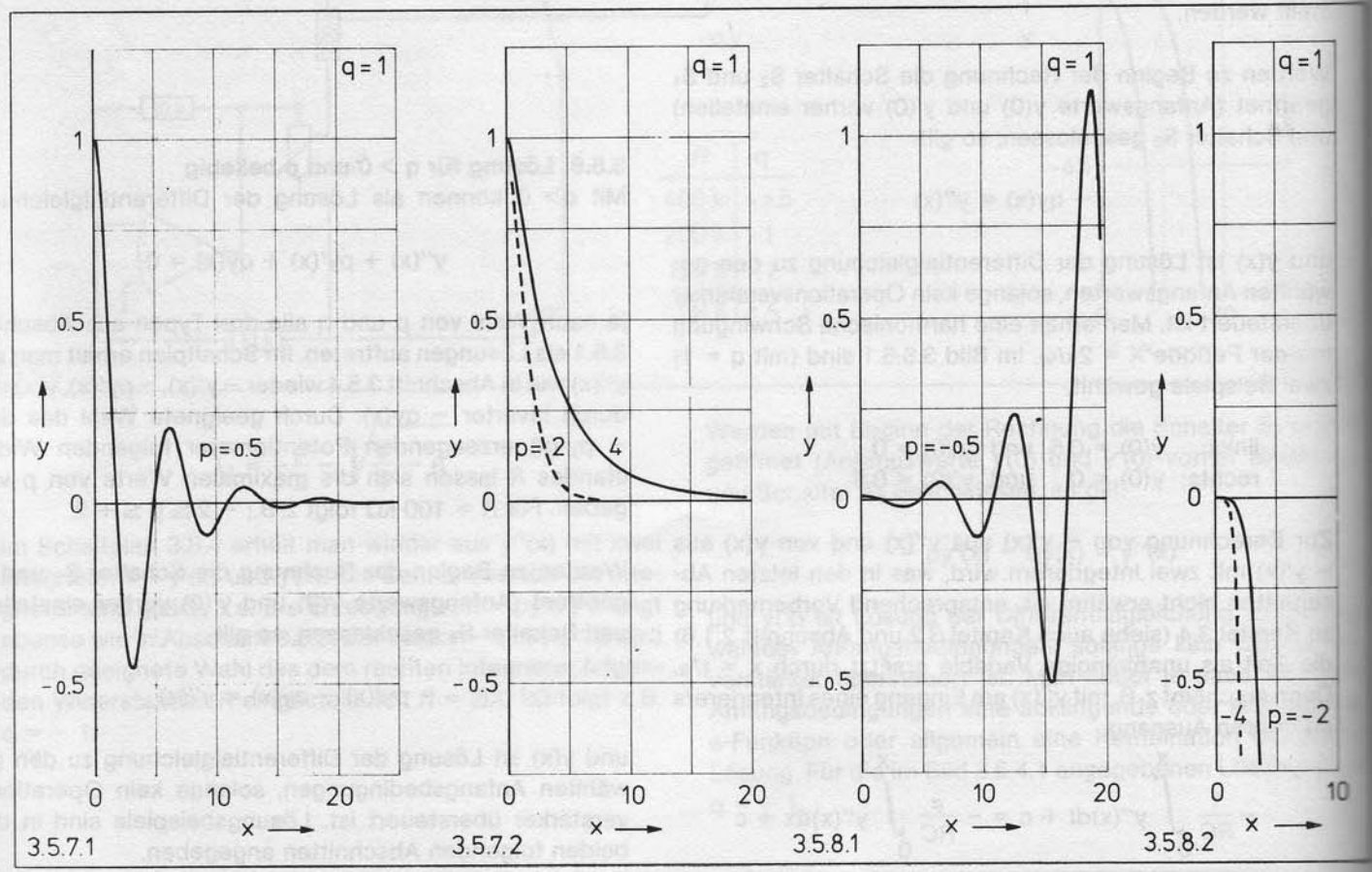
3.5.6

### 3.5.7 Gedämpfte harmonische Schwingung

Wählt man im Abschnitt 3.5.6  $p$  positiv, jedoch  $p^2 < 4q$ , so erhält man eine gedämpfte harmonische Schwingung (Bild 3.5.7.1). Im Bild 3.5.7.2 sind noch Lösungen für  $p^2 = 4q$  (aperiodischer Grenzfall) und für  $p^2 > 4q$  (aperiodischer Verlauf) angegeben. Bei allen Lösungen der Bilder 3.5.7.1 und 3.5.7.2 gilt zu Beginn  $y(0) = 1$  und  $y'(0) = 0$ .

### 3.5.8 Angefachte harmonische Schwingung

Wählt man im Abschnitt 3.5.6  $p$  negativ, jedoch  $p^2 < 4q$ , so erhält man eine angefachte harmonische Schwingung (Bild 3.5.8.1). Im Bild 3.5.8.2 sind noch Lösungen für  $p^2 = 4q$  (aperiodischer Grenzfall) und für  $p^2 > 4q$  (aperiodischer Verlauf) angegeben. Bei allen Lösungen der Bilder 3.5.8.1 und 3.5.8.2 gilt zu Beginn  $y(0) = 0,01$  und  $y'(0) = 0$ .



3.5.7.1

3.5.7.2

3.5.8.1

3.5.8.2



### 3.6. Nichtlineare Differentialgleichung 2. Ordnung

Es werden Lösungen für zwei homogene nichtlineare Differentialgleichungen 2. Ordnung angegeben. Im Abschnitt 3.6.1 ist der van-der-Pol-Oszillator programmiert und im Abschnitt 3.6.2 ein Resonanzsystem mit nichtlinearem Kraftgesetz. Im ersten Fall tritt trotz Dämpfung (nach einem Einschwingvorgang) eine periodische Lösung auf. Im zweiten Fall erhält man eine gedämpfte Schwingung, deren Periodendauer dann jedoch von der Amplitude abhängt. Im Abschnitt 5.6.3 wird die zugehörige inhomogene Gleichung mit sinusförmiger Anregung untersucht und die für viele nichtlineare Systeme typische überhängende Resonanzkurve beobachtet.

#### 3.6.1 Lösung von $y'' + p(y^2 - 1)y' + y = 0$ , mit $p > 0$

Die unter dem Namen van der Pol bekannte Differentialgleichung hat eine stabile periodische Lösung mit einer Amplitude von etwa 2, die je nach Wahl der Anfangsbedingungen nach gewisser Zeit erreicht wird; man spricht von Selbststeuerung oder Selbsterregung. Um diese stabile periodische Lösung auf dem Analogrechner zu erhalten, muß man eine Amplitudenskalierung durchführen (siehe Abschnitt 1.3.2).

Die Skalierungsfaktoren für  $y''(x)$ ,  $y'(x)$  und  $y(x)$  werden alle zu  $a = 1/5$  gewählt. Der Skalierungsfaktor für  $p$  ist gleich  $1/2$  und für die Rechenbereiche folgt:

$$\begin{aligned} -1 &\leq y(x)/5 \leq +1 \\ -1 &\leq y'(x)/5 \leq +1 \\ -1 &\leq y''(x)/5 \leq +1 \\ -1 &\leq p/2 \leq +1 \end{aligned}$$

Im Schaltplan 3.6.1 erhält man aus  $y''(x)/5$  nach dem ersten Integrierer  $-y'(x)/5$  und nach dem zweiten  $y(x)/5$ . Der nachfolgende Inverter liefert  $-y(x)/5$ . Mit den beiden Multiplizierern wird  $y'(x) y(x)^2/5^3$  gebildet, am Summierer rechts unten erscheint  $y'(x)/5 - 25y'(x) y(x)^2/5^3 = -[y(x)^2 - 1]y'(x)/5$  und nach dem Potentiometer  $-p[y(x)^2 - 1]y'(x)/10$ .

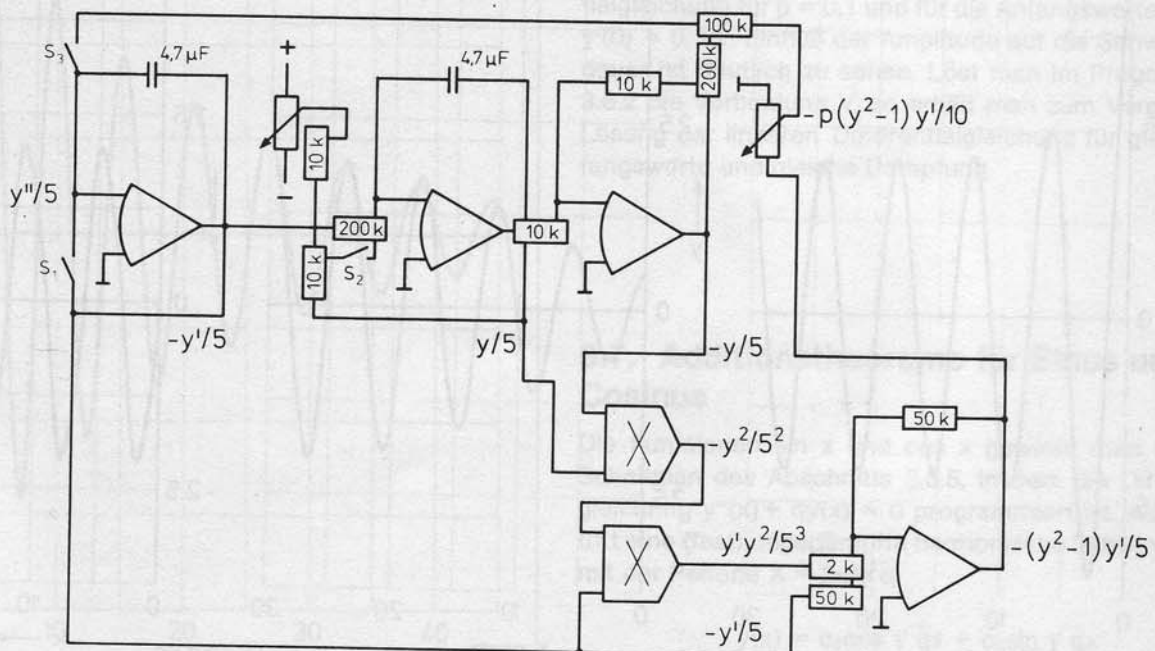
Werden mit Beginn der Rechnung die Schalter  $S_1$  und  $S_2$  geöffnet (Anfangswerte  $y[0]/5$  und  $y'[0]/5$  vorher einstellen) und Schalter  $S_3$  geschlossen, so gilt:

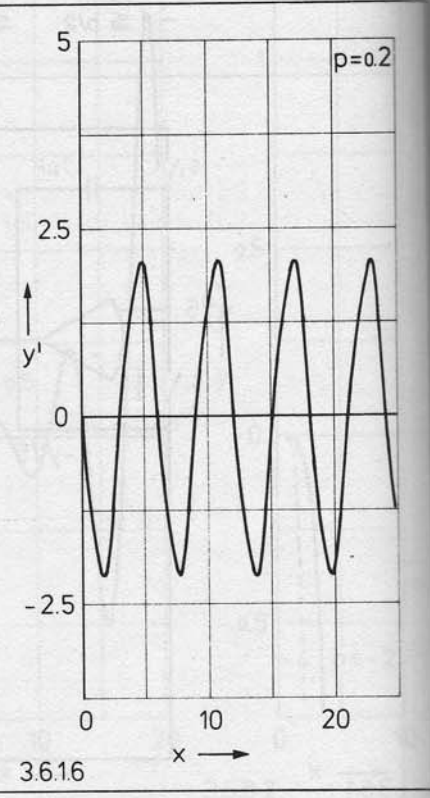
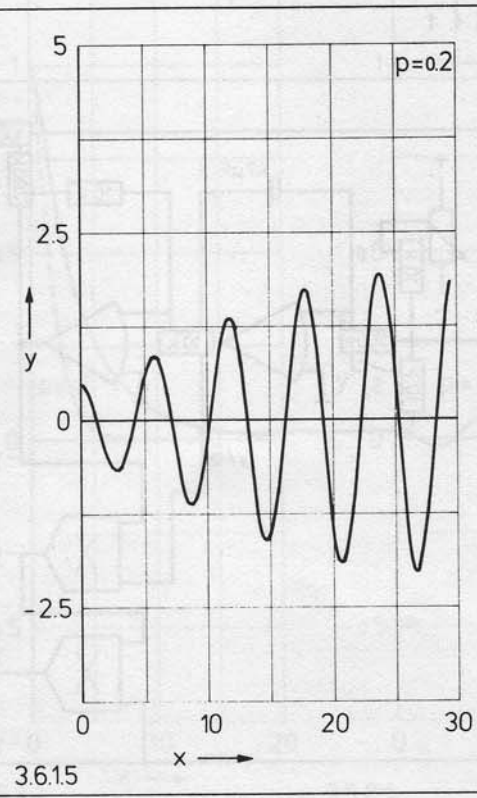
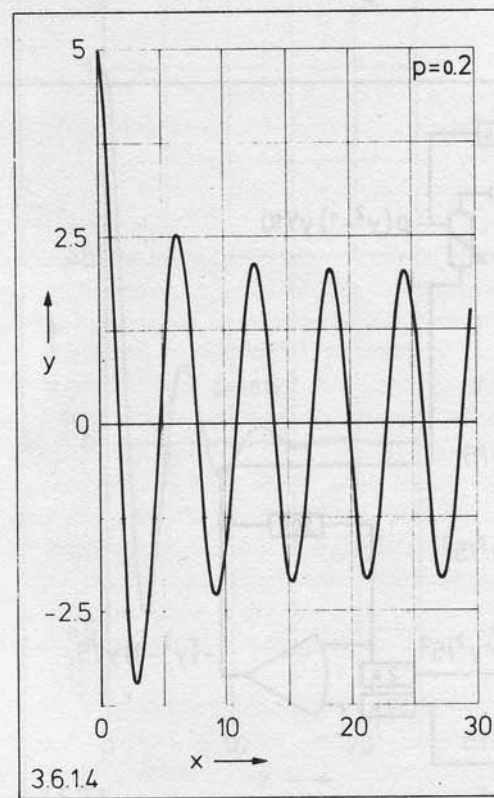
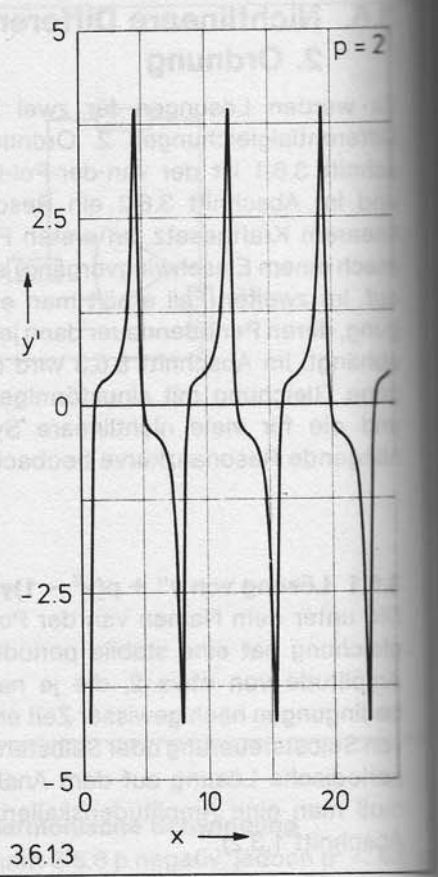
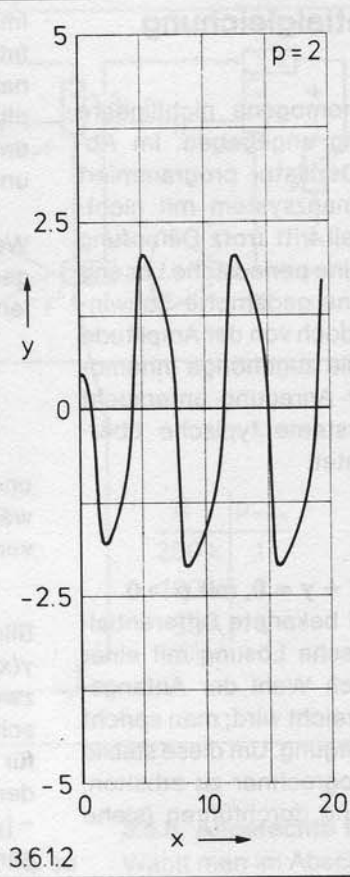
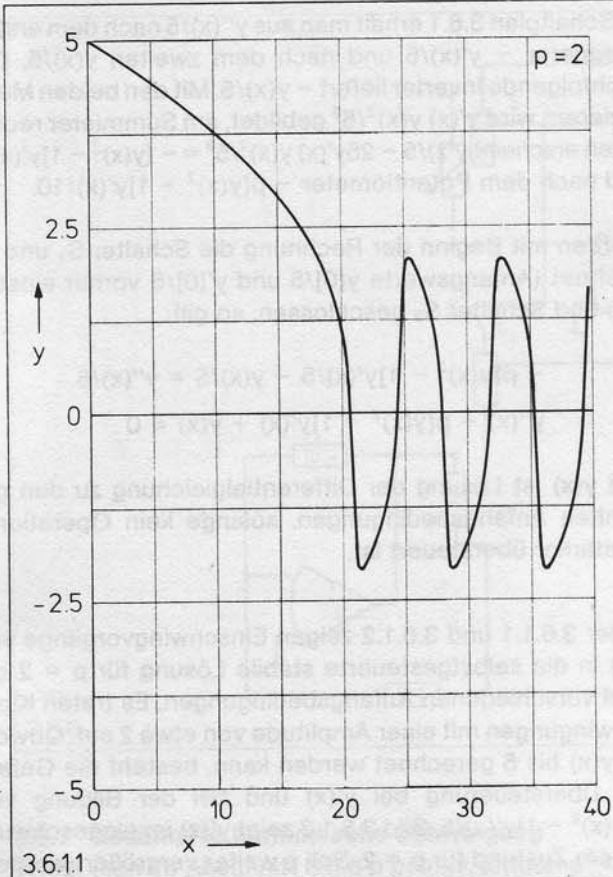
$$\begin{aligned} -p[y(x)^2 - 1]y'(x)/5 - y(x)/5 &= y''(x)/5 \\ y''(x) + p[y(x)^2 - 1]y'(x) + y(x) &= 0 \end{aligned}$$

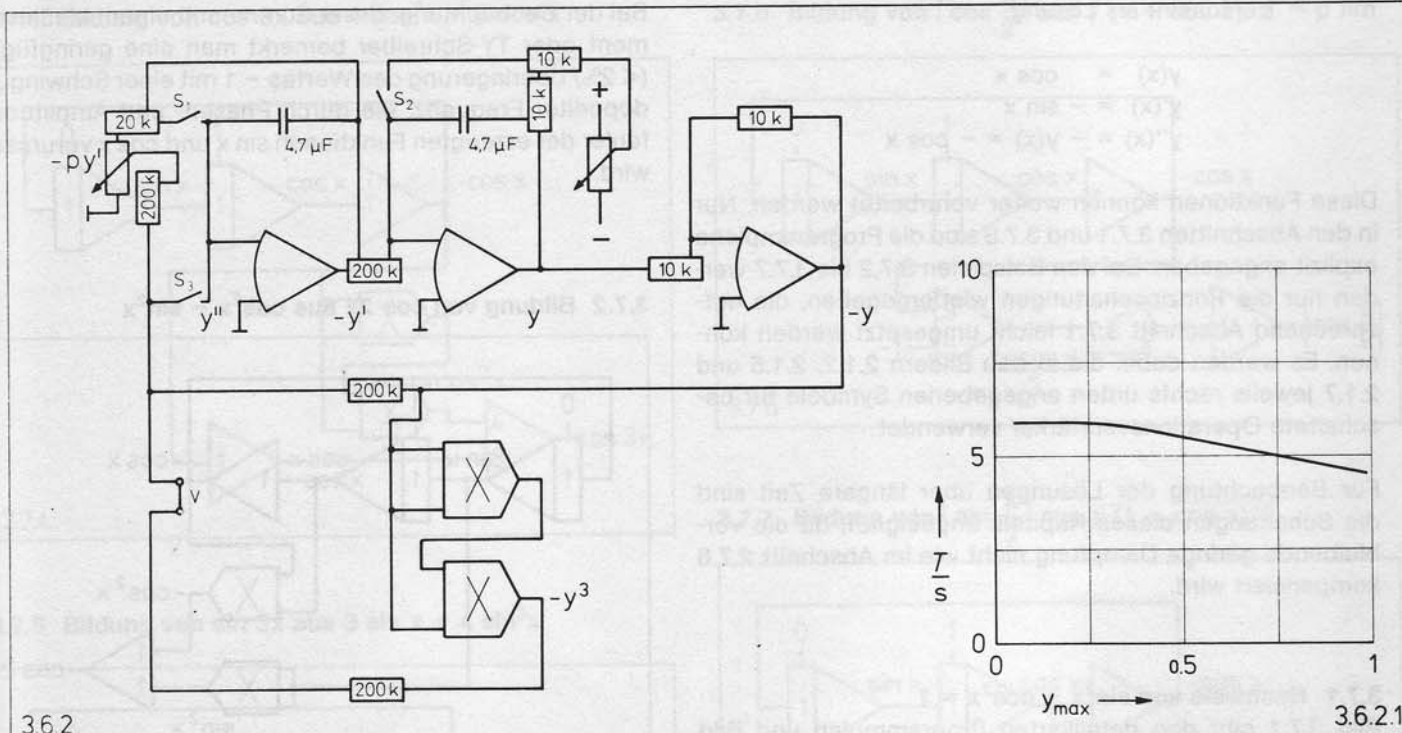
und  $y(x)$  ist Lösung der Differentialgleichung zu den gewählten Anfangsbedingungen, solange kein Operationsverstärker übersteuert ist.

Bilder 3.6.1.1 und 3.6.1.2 zeigen Einschwingvorgänge von  $y(x)$  in die selbstgesteuerte stabile Lösung für  $p = 2$  bei zwei verschiedenen Anfangsbedingungen. Es treten Kipp-schwingungen mit einer Amplitude von etwa 2 auf. Obwohl für  $y(x)$  bis 5 gerechnet werden kann, besteht die Gefahr der Übersteuerung bei  $y'(x)$  und bei der Bildung von  $-[y(x)^2 - 1]y'(x)/5$ . Bild 3.6.1.3 zeigt  $y'(x)$  im eingeschwungenem Zustand für  $p = 2$ . Soll  $p$  weiter vergrößert werden, ist für  $y'(x)$  ein kleinerer Skalierungsfaktor zu wählen.

Bilder 3.6.1.4 und 3.6.1.5 zeigen Einschwingvorgänge von  $y(x)$  in die selbstgesteuerte stabile Lösung für  $p = 0,2$  bei zwei verschiedenen Anfangsbedingungen.  $y(x)$  ist noch fast harmonisch. Bild 3.6.1.6 zeigt  $y'(x)$  im eingeschwungenen Zustand für  $p = 0,2$ .



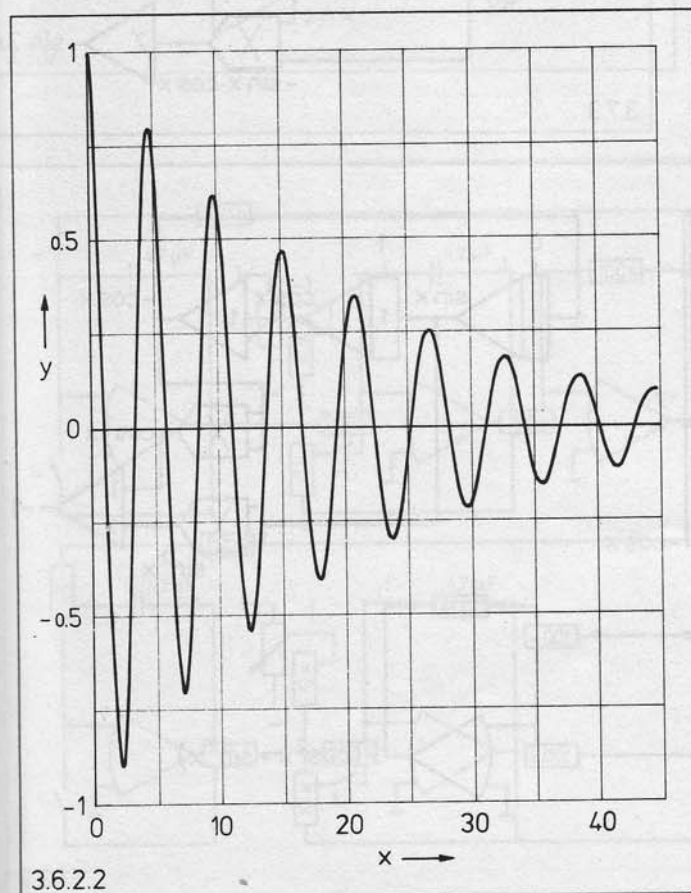




### 3.6.2 Lösung von $y'' + py' + (1 + y^2)y = 0$

Im Schaltplan erhält man aus  $y''(x)$  nach dem ersten Integrieren  $-y'(x)$ , daraus über festen Spannungsteiler und Potentiometer  $-py'(x)$  mit  $0 \leq p \leq 0,11$ . Der zweite Integrierer liefert  $y(x)$ , der Inverter  $-y(x)$  und die beiden Multiplizierer schließlich  $-y(x)^3$ .

Werden mit Beginn der Rechnung die Schalter  $S_1$  und  $S_2$  geöffnet (Anfangswerte  $y'(0) = 0$  und  $y(0)$  vorher einstellen)



und Schalter  $S_3$  geschlossen, so gilt:

$$-py'(x) - y(x) - y(x)^3 = y''(x)$$

und  $y(x)$  ist Lösung der Differentialgleichung zum vorgegebenem Anfangswert, solange kein Operationsverstärker übersteuert ist.

Für kleine Amplituden ( $y^2 \ll 1$ ) ergibt sich eine gedämpfte harmonische Schwingung entsprechend Abschnitt 3.5.7. Auch bei großen Auslenkungen treten gedämpfte Schwingungen auf, jedoch hängt jetzt die Schwingungsdauer  $T$  von der Amplitude  $y_{max}$  ab (Bild 3.6.2.1).

Bild 3.6.2.2 zeigt die Lösung  $y(x)$  der nichtlinearen Differentialgleichung für  $p = 0,1$  und für die Anfangswerte  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ . Ein Einfluß der Amplitude auf die Schwingungsdauer ist deutlich zu sehen. Löst man im Programmplan 3.6.2 die Verbindung V, so erhält man zum Vergleich die Lösung der linearen Differentialgleichung für gleiche Anfangswerte und gleiche Dämpfung.

### 3.7. Additionstheoreme für Sinus und Cosinus

Die Funktionen  $\sin x$  und  $\cos x$  gewinnt man aus dem Schaltplan des Abschnitts 3.5.5, in dem die Differentialgleichung  $y''(x) + qy(x) = 0$  programmiert ist. Als Lösung tritt eine (fast) ungedämpfte harmonische Schwingung auf mit der Periode  $X = 2\pi/\sqrt{q}$ :

$$y(x) = c_1 \cos \sqrt{q}x + c_2 \sin \sqrt{q}x$$

Durch Wahl der Anfangswerte  $y(0) = 1$  und  $y'(0) = 0$  und

mit  $q = 1$  erscheint als Lösung:

$$\begin{aligned} y(x) &= \cos x \\ y'(x) &= -\sin x \\ y''(x) &= -y(x) = -\cos x \end{aligned}$$

Diese Funktionen können weiter verarbeitet werden. Nur in den Abschnitten 3.7.1 und 3.7.8 sind die Programmpläne explizit angegeben. Bei den Beispielen 3.7.2 bis 3.7.7 werden nur die Prinzipschaltungen wiedergegeben, die entsprechend Abschnitt 3.7.1 leicht umgesetzt werden können. Es werden dabei die in den Bildern 2.1.2, 2.1.5 und 2.1.7 jeweils rechts unten angegebenen Symbole für beschaltete Operationsverstärker verwendet.

Für Beobachtung der Lösungen über längere Zeit sind die Schaltungen dieses Kapitels ungeeignet, da die verbleibende geringe Dämpfung nicht wie im Abschnitt 2.7.6 kompensiert wird.

### 3.7.1 Nachweis von $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

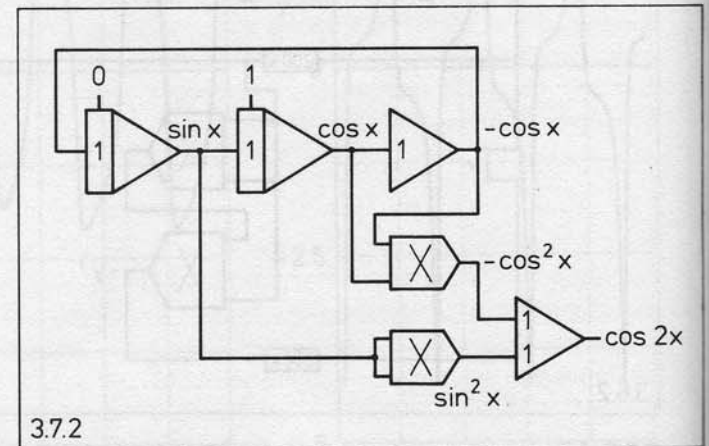
Bild 3.7.1 gibt den detaillierten Programmplan und Bild 3.7.1.1 die Prinzipschaltung zur Lösung der Aufgabe an. Im Programmplan erhält man aus  $y''(x) = -\cos x$  nach dem ersten Integrierer dann  $-y'(x) = \sin x$ , nach dem zweiten Integrierer  $y(x) = \cos x$  und nach dem Inverter  $-y(x) = -\cos x$ .

Werden zu Beginn der Rechnung die Schalter  $S_1$  und  $S_2$  geöffnet (Anfangsbedingungen  $-y'(0) = \sin 0 = 0$  und  $y(0) = \cos 0 = 1$  vorher einstellen) erscheint am Ausgang des oberen Multiplizierers  $\cos^2 x$ , am Ausgang des unteren Multiplizierers  $\sin^2 x$  und am Ausgang des nachfolgenden Summierers:

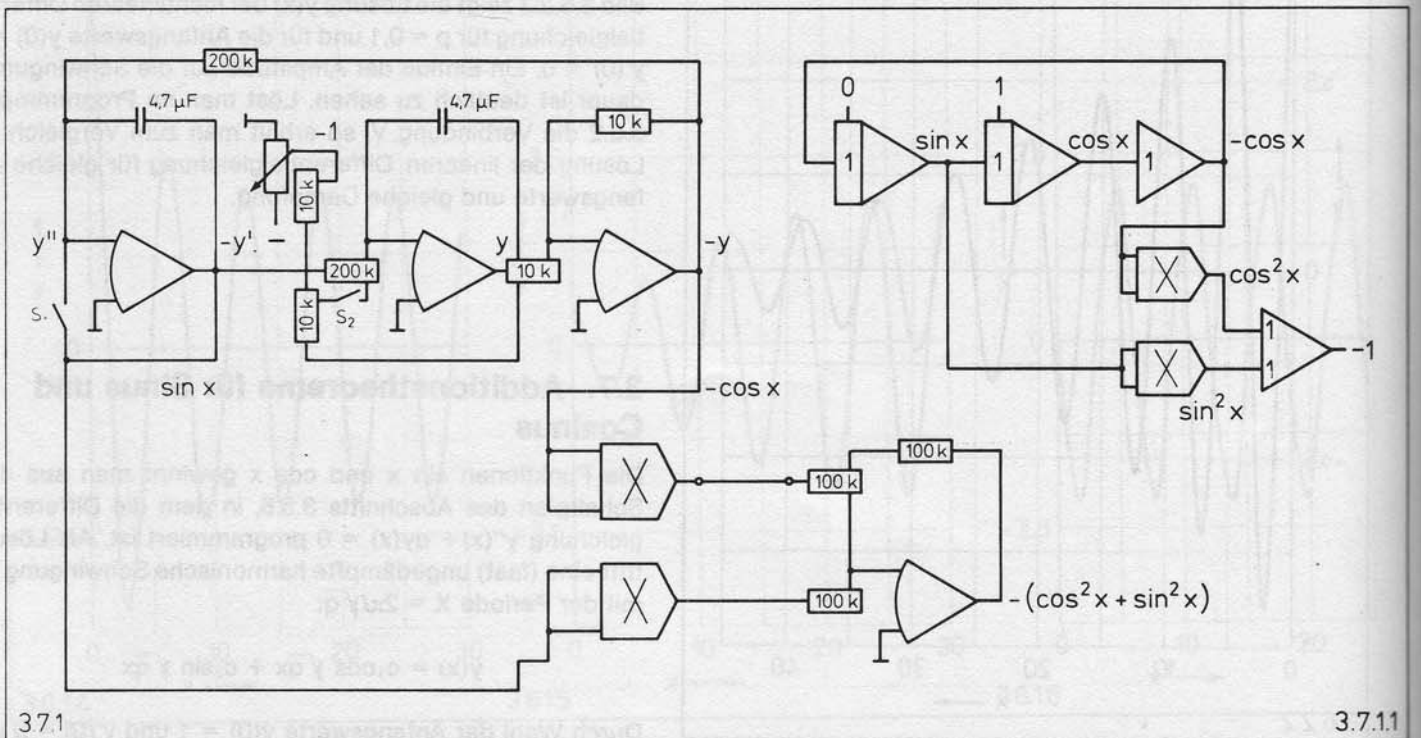
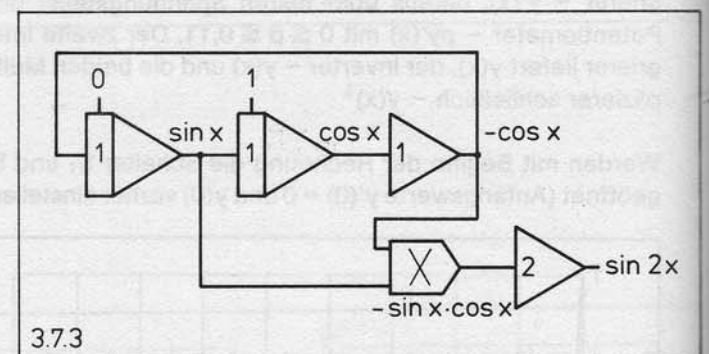
$$-(\cos^2 x + \sin^2 x) = -1$$

Bei der Beobachtung dieser Summe mit einem Meßinstrument oder TY-Schreiber bemerkt man eine geringfügige ( $< 2\%$ ) Überlagerung des Wertes  $-1$  mit einer Schwingung doppelter Frequenz, die durch Phasen- und Amplitudenfehler der erzeugten Funktionen  $\sin x$  und  $\cos x$  verursacht wird.

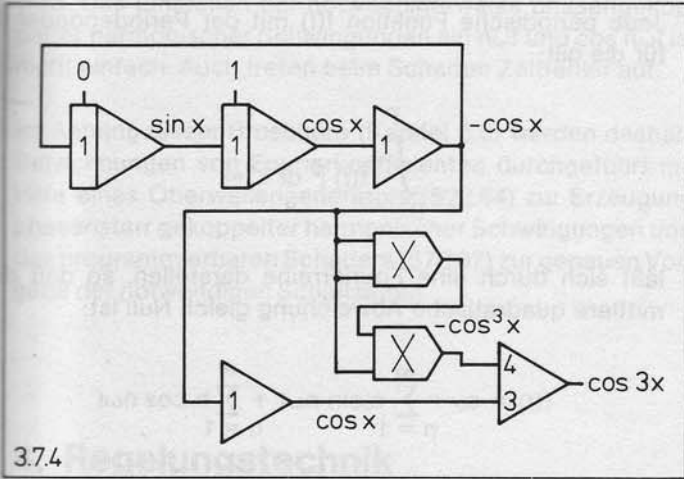
### 3.7.2 Bildung von $\cos 2x$ aus $\cos^2 x - \sin^2 x$



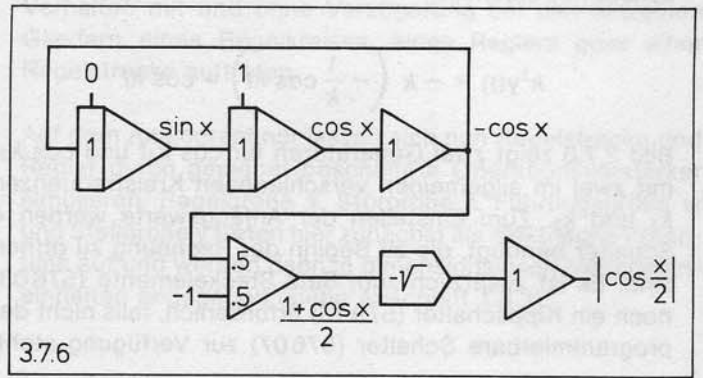
### 3.7.3 Bildung von $\sin 2x$ aus $2 \sin x \cos x$



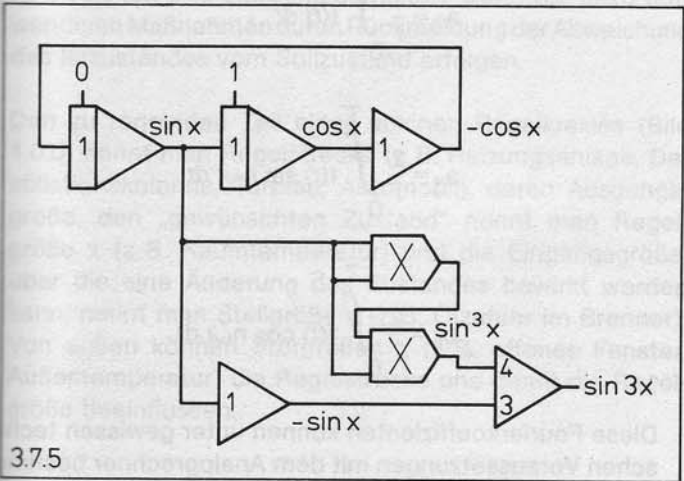
3.7.4 Bildung von  $\cos 3x$  aus  $4 \cos^3 x - 3 \cos x$



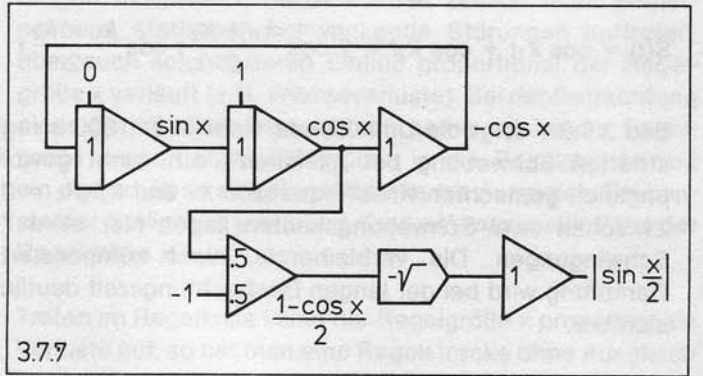
3.7.6 Bildung von  $|\cos \frac{x}{2}|$  aus  $\sqrt{(1 + \cos x)/2}$



3.7.5 Bildung von  $\sin 3x$  aus  $3 \sin x - 4 \sin^3 x$



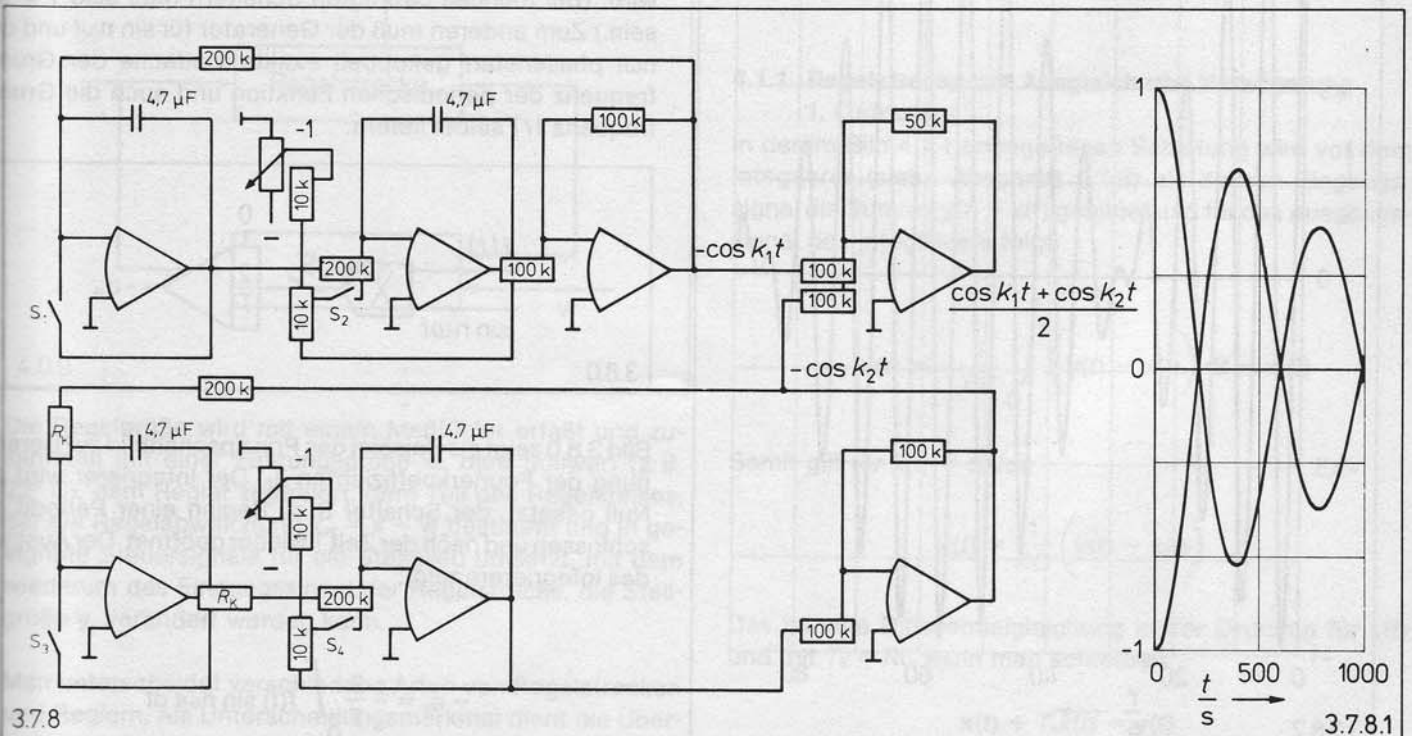
3.7.7 Bildung von  $|\sin \frac{x}{2}|$  aus  $\sqrt{(1 - \cos x)/2}$



3.7.8 Bildung von  $\cos k_1 t + \cos k_2 t$ , Schwebung

Mit  $\ddot{y}(t) = -\cos kt$  am Eingang liefert der erste Integrierer (mit Zeitkonstante  $RC = 1/k$ ) am Ausgang:

$$-k\dot{y}(t) = -k \left( -\frac{1}{k} \sin kt \right) = \sin kt$$



Am Ausgang des zweiten Integrierers (mit gleicher Zeitkonstante) erscheint:

$$k^2 y(t) = -k \left( -\frac{1}{k} \cos kt \right) = \cos kt$$

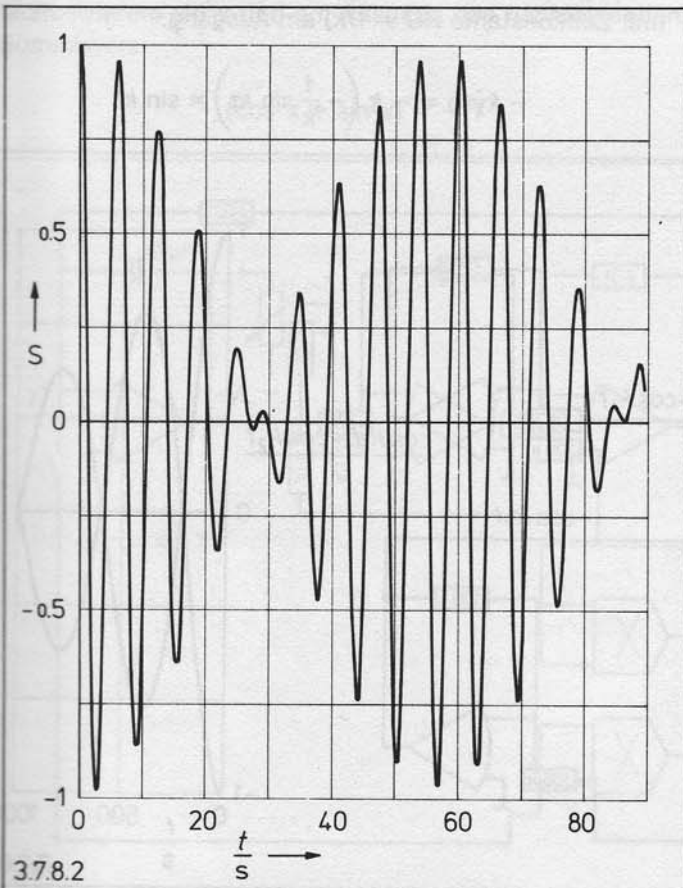
Bild 3.7.8 zeigt zwei Generatoren für  $\cos k_1 t$  und  $\cos k_2 t$  mit zwei im allgemeinen verschiedenen Kreisfrequenzen  $k_1$  und  $k_2$ . Zum Einstellen der Anfangswerte werden 4 Schalter benötigt, die zu Beginn der Rechnung zu öffnen sind. Es ist zusätzlich zum Satz Steckelemente (57603) noch ein Kippschalter (57913) erforderlich, falls nicht der programmierbare Schalter (57607) zur Verfügung steht.

Die Frequenzen der beiden Generatoren sind nie exakt gleich, es treten deshalb am Ausgang des Summierers rechts oben Schwebungen auf. Es gilt:

$$S(t) = \cos k_1 t + \cos k_2 t = 2 \cos \frac{k_1 + k_2}{2} t \cos \frac{k_1 - k_2}{2} t$$

Bild 3.7.8.1 zeigt die Umhüllende einer über 1000 s registrierten Schwebung bei „gleichen“, d.h. nicht gewollt ungleich gemachten Kreisfrequenzen  $k_1$  und  $k_2$  ( $R_k = 0$ ). Zwischen zwei Schwebungsknoten liegen hier etwa 70 Schwingungen. Die verbleibende, nicht kompensierte Dämpfung wird bei der langen Beobachtungszeit deutlich sichtbar.

Werden beide Kreisfrequenzen deutlich ungleich gemacht, z. B.  $k_2 = 1,1 k_1$  ( $R_k = 20 \text{ k}\Omega$ ), so verringert sich die Periodendauer der Schwebung, es erscheinen weniger Schwingungen zwischen zwei Schwebungsknoten (Bild 3.7.8.2).



### 3.8. Fourieranalyse

Jede periodische Funktion  $f(t)$  mit der Periodendauer  $T$ , für die gilt:

$$\int_0^T |f(t)|^2 dt < \infty$$

läßt sich durch eine Fourierreihe darstellen, so daß die mittlere quadratische Abweichung gleich Null ist:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos n\omega t$$

mit  $\omega = 2\pi/T$  und den Fourierkoeffizienten:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t dt$$

Diese Fourierkoeffizienten können unter gewissen technischen Voraussetzungen mit dem Analogrechner bestimmt werden. Die Periodendauer  $T$  muß einmal so groß sein, daß sie mit den zur Verfügung stehenden Schaltern gut bewältigt wird. (Bei manuell betätigten Schaltern muß also  $T > 5 \text{ s}$  sein.) Zum anderen muß der Generator für  $\sin n\omega t$  und  $\cos n\omega t$  phasenstarr gekoppelt exakte Vielfache der Grundfrequenz der periodischen Funktion und auch die Grundfrequenz  $1/T$  selber liefern.

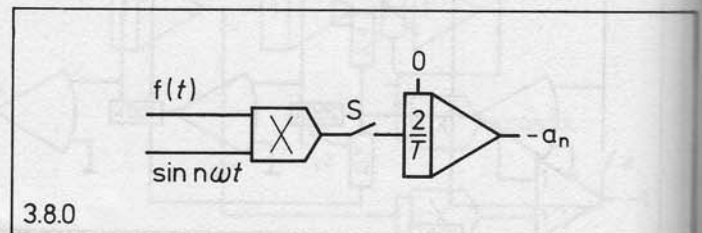


Bild 3.8.0 zeigt als Beispiel das Prinzipschaltbild zur Berechnung der Fourierkoeffizienten  $a_n$ . Der Integrierer wird auf Null gesetzt, der Schalter  $S$  zu Beginn einer Periode geschlossen und nach der Zeit  $T$  wieder geöffnet. Der Ausgang des Integrierers zeigt:

$$-a_n = -\frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t dt$$

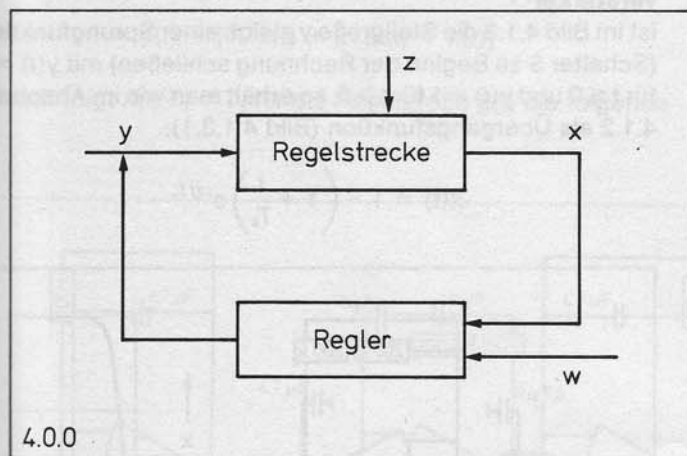
Als periodische Funktion kann man ein Rechteck- oder Dreieckssignal verwenden, wie es aus Schaltung 2.7.3 gewonnen wird. Das Einstellen der notwendigerweise phasengekoppelter harmonischer Schwingungen  $\sin n\omega t$  und  $\cos n\omega t$  ist nicht einfach. Auch treten beim Schalten Zeitfehler auf.

Im Anhang dieser Broschüre (Kapitel 6.5) werden deshalb Berechnungen von Fourierkoeffizienten durchgeführt mit Hilfe eines Oberwellengenerators (522 54) zur Erzeugung phasenstarr gekoppelter harmonischer Schwingungen und des programmierbaren Schalters (576 07) zur genauen Vorgabe der notwendigen Schaltzeiten.

## 4. Regelungstechnik

Regelung ist das Bestreben, einen gewünschten Zustand zu erreichen und aufrechtzuerhalten, wenn die dazu notwendigen Maßnahmen durch Rückmeldung der Abweichung des Istzustandes vom Sollzustand erfolgen.

Den zu regelnden Teil eines solchen Regelkreises (Bild 4.0.0) nennt man Regelstrecke (z. B. Heizungsanlage, Destillationskolonne, Turbine, Automobil), deren Ausgangsgröße, den „gewünschten Zustand“ nennt man Regelgröße  $x$  (z. B. Raumtemperatur) und die Eingangsgröße, über die eine Änderung des Zustandes bewirkt werden kann, nennt man Stellgröße  $y$  (z. B. Ölzufuhr im Brenner). Von außen können Störgrößen  $z$  (z. B. offenes Fenster, Außentemperatur) die Regelstrecke und damit die Regelgröße beeinflussen.



Die Regelgröße wird mit einem Meßfühler erfaßt und zusammen mit einer Führungsgröße  $w$ , dem Sollwert (z. B.  $22^\circ \text{C}$ ), dem Regler zugeführt, dem Teil des Regelkreises, der die Regelabweichung  $x_w = x - w$  bestimmt und in geeignete Steuersignale für ein Stellglied umsetzt, mit dem wiederum das Eingangssignal der Regelstrecke, die Stellgröße  $y$ , verändert werden kann.

Man unterscheidet verschiedene Arten von Regelstrecken und Reglern. Als Unterscheidungsmerkmal dient die Über-

gangsfunktion als Antwort auf eine Sprungfunktion. Es kann z. B. proportionales, integrales oder differentiales Verhalten mit und ohne Verzögerung bei den einzelnen Gliedern eines Regelkreises, eines Reglers oder einer Regelstrecke auftreten.

Auf dem Analogrechner lassen sich nun Regelstrecke und Regler durch geeignet beschaltete Operationsverstärker simulieren. Regelgröße  $x$ , Störgröße  $z$ , Führungsgröße  $w$  und Stellgröße  $y$  treten hier zunächst als elektrische Potentiale auf und werden dann in dimensionslosen Maschineneinheiten angegeben (siehe Abschnitt 1.3.2).

### 4.1. Regelstrecken mit Ausgleich

Regelstrecken sind im allgemeinen irgendwelchen Störungen ausgesetzt. Dabei können zeitlich nicht vorhersehbare, statistisch schwankende Störungen auftreten, aber auch solche, deren Einfluß proportional der Regelgröße  $x$  verläuft (z. B. Wärmeverluste). Bei der Betrachtung eines Regelkreises bezieht man gerne solche der Regelgröße proportionale Störgrößen in die Regelstrecke mit ein und erhält so eine Regelstrecke mit Ausgleich. Bei konstanter Stellgröße  $y$  existiert dann ein maximaler Wert der Regelgröße  $x$ .

Treten im Regelkreis keine der Regelgröße  $x$  proportionale Verluste auf, so hat man eine Regelstrecke ohne Ausgleich (siehe Kapitel 4.2). Eine einmalige Änderung der Stellgröße  $y$  bewirkt dann eine fortlaufend anwachsende Änderung der Regelgröße  $x$ .

Auf eine Änderung der Stellgröße  $y$  erscheint die Änderung der Regelgröße  $x$  meist nicht spontan sondern mit einer gewissen Verzögerung. Solche „Totzeiten“ oder auch „Verzugszeiten“ können ebenfalls auf dem Analogrechner nachgebildet werden.

#### 4.1.1 Regelstrecke mit Ausgleich und Verzögerung 1. Ordnung

In der im Bild 4.1.1 angegebenen Schaltung wird vor dem Integrierer (siehe Abschnitt 2.1.6) als dessen Eingangssignal die Summe  $y(t) - x(t)$  gebildet und für das Ausgangssignal des Integrierers folgt:

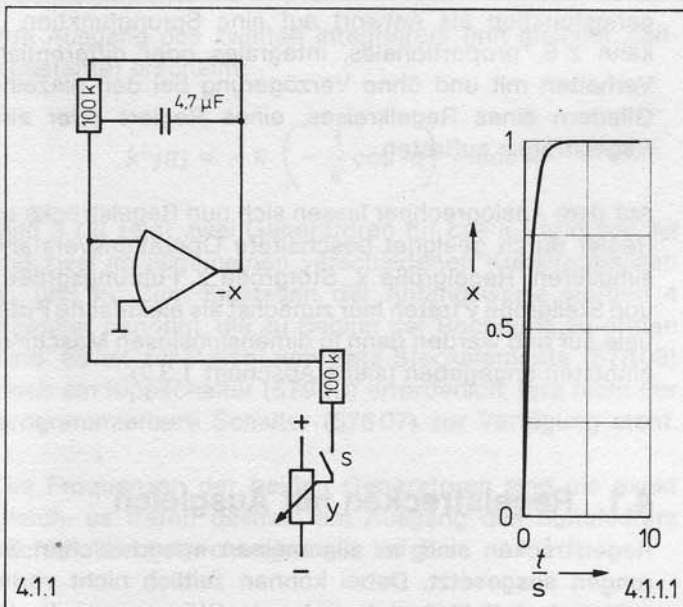
$$- \dot{x}(t) = - \frac{1}{RC} \int_0^t (y(t) - x(t)) dt - x(0)$$

Somit gilt für  $\dot{x}(t) = dx/dt$ :

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{RC} (y(t) - x(t))$$

Das ist eine Differentialgleichung erster Ordnung für  $x(t)$  und mit  $T_s = RC$  kann man schreiben:

$$x(t) + T_s \dot{x}(t) = y(t)$$



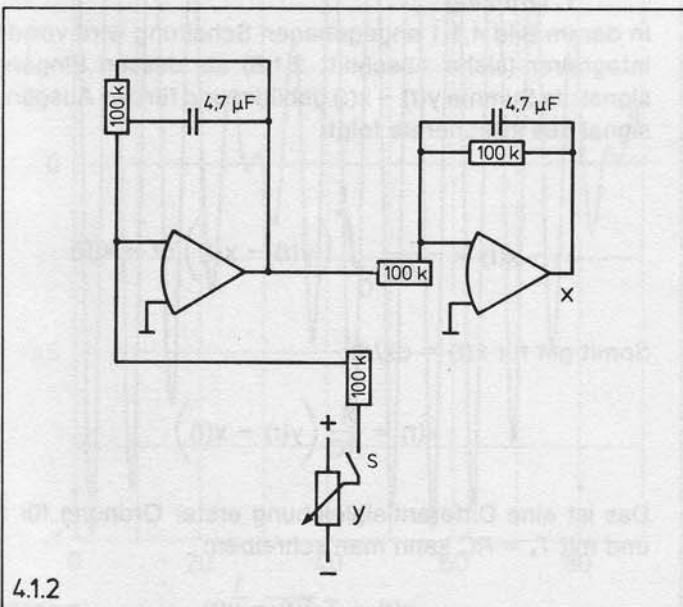
Ist die Stellgröße  $y(t)$  gleich einer Sprungfunktion (Schalter S zu Beginn der Rechnung schließen) mit  $y(t) = 0$  für  $t \leq 0$  und  $y(t) = 1$  für  $t > 0$ , so erhält man als Übergangsfunktion die Lösung (Bild 4.1.1.1):

$$x(t) = 1 - e^{-t/T_s}$$

#### 4.1.2 Regelstrecke mit Ausgleich und Verzögerung 2. Ordnung

Koppelt man zwei Regelstrecken mit Ausgleich und Verzögerung 1. Ordnung hintereinander (Bild 4.1.2), so folgt entsprechend Abschnitt 4.1.1 für das Ausgangssignal des linken Integrierers (mit Zeitkonstante  $T_1$ ):

$$-v(t) = -\frac{1}{T_1} \int_0^t (y(t) - v(t)) dt - v(0)$$



und somit:

$$T_1 \dot{v}(t) = y(t) - v(t)$$

Für das Ausgangssignal des rechten Integrierers (mit Zeitkonstante  $T_2$ ) gilt entsprechend:

$$x(t) = -\frac{1}{T_2} \int_0^t (-v(t) + x(t)) dt + x(0)$$

und

$$T_2 \dot{x}(t) + x(t) = v(t)$$

Differenziert man einmal und multipliziert mit  $T_1$ , so erhält man:

$$T_1 T_2 \ddot{x}(t) + T_1 \dot{x}(t) = T_1 \dot{v}(t) = y(t) - v(t) = y(t) - [T_2 \dot{x}(t) + x(t)]$$

Somit gilt für  $x(t)$  die folgende Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$T_1 T_2 \ddot{x}(t) + (T_1 + T_2) \dot{x}(t) + x(t) = y(t)$$

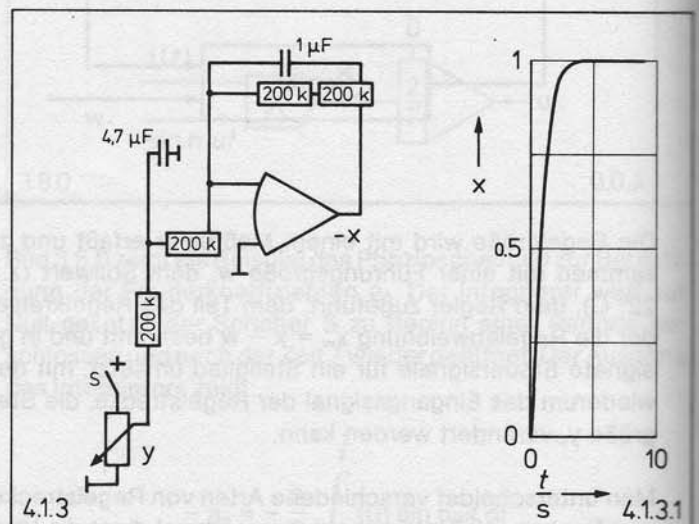
Ist die Stellgröße  $y(t)$  gleich einer Sprungfunktion (Schalter S zu Beginn der Rechnung schließen) mit  $y(t) = 0$  für  $t \leq 0$  und  $y(t) = 1$  für  $t > 0$  und ist  $T_1 = T_2 = T_s$ , so erhält man als Übergangsfunktion die Lösung (Bild 4.1.3.1):

$$x(t) = 1 - \left(1 + \frac{t}{T_s}\right) e^{-t/T_s}$$

#### 4.1.3 Regelstrecke 2. Ordnung mit einem Operationsverstärker

Ist im Bild 4.1.3 die Stellgröße  $y$  gleich einer Sprungfunktion (Schalter S zu Beginn der Rechnung schließen) mit  $y(t) = 0$  für  $t \leq 0$  und  $y(t) = 1$  für  $t > 0$ , so erhält man wie im Abschnitt 4.1.2 als Übergangsfunktion (Bild 4.1.3.1):

$$x(t) = 1 - \left(1 + \frac{t}{T_s}\right) e^{-t/T_s}$$





mit der Zeitkonstanten  $T_s = 0,5$  s (genauer 0,47 s). Sie ist gleich den Zeitkonstanten der Abschnitte 4.1.1 und 4.1.2.

Ganz streng gilt die oben angegebene Übergangsfunktion nur, wenn der Kondensator ( $1 \mu\text{F}$ ) in der Rückführung ersetzt wird durch  $1,17 \mu\text{F}$ . Steht die Ergänzung Steckelemente (57604) zur Verfügung, kann dazu dem Kondensator von  $1 \mu\text{F}$  noch eine Serienschaltung von  $1 \mu\text{F}$  mit  $220 \text{ nF}$  parallel geschaltet werden.

Aus Platzgründen werden bei den Regelstrecken mit Ausgleich und Verzögerung höherer Ordnung der Abschnitte 4.1.4 bis 4.1.9 ein oder auch zwei entsprechend Bild 4.1.3 beschaltete Operationsverstärker zur Simulation einer Verzögerung jeweils 2. Ordnung verwendet.

#### 4.1.4 Regelstrecke mit Ausgleich und Verzögerung 3. Ordnung

Koppelt man eine Regelstrecke 1. Ordnung (entsprechend Bild 4.1.1) mit einer Regelstrecke 2. Ordnung (entsprechend Bild 4.1.3) hintereinander (siehe Bild 4.1.4), so gilt für das Ausgangssignal  $-v(t)$  des linken Integrierers:

$$T_1 \dot{v}(t) = y(t) - v(t)$$

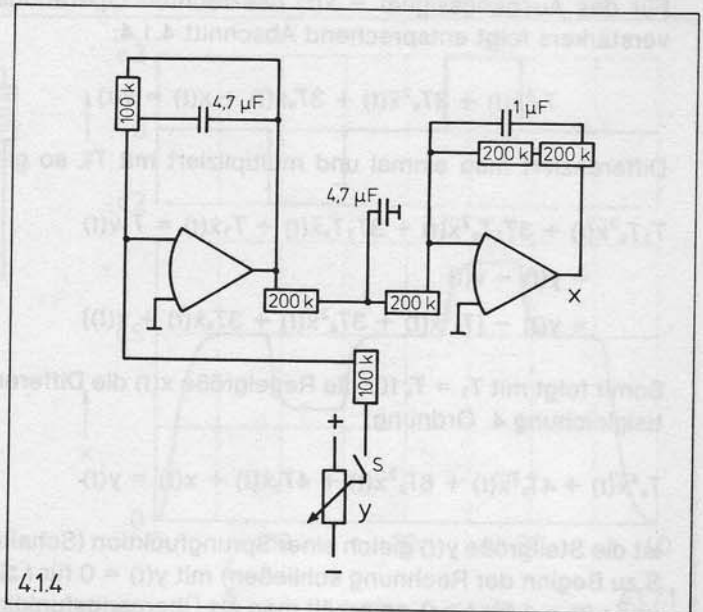
Für das Ausgangssignal  $x(t)$  des rechten Operationsverstärkers folgt:

$$T_s^2 \ddot{x}(t) + 2T_s \dot{x}(t) + x(t) = v(t)$$

Differenziert und multipliziert man mit  $T_1$ , so folgt:

$$T_1 T_s^2 \ddot{x}(t) + 2T_1 T_s \dot{x}(t) + T_1 x(t) = T_1 \dot{v}(t) = y(t) - v(t) \\ = y(t) - [T_s^2 \ddot{x}(t) + 2T_s \dot{x}(t) + x(t)]$$

Somit folgt mit  $T_1 = T_s$  für die Regelgröße  $x(t)$  die folgende



Differentialgleichung 3. Ordnung:

$$T_s^3 \dddot{x}(t) + 3T_s^2 \ddot{x}(t) + 3T_s \dot{x}(t) + x(t) = y(t)$$

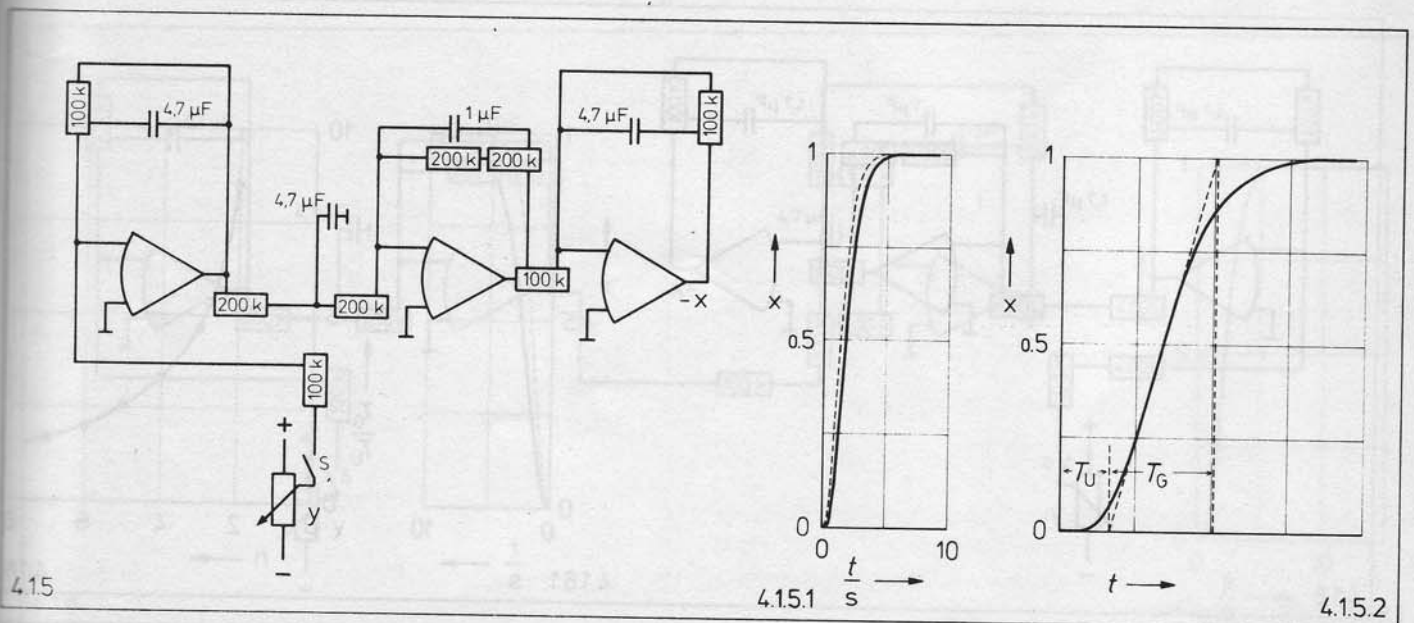
Ist die Stellgröße  $y(t)$  gleich einer Sprungfunktion (Schalter S zu Beginn der Rechnung schließen) mit  $y(t) = 0$  für  $t \leq 0$  und  $y(t) = 1$  für  $t > 0$ , so erhält man als Übergangsfunktion die gestrichelte Kurve im Bild 4.1.5.1.

$$x(t) = 1 - \left(1 + \frac{t}{T_s} + \frac{1}{2} \frac{t^2}{T_s^2}\right) e^{-t/T_s}$$

#### 4.1.5 Regelstrecke mit Ausgleich und Verzögerung 4. Ordnung

Koppelt man eine Regelstrecke 1. Ordnung (links) mit einer Regelstrecke 3. Ordnung (mitte und rechts) hintereinander (siehe Bild 4.1.5), so gilt für das Ausgangssignal  $-v(t)$  des linken Integrierers:

$$T_1 \dot{v}(t) = y(t) - v(t)$$



4.15

4.1.5.1

4.1.5.2

Für das Ausgangssignal  $-x(t)$  des rechten Operationsverstärkers folgt entsprechend Abschnitt 4.1.4:

$$T_s^3 \ddot{x}(t) + 3T_s^2 \dot{x}(t) + 3T_s \dot{x}(t) + x(t) = v(t)$$

Differenziert man einmal und multipliziert mit  $T_1$ , so gilt:

$$\begin{aligned} T_1 T_s^3 \dddot{x}(t) + 3T_1 T_s^2 \ddot{x}(t) + 3T_1 T_s \dot{x}(t) + T_1 x(t) &= T_1 \dot{v}(t) \\ &= y(t) - v(t) \\ &= y(t) - [T_s^3 \ddot{x}(t) + 3T_s^2 \dot{x}(t) + 3T_s \dot{x}(t) + x(t)] \end{aligned}$$

Somit folgt mit  $T_1 = T_s$  für die Regelgröße  $x(t)$  die Differentialgleichung 4. Ordnung:

$$T_s^4 \dddot{x}(t) + 4T_s^3 \ddot{x}(t) + 6T_s^2 \dot{x}(t) + 4T_s \dot{x}(t) + x(t) = y(t)$$

Ist die Stellgröße  $y(t)$  gleich einer Sprungfunktion (Schalter S zu Beginn der Rechnung schließen) mit  $y(t) = 0$  für  $t \leq 0$  und  $y(t) = 1$  für  $t > 0$ , so erhält man als Übergangsfunktion die ausgezogene Kurve im Bild 4.1.5.1.

Sucht man nach allgemeinen Eigenschaften der Übergangsfunktion einer Regelstrecke mit Ausgleich und Verzögerung, so kann man durch Einzeichnen der Wendepunktstangente zwei charakteristische Zeiten definieren (Bild 4.1.5.2). Die Verzugszeit  $T_U$  gibt an, wie lange nach dem Sprung der Stellgröße am Eingang einer Regelstrecke sich die Regelgröße am Ausgang noch nicht wesentlich verändert. Die Ausgleichszeit  $T_G$  gibt das Zeitintervall an, in dem dann praktisch der Übergang der Regelgröße von einem Gleichgewichtszustand zum anderen erfolgt.

Das Verhältnis  $T_G/T_U$  gilt als Maß für die Regelbarkeit einer Strecke. Ist die Verzugszeit  $T_U$  groß, folgt dann aber der Ausgleich sehr rasch, ist die Strecke schwer zu regeln. Die Rückmeldung auf eine Änderung der Stellgröße erfolgt zu spät. Gut regelbar sind Strecken mit geringer Verzögerung, mit einem großen Verhältnis  $T_G/T_U$  (z. B.  $T_G/T_U > 6$ ).

Das Verhältnis  $T_G/T_U$  und damit die Regelbarkeit nimmt mit der Ordnung einer Regelstrecke ab. Es ist auch abhängig vom Verhältnis der Zeitkonstanten innerhalb einer Regelstrecke. Um das nachzuweisen, wird im nächsten Abschnitt  $T_1 = 3T_s$  gesetzt. Bild 4.1.6.2 zeigt die Werte von  $T_G/T_U$  für Regelstrecken mit Ausgleich und Verzögerung 2. bis 7. Ordnung bei gleichen Zeitkonstanten innerhalb einer Regelstrecke.

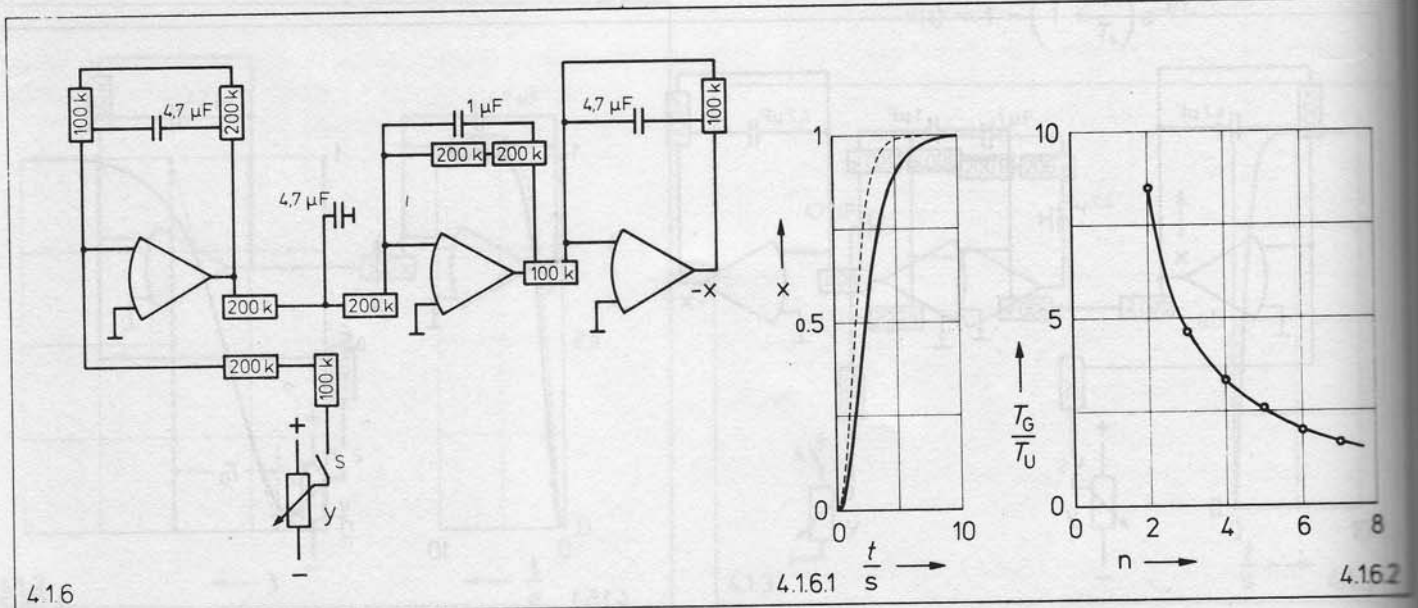
#### 4.1.6 Regelstrecke 4. Ordnung mit ungleichen Zeitkonstanten

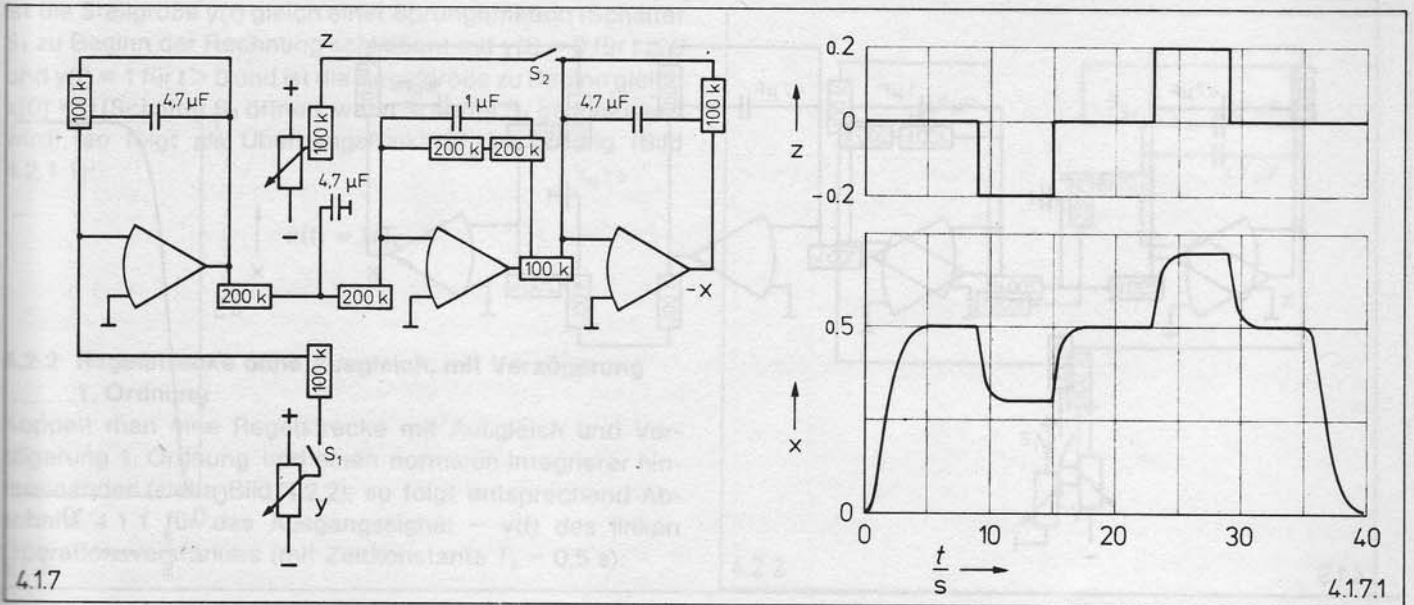
Im Bild 4.1.6 ist eine Regelstrecke mit Ausgleich und Verzögerung 4. Ordnung wiedergegeben mit  $T_1 = 3T_s$ . Für die Differentialgleichung folgt entsprechend Abschnitt 4.1.5

$$3T_s^4 \dddot{x}(t) + 10T_s^3 \ddot{x}(t) + 12T_s^2 \dot{x}(t) + 6T_s \dot{x}(t) + x(t) = y(t)$$

Ist die Stellgröße  $y(t)$  gleich einer Sprungfunktion (Schalter S zu Beginn der Rechnung schließen) mit  $y(t) = 0$  für  $t \leq 0$  und  $y(t) = 1$  für  $t > 0$ , so erhält man als Übergangsfunktion die ausgezogene Kurve im Bild 4.1.6.1. Zum Vergleich ist gestrichelt noch einmal die Übergangsfunktion der Regelstrecke mit gleichen Zeitkonstanten aus Abschnitt 4.1.5 eingezeichnet.

Der Ausgleich der Regelgröße  $x(t)$  erfolgt für  $T_1 = 3T_s$  wesentlich langsamer,  $T_G$  hat stark zugenommen, die Verzugszeit dagegen kaum. Das Verhältnis  $T_G/T_U$  ist größer geworden als bei  $T_1 = T_s$ . Braucht man zur Simulation einer Regelstrecke kleinere Werte für  $T_G/T_U$ , so muß man Regelstrecken noch höherer Ordnung nehmen. Bild 4.1.6.2 zeigt die Werte von  $T_G/T_U$  für Regelstrecken mit Ausgleich und Verzögerung 2. bis 7. Ordnung bei gleichen Zeitkonstanten innerhalb einer Regelstrecke (siehe auch Abschnitte 4.1.8 und 4.1.9).





#### 4.1.7 Regelstrecke 4. Ordnung mit Störgröße

Störungen, deren Einflüsse proportional der Regelgröße verlaufen, sind entsprechend der Vorbemerkung zu Kapitel 4.1 in die Regelstrecken einbezogen. So entstehen Regelstrecken mit Ausgleich, deren Übergangsfunktionen in den anderen Abschnitten dieses Kapitels gezeigt werden. Es können aber auch andere, der Regelgröße nicht proportionale Störgrößen auftreten (z. B. plötzlich geöffnetes Fenster). Diese greifen irgendwo in die Regelstrecke ein (oder auch in Meßfühler, Regler, Stellgröße).

Im Bild 4.1.7 wird die Störgröße  $z$  vor dem letzten Operationsverstärker, vor dem letzten Regelstreckenglied mit Ausgleich und Verzögerung 1. Ordnung zugeführt. Dies ist willkürlich, soll aber für die Beispiele von kompletten Regelkreisen im Kapitel 4.3 einfacherhalber beibehalten werden (z. B. wirkt das Öffnen eines Fensters auch verzögert auf die Raumtemperatur).

Bild 4.1.7.1 zeigt den Verlauf der Regelgröße  $x(t)$ . Zunächst wird mit Schalter  $S_1$  im Schaltplan 4.7.1 die Stellgröße  $y = 0,5$  eingeschaltet. Die Regelgröße erreicht nach einigen

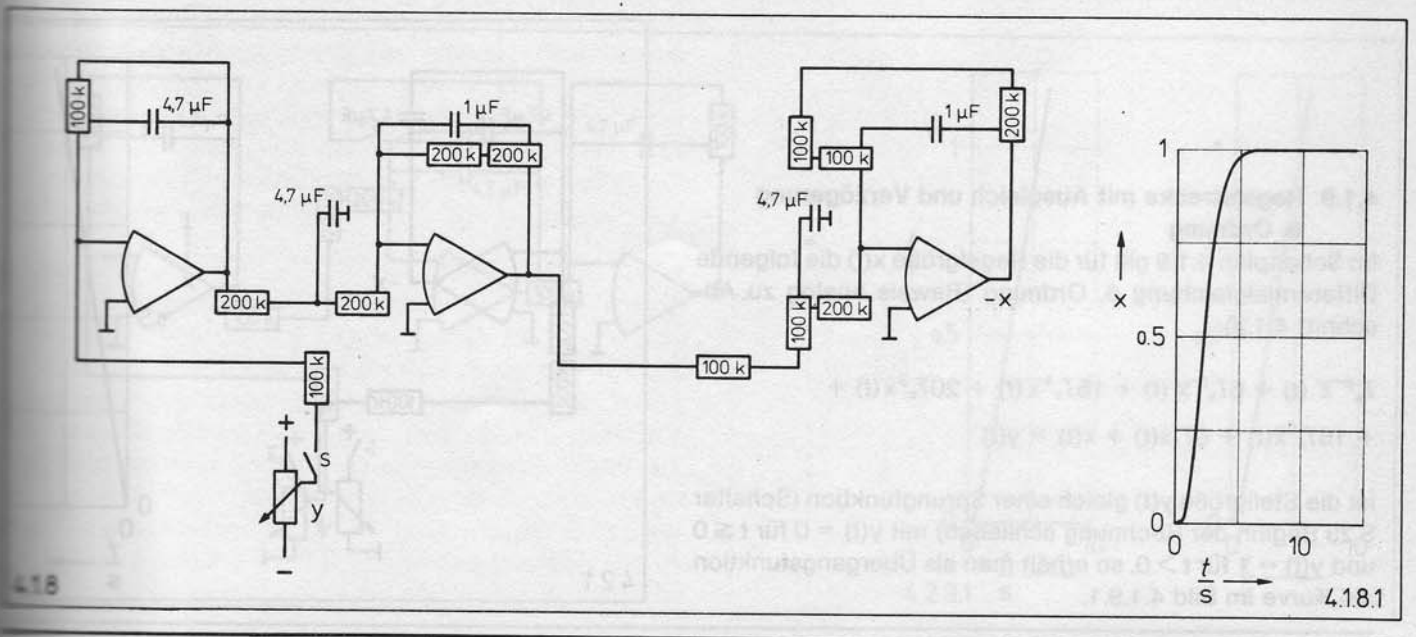
Sekunden ihren Gleichgewichtswert bei 0,5. Nach Zuschalten ( $S_2$  schließen) der Störgröße (hier  $z = -0,2$  und  $z = +0,2$ ) erscheint nach einer geringen Verzögerung ein neuer Gleichgewichtswert für die Regelgröße  $x$ . Wird Störgröße  $z$  wieder abgeschaltet, so stellt sich nach kurzer Zeit wieder der alte Gleichgewichtswert von  $x$  ein.

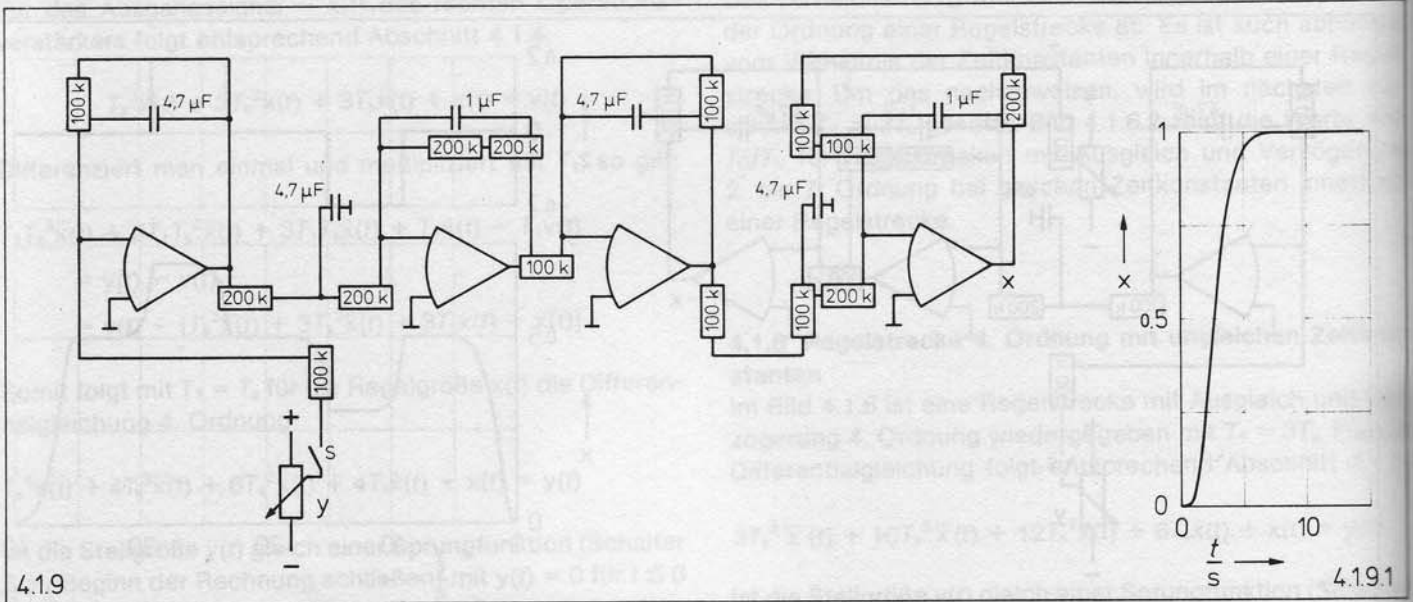
In den Beispielen der Abschnitte 4.3.1 bis 4.3.5 wird die hier beschriebene Regelstrecke durch Führungsgröße (Sollwert) und geeignet aufgebaute Regler zu kompletten Regelkreisen ergänzt, um den Einfluß von Störgrößen auf die Regelgröße möglichst gut auszugleichen, auszuregeln.

#### 4.1.8 Regelstrecke mit Ausgleich und Verzögerung 5. Ordnung

Koppelt man eine Regelstrecke 1. Ordnung (links) mit einer Regelstrecke 4. Ordnung (mitte und rechts) entsprechend Schaltplan 4.1.8, so gilt für das Ausgangssignal  $-v(t)$  des linken Integrierers:

$$T_1 \dot{v}(t) = y(t) - v(t)$$





Für das Ausgangssignal  $-x(t)$  des rechten Operationsverstärkers folgt entsprechend Abschnitt 4.1.5:

$$T_s^4 \ddot{\ddot{x}}(t) + 4T_s^3 \ddot{\ddot{x}}(t) + 6T_s^2 \ddot{\ddot{x}}(t) + 4T_s \dot{\ddot{x}}(t) + x(t) = v(t)$$

Differenziert man einmal und multipliziert mit  $T_1$ , so gilt:

$$\begin{aligned} T_1 T_s^4 \ddot{\ddot{\dot{x}}}(t) + 4T_1 T_s^3 \ddot{\ddot{\dot{x}}}(t) + 6T_1 T_s^2 \ddot{\ddot{\dot{x}}}(t) + 4T_1 T_s \ddot{\dot{x}}(t) + T_1 \dot{x}(t) \\ = T_1 \dot{v}(t) = y(t) - v(t) \\ = y(t) - [T_s^4 \ddot{\ddot{x}}(t) + 4T_s^3 \ddot{\ddot{x}}(t) + 6T_s^2 \ddot{\ddot{x}}(t) + 4T_s \dot{\ddot{x}}(t) + x(t)] \end{aligned}$$

Somit gilt mit  $T_1 = T_s$  für die Regelgröße  $x(t)$  die folgende Differentialgleichung 5. Ordnung:

$$T_s^5 \ddot{\ddot{\ddot{\dot{x}}}}(t) + 5T_s^4 \ddot{\ddot{\ddot{\dot{x}}}}(t) + 10T_s^3 \ddot{\ddot{\ddot{\dot{x}}}}(t) + 10T_s^2 \ddot{\ddot{\dot{x}}}(t) + 5T_s \dot{x}(t) + x(t) = y(t)$$

Ist die Stellgröße  $y(t)$  gleich einer Sprungfunktion (Schalter S zu Beginn der Rechnung schließen) mit  $y(t) = 0$  für  $t \leq 0$  und  $y(t) = 1$  für  $t > 0$ , so erhält man als Übergangsfunktion die Kurve im Bild 4.1.8.1.

## 4.2. Regelstrecken ohne Ausgleich

Treten im Regelkreis keine der Regelgröße proportionale Verluste auf, so hat man eine Regelstrecke ohne Ausgleich. Eine einmalige Änderung der Stellgröße  $y$  bewirkt dann eine fortlaufend anwachsende Änderung der Regelgröße  $x$ . Die einfachste Regelstrecke ohne Ausgleich ist ein Integrierer entsprechend Abschnitt 2.1.6. Ebenso wie bei den Regelstrecken mit Ausgleich tritt jedoch auf eine Änderung der Stellgröße die Änderung der Regelgröße meist nicht spontan sondern mit einer gewissen Verzögerung auf.

### 4.2.1 Verzögerungsfreie Regelstrecke ohne Ausgleich

Das Verhalten eines Integrierers ist in Abschnitt 2.1.6 beschrieben. Wird im Bild 4.2.1 der Schalter  $S_1$  zu Beginn der Rechnung geschlossen, folgt für das Ausgangssignal  $-x(t)$  des Integrierers (mit Zeitkonstante  $T_1 = 5$  s):

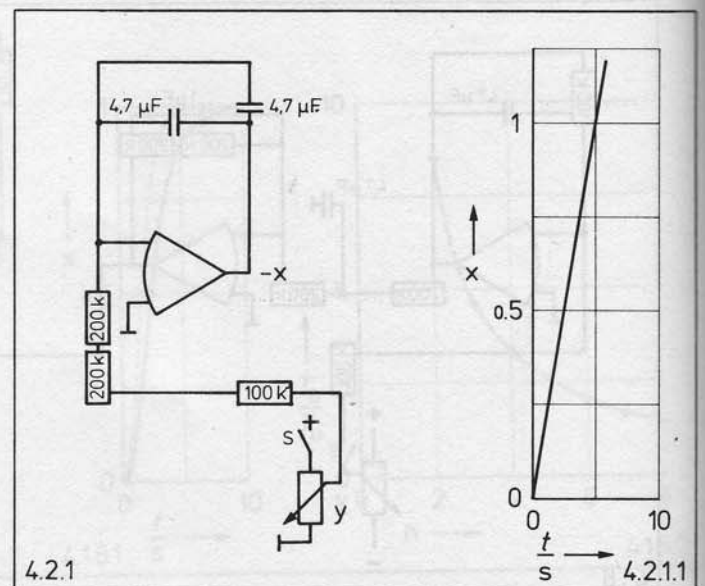
$$-x(t) = -\frac{1}{T_1} \int_0^t y(t) dt - x(0)$$

### 4.1.9 Regelstrecke mit Ausgleich und Verzögerung 6. Ordnung

Im Schaltplan 4.1.9 gilt für die Regelgröße  $x(t)$  die folgende Differentialgleichung 6. Ordnung (Beweis analog zu Abschnitt 4.1.8):

$$T_s^6 \ddot{\ddot{\ddot{\ddot{\dot{x}}}}}(t) + 6T_s^5 \ddot{\ddot{\ddot{\ddot{\dot{x}}}}}(t) + 15T_s^4 \ddot{\ddot{\ddot{\dot{x}}}}(t) + 20T_s^3 \ddot{\ddot{\dot{x}}}(t) + 15T_s^2 \ddot{\dot{x}}(t) + 6T_s \dot{x}(t) + x(t) = y(t)$$

Ist die Stellgröße  $y(t)$  gleich einer Sprungfunktion (Schalter S zu Beginn der Rechnung schließen) mit  $y(t) = 0$  für  $t \leq 0$  und  $y(t) = 1$  für  $t > 0$ , so erhält man als Übergangsfunktion die Kurve im Bild 4.1.9.1.



Ist die Stellgröße  $y(t)$  gleich einer Sprungfunktion (Schalter  $S_1$  zu Beginn der Rechnung schließen) mit  $y(t) = 0$  für  $t \leq 0$  und  $y(t) = 1$  für  $t > 0$  und ist die Regelgröße zu Beginn gleich  $x(0) = 0$  (Schalter  $S_2$  öffnen, wenn Schalter  $S_1$  geschlossen wird), so folgt als Übergangsfunktion die Lösung (Bild 4.2.1.1):

$$x(t) = t/T_1$$

#### 4.2.2 Regelstrecke ohne Ausgleich, mit Verzögerung 1. Ordnung

Koppelt man eine Regelstrecke mit Ausgleich und Verzögerung 1. Ordnung und einen normalen Integrierer hintereinander (siehe Bild 4.2.2), so folgt entsprechend Abschnitt 4.1.1 für das Ausgangssignal  $-v(t)$  des linken Operationsverstärkers (mit Zeitkonstante  $T_s = 0,5$  s):

$$T_s \dot{v}(t) = y(t) - v(t)$$

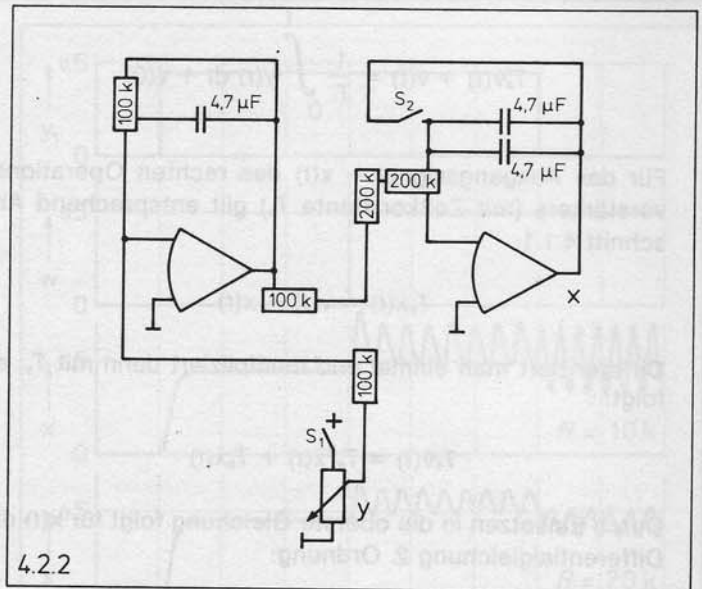
Für das Ausgangssignal  $x(t)$  des rechten Integrierers gilt entsprechend Abschnitt 4.2.1:

$$x(t) = \frac{1}{T_1} \int_0^t v(t) dt + x(0)$$

Bildet man daraus  $T_s \dot{x}(t) + x(t)$ , so folgt für  $x(t)$  eine Differentialgleichung 1. Ordnung:

$$T_s \dot{x}(t) + x(t) = \frac{T_s}{T_1} v(t) + \frac{1}{T_1} \int_0^t v(t) dt + x(0)$$

$$= \frac{T_s}{T_1} v(t) + \frac{1}{T_1} \int_0^t (y(t) - T_s \dot{v}(t)) dt + x(0)$$



4.2.2

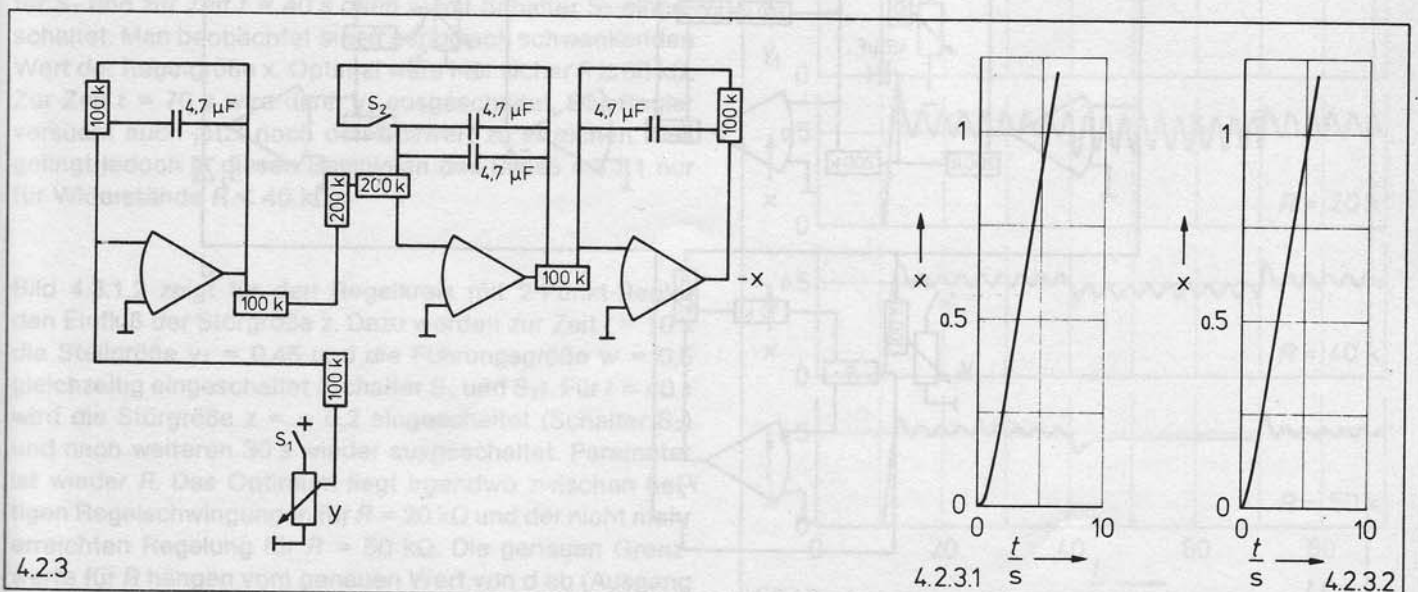
$$= \frac{1}{T_1} \int_0^t y(t) dt + x(0)$$

Ist die Stellgröße  $y(t)$  gleich einer Sprungfunktion mit  $y(t) = 0$  für  $t \leq 0$  und  $y(t) = 1$  für  $t > 0$  und gilt  $x(0) = 0$  (Schalter  $S_2$  zu Beginn der Rechnung öffnen und gleichzeitig Schalter  $S_1$  schließen), so erhält man als Übergangsfunktion die Lösung (Bild 4.2.3.2):

$$x(t) = \frac{t}{T_1} - \frac{T_s}{T_1} (1 - e^{-t/T_s})$$

#### 4.2.3 Regelstrecke ohne Ausgleich, mit Verzögerung 2. Ordnung

Koppelt man eine Regelstrecke ohne Ausgleich und mit Verzögerung 1. Ordnung (mitte und links) und eine Regelstrecke mit Ausgleich und Verzögerung 1. Ordnung (rechts) hintereinander (siehe Bild 4.2.3), so folgt für das Ausgangssignal  $v(t)$  des mittleren Integrierers entsprechend Abschnitt 4.2.2:



4.2.3

$$T_s \dot{v}(t) + v(t) = \frac{1}{T_I} \int_0^t y(t) dt + v(0)$$

Für das Ausgangssignal  $-x(t)$  des rechten Operationsverstärkers (mit Zeitkonstante  $T_s$ ) gilt entsprechend Abschnitt 4.1.1:

$$T_s \dot{x}(t) = v(t) - x(t)$$

Differenziert man einmal und multipliziert dann mit  $T_s$ , so folgt:

$$T_s \dot{v}(t) = T_s^2 \ddot{x}(t) + T_s \dot{x}(t)$$

Durch Einsetzen in die oberste Gleichung folgt für  $x(t)$  die Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$T_s^2 \ddot{x}(t) + 2T_s \dot{x}(t) + x(t) = \frac{1}{T_I} \int_0^t y(t) dt + v(0)$$

Ist die Stellgröße  $y(t)$  gleich einer Sprungfunktion mit  $y(t) = 0$  für  $t \leq 0$  und  $y(t) = 1$  für  $t > 0$  und ist  $v(0) = 0$  (Schalter  $S_2$  zu Beginn der Rechnung öffnen und gleichzeitig Schalter  $S_1$  schließen), so erhält man als Übergangsfunktion die Lösung (Bild 4.2.3.1):

$$x(t) = \frac{t}{T_I} - 2 \frac{T_s}{T_I} \left[ 1 - \left( 1 + \frac{t}{T_s} \right) e^{-t/T_s} \right]$$

### 4.3. Regler

Der Regler eines Regelkreises vergleicht die mit einem Meßfühler erfaßte Regelgröße  $x$  mit einer Führungsgröße  $w$ , bestimmt die Regelabweichung  $x_w = x - w$  und setzt diese in geeignete Steuersignale für ein Stellglied um, mit dem die Stellgröße  $y$  verändert werden kann. Es gibt stetig und unstetig wirkende Regler.

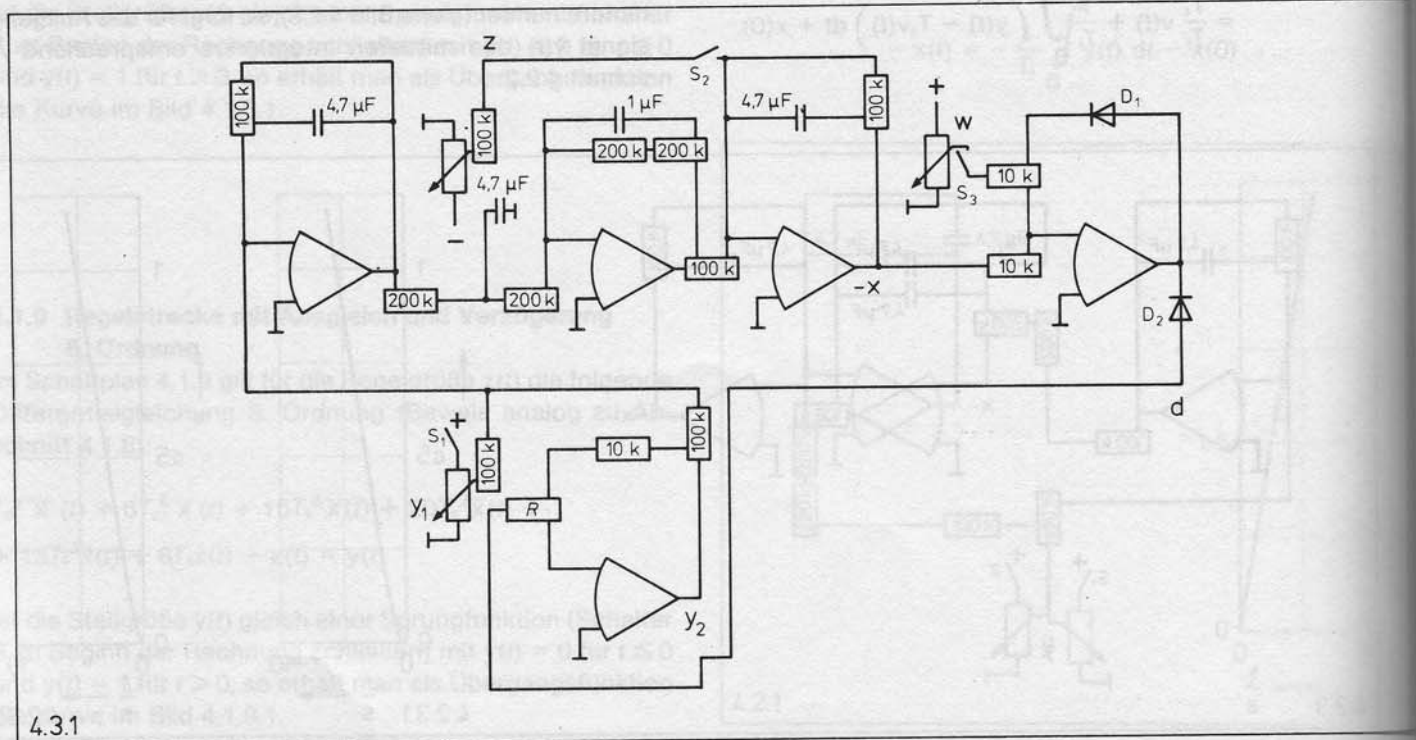
Der Zweipunktregler des Abschnitts 4.3.1 ist z. B. ein unstetig wirkender Regler. Er kennt nur zwei Schaltzustände: ein und aus. Bei den stetigen Reglern der Abschnitte 4.3.2 bis 4.3.6 kann die vom Regler beeinflusste Stellgröße alle Werte innerhalb eines Stellbereichs annehmen. Die Regelung wird besser, und die periodisch schwankende Regelabweichung der unstetigen Regler kann vermieden werden.

In den folgenden Abschnitten werden die Regler nicht allein beschrieben sondern jeweils ihr Verhalten im kompletten Regelkreis beobachtet. Als Regelstrecke wird dabei in den Abschnitten 4.3.1 bis 4.3.5 eine Regelstrecke mit Ausgleich und Verzögerung 4. Ordnung entsprechend Abschnitt 4.1.7 verwendet. Die Störgröße  $z$  wird jeweils vor dem letzten Regelstreckenglied (mit Ausgleich und Verzögerung 1. Ordnung) zugeführt. Im Abschnitt 4.3.6 wird ein Regelkreis mit einer Regelstrecke ohne Ausgleich und mit Verzögerung 2. Ordnung entsprechend Abschnitt 4.2.3 beschrieben.

#### 4.3.1 Regelkreis mit 2-Punkt-Regler

Im Schaltplan 4.3.1 bilden die drei Operationsverstärker links oben die Regelstrecke mit Ausgleich und Verzögerung 4. Ordnung. Die Regelgröße  $x$  wird am rechten Operationsverstärker mit der Führungsgröße  $w$  verglichen. Für das Ausgangssignal  $d$  gilt:

$$\begin{aligned} d &= 0, & \text{für } x - w > 0 \\ d &< -1, & \text{für } x - w < 0 \end{aligned}$$



Dieses Signal wird an einem weiteren Verstärker (unten) mit dem Faktor  $-10 \text{ k}\Omega/R$  multipliziert und dann als zusätzliche Stellgröße  $y_2$  der Regelstrecke wieder zugeführt. Die gesamte Stellgröße  $y_1 + y_2$  kann also zwei Werte annehmen:

$$y_1 + y_2 = y_1, \quad \text{wenn } x \text{ größer als } w \text{ ist,}$$

$$y_1 + y_2 = y_1 + 10 \text{ k}\Omega/R, \quad \text{wenn } x \text{ kleiner als } w \text{ ist.}$$

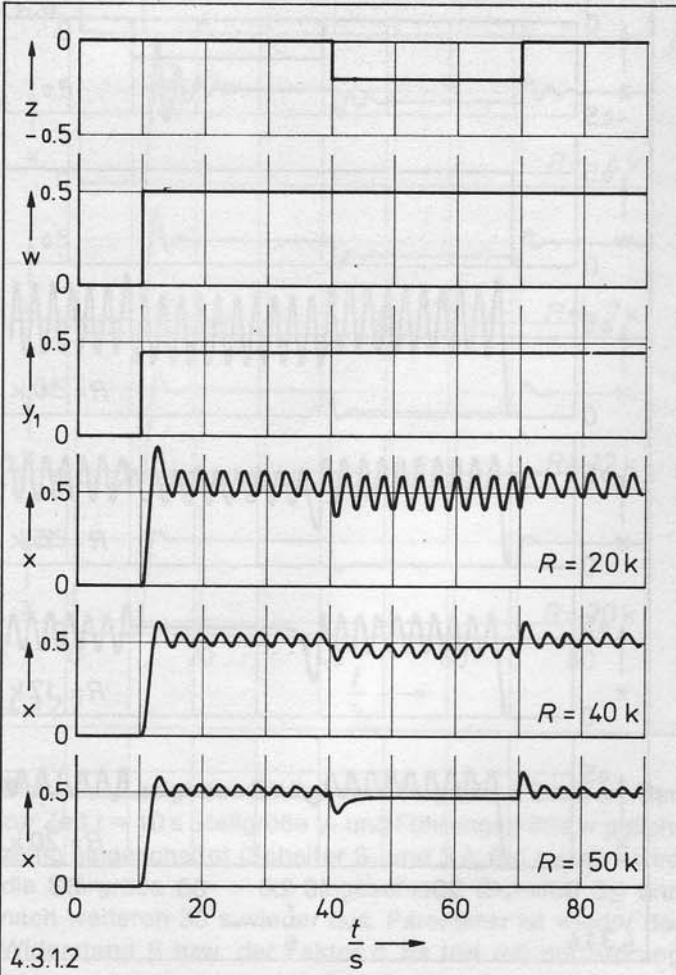
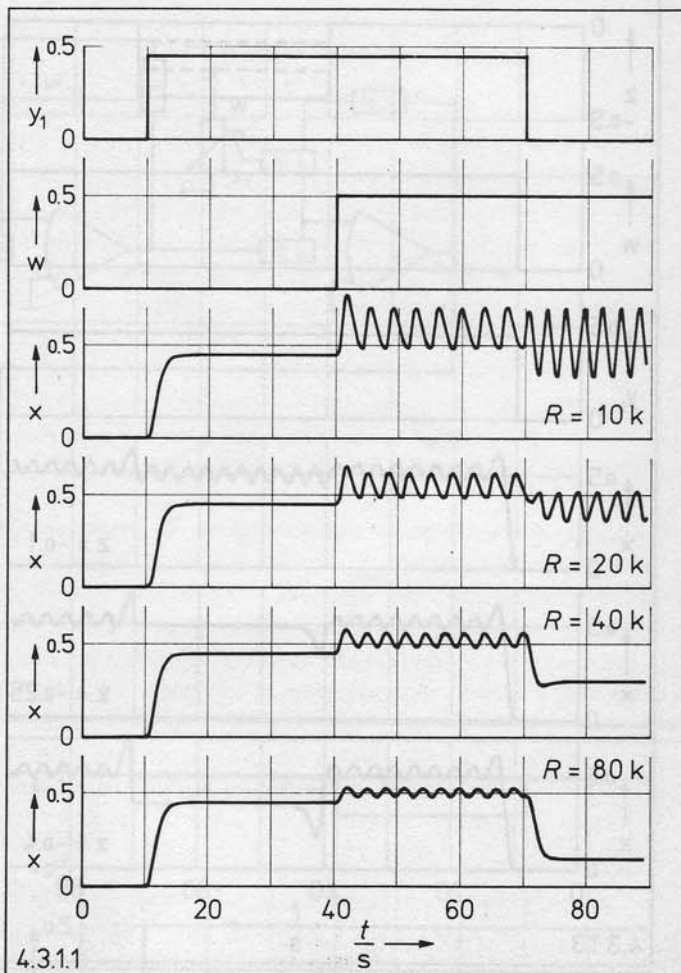
In den folgenden Beispielen der Bilder 4.3.1.1 bis 4.3.1.4 soll die Regelgröße den Wert  $x = 0,5$  erreichen. Die Stellgröße  $y_1$  wird deshalb etwas kleiner zu  $y_1 = 0,45$  gewählt, die Führungsgröße zu  $w = 0,5$  und die Störgröße meist zu  $z = -0,2$ . Vor Beginn der Rechnung werden alle diese Größen zu Null gesetzt (Schalter  $S_1$ ,  $S_2$  und  $S_3$  öffnen).

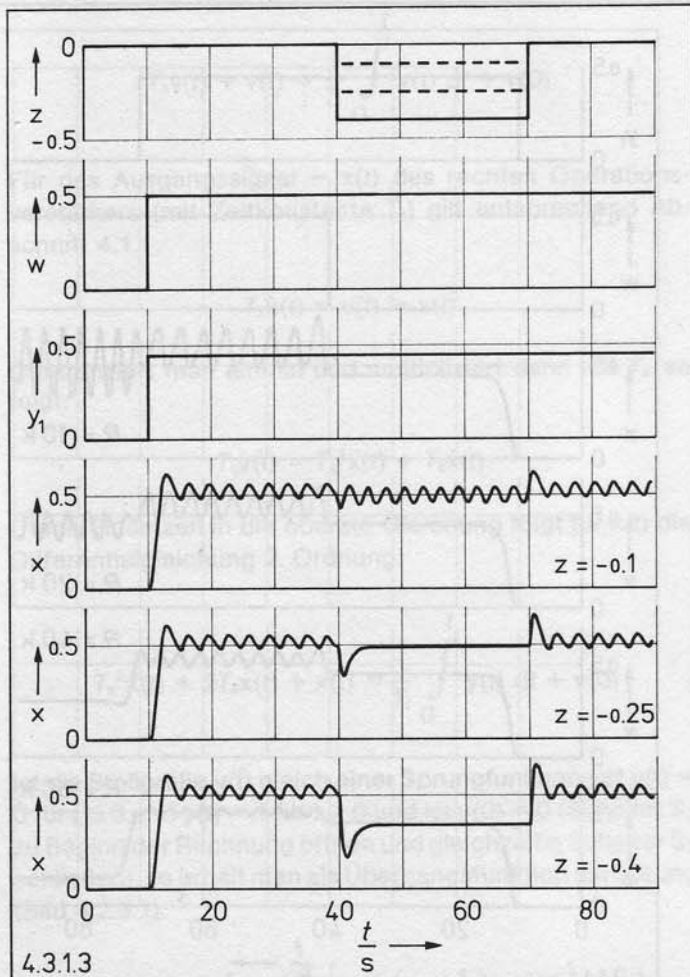
Wird zunächst die Stellgröße  $y_1$  eingeschaltet (Schalter  $S_1$ ), so steigt die Regelgröße mit einer gewissen Verzögerung auf den Wert  $x = 0,45$  an. Wird dann die Führungsgröße  $w$  zugeschaltet (Schalter  $S_3$ ), beginnt der Regler zu arbeiten. Die Regelabweichung  $x - w$  ist negativ, somit ist  $d$  negativ,  $y_2$  positiv und die Regelgröße  $x$  nimmt weiter zu. Wird  $x - w$  positiv, so ist  $d = 0$ ,  $y_2 = 0$  und die Regelgröße durchläuft als Folge der Verzögerung im Regelkreis noch ein Maximum und nimmt dann wieder ab, bis  $x - w$  wieder negativ wird. Jetzt beginnt das Spiel von neuem. Die Regelgröße durchläuft noch ein Minimum und steigt dann erneut an.

Diese sich periodisch ändernde Regelabweichung sollte möglichst klein sein. Ihre Periodendauer darf jedoch nicht zu kurz werden, um die Zahl der Schaltspiele zu begrenzen. Deshalb wählt man bei Regelstrecken mit wenig Verzögerung gerne zwei etwas getrennte Schaltpunkte, d. h. man baut in den Regler die fehlende Verzögerung der Regelstrecke ein.

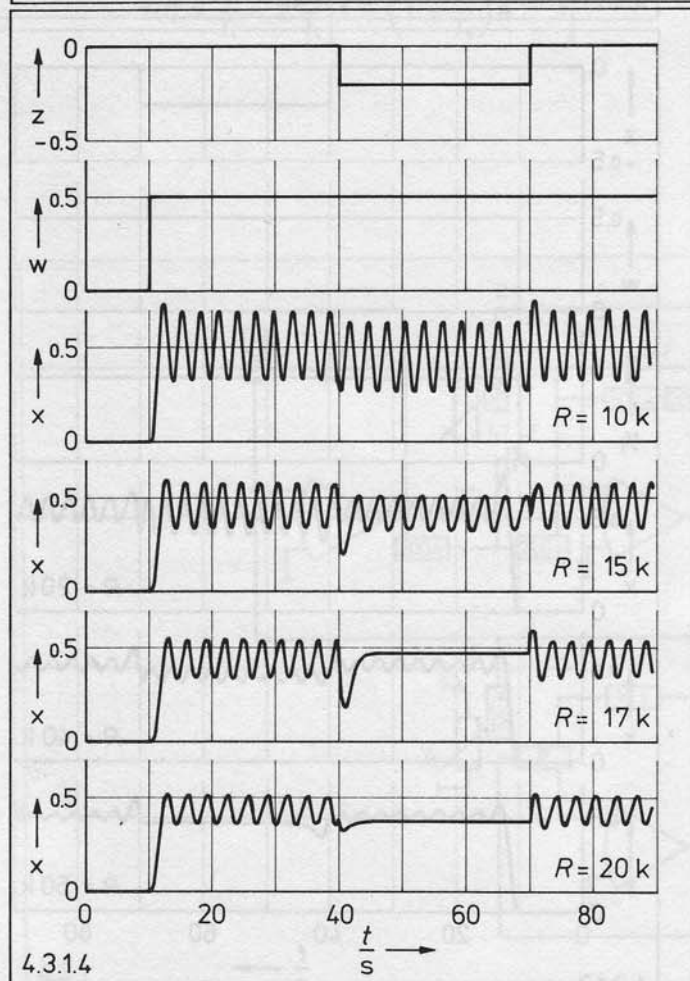
Bild 4.3.1.1 zeigt Regelgrößen  $x(t)$  für den Regelkreis des Schaltplans 4.3.1 mit  $R$  als Parameter. Der Widerstand  $R$  ist ein Maß für  $1/y_2$ . Zu Beginn der Rechnung sind  $y_1$  und  $w$  (und  $z$ ) ausgeschaltet. Zur Zeit  $t = 10 \text{ s}$  wird  $y_1$  mit Schalter  $S_1$  und zur Zeit  $t = 40 \text{ s}$  dann  $w$  mit Schalter  $S_3$  eingeschaltet. Man beobachtet einen periodisch schwankenden Wert der Regelgröße  $x$ . Optimal wäre hier sicher  $R \geq 80 \text{ k}\Omega$ . Zur Zeit  $t = 70 \text{ s}$  wird dann  $y_1$  ausgeschaltet. Der Regler versucht auch jetzt noch den Sollwert zu erreichen. Das gelingt jedoch in diesen Beispielen des Bildes 4.3.1.1 nur für Widerstände  $R < 40 \text{ k}\Omega$ .

Bild 4.3.1.2 zeigt für den Regelkreis mit 2-Punkt-Regler den Einfluß der Störgröße  $z$ . Dazu werden zur Zeit  $t = 10 \text{ s}$  die Stellgröße  $y_1 = 0,45$  und die Führungsgröße  $w = 0,5$  gleichzeitig eingeschaltet (Schalter  $S_1$  und  $S_3$ ). Für  $t = 40 \text{ s}$  wird die Störgröße  $z = -0,2$  eingeschaltet (Schalter  $S_2$ ) und nach weiteren  $30 \text{ s}$  wieder ausgeschaltet. Parameter ist wieder  $R$ . Das Optimum liegt irgendwo zwischen heftigen Regelschwingungen für  $R = 20 \text{ k}\Omega$  und der nicht mehr erreichten Regelung für  $R = 50 \text{ k}\Omega$ . Die genauen Grenzwerte für  $R$  hängen vom genauen Wert von  $d$  ab (Ausgang eines übersteuerten Verstärkers).





4.3.1.3



4.3.1.4

Bild 4.3.1.3 zeigt für  $R = 40 \text{ k}\Omega$  den Einfluß der Amplitude der Störgröße  $z$ . Kleine Störgrößen werden gut ausgeglet, große ( $z > 0,25$ ) nicht mehr.

Bild 4.3.1.4 zeigt schließlich noch den Einfluß der Störgröße auf einen Regelkreis mit 2-Punkt-Regler ohne feste Stellgröße  $y_1$ . Parameter ist wieder  $R$ . Zur Zeit  $t = 10 \text{ s}$  wird die Führungsgröße  $w$  eingeschaltet und jeweils 30 s später die Störgröße  $z = -0,2$  zu- und wieder abgeschaltet. Wie bereits im Bild 4.3.1.1 sichtbar, ist die Regelstrecke ohne konstante Stellgröße schwer regelbar. Die periodische Regelabweichung ist sehr groß, und es tritt sehr leicht der Fall ein, daß eine Störung nicht mehr ausgeglet werden kann.

Die optimale Wahl von  $y_1$  und der Verstärkung ( $10 \text{ k}\Omega/R$ ) hängt von der Regelstrecke und den erwartbaren Störungen ab.

### 4.3.2 Regelkreis mit P-Regler

Soll die beim un stetig arbeitenden 2-Punkt-Regler zwangsläufig auftretende periodisch schwankende Regelabweichung (siehe Abschnitt 4.3.1) vermieden werden, muß man einen stetig wirkenden Regler verwenden. Der einfachste Typ dieser Gruppe ist der P-Regler. Er liefert eine der Regelabweichung proportionale Änderung der Stellgröße und kann auf dem Analogrechner mit einem Operationsverstärker simuliert werden, der entsprechend Abschnitt 2.1.2 zur Multiplikation mit einer Konstanten beschaltet ist.

Im Bild 4.3.2 wird mit dem rechten Operationsverstärker die Regelabweichung  $x_w = x - w$  bestimmt. Dieses Signal wird am folgenden Verstärker (unten) mit dem Faktor  $c = 10 \text{ k}\Omega/R$  und mit  $-1$  multipliziert und dann als zusätzliche Stellgröße  $y_2$  der Regelstrecke wieder zugeführt. Wie beim Regelkreis mit 2-Punkt-Regler kann man mit aber auch ohne konstante Stellgröße  $y_1$  arbeiten.

In den folgenden Beispielen der Bilder 4.3.2.1 bis 4.3.2.3 soll die Regelgröße möglichst den Wert  $x = 0,5$  erreichen. Wird zunächst die Stellgröße  $y_1 = 0,5$  eingeschaltet (Schalter  $S_1$ ), so steigt die Regelgröße nach einem Einschwingvorgang an auf

$$x = \frac{y_1}{1 + c}$$

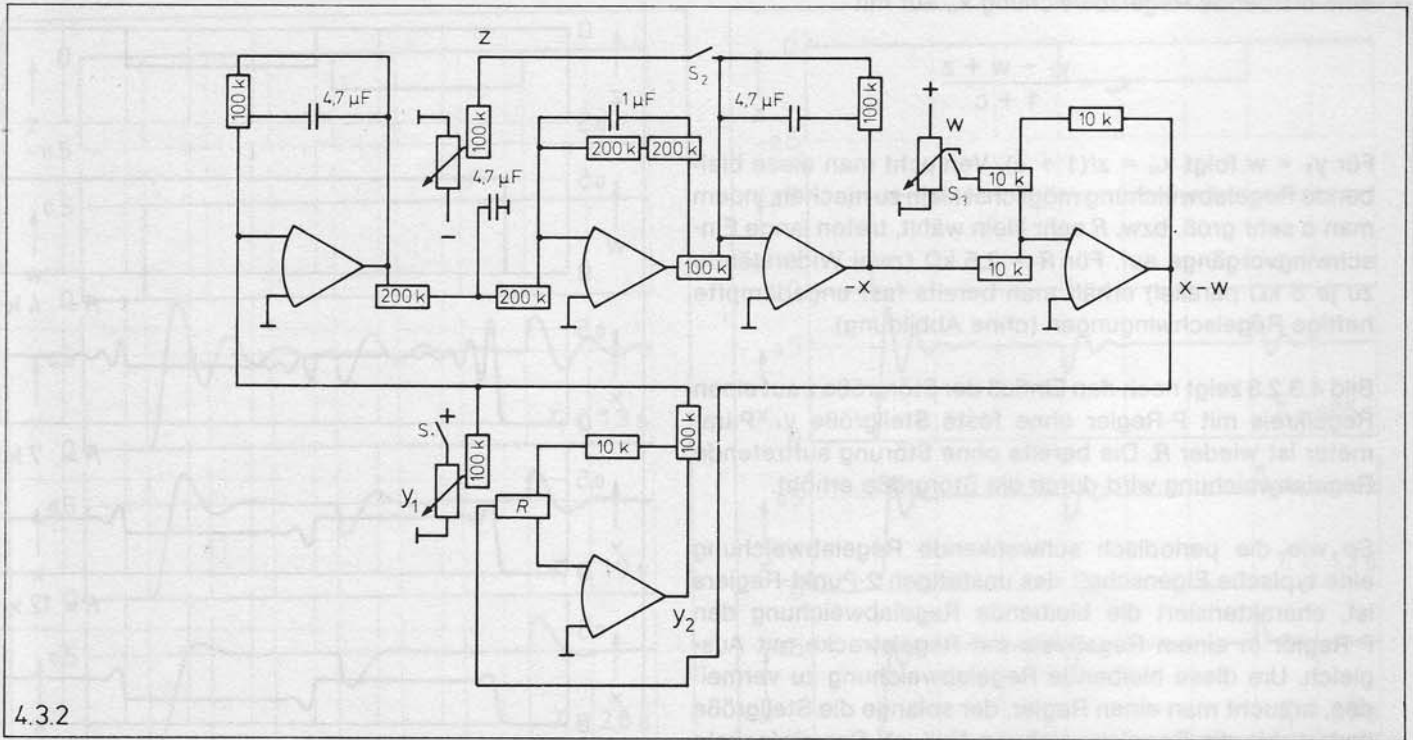
Wird dann die Führungsgröße  $w = 0,5$  zugeschaltet (Schalter  $S_3$ ), so steigt die Regelgröße mit einem neuen Einschwingvorgang weiter an bis

$$x = \frac{y_1 + cw}{1 + c}$$

Mit  $y_1 = w$  folgt, daß die Regelgröße gleich dem Sollwert ist:  $x = w$ . Wird dagegen die konstante Stellgröße  $y_1$  wieder ausgeschaltet (Schalter  $S_1$ ), so fällt die Regelgröße wieder etwas ab auf

$$x = \frac{cw}{1 + c}$$





Es tritt eine bleibende Regelabweichung auf. Dieser Verlauf der Regelgröße ist im Bild 4.3.2.1 für verschiedene Faktoren  $c = 10 \text{ k}\Omega/R$  wiedergegeben:  
 $c = 2,5$  (für  $R = 4 \text{ k}\Omega$ ),  $c = 1,4$  (für  $R = 7 \text{ k}\Omega$ ),  
 $c = 0,83$  (für  $R = 12 \text{ k}\Omega$ ),  $c = 0,5$  (für  $R = 20 \text{ k}\Omega$ ).

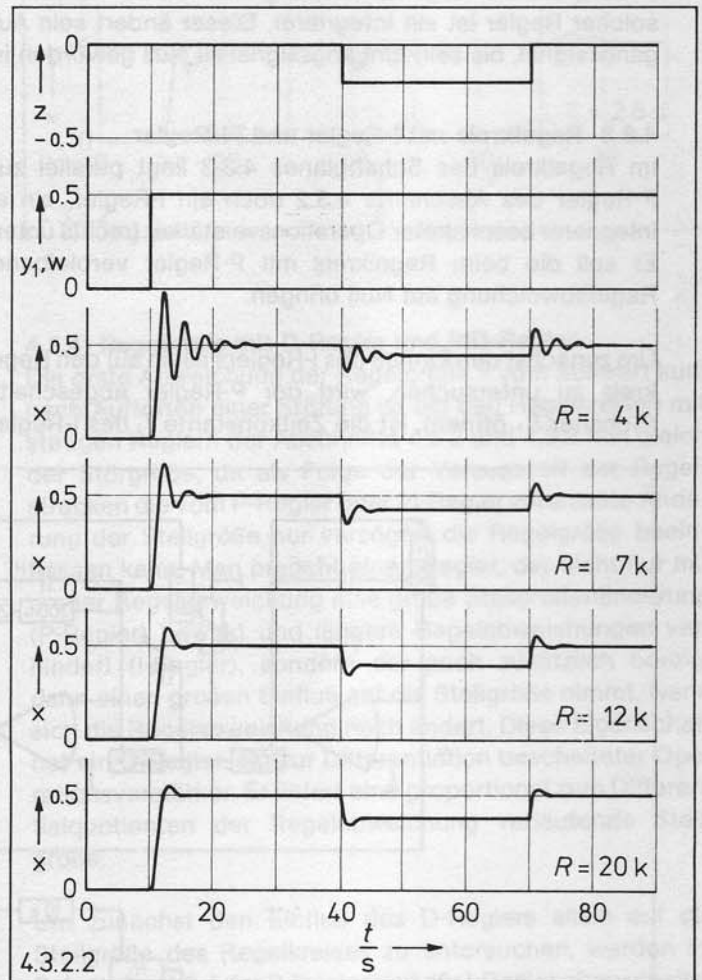
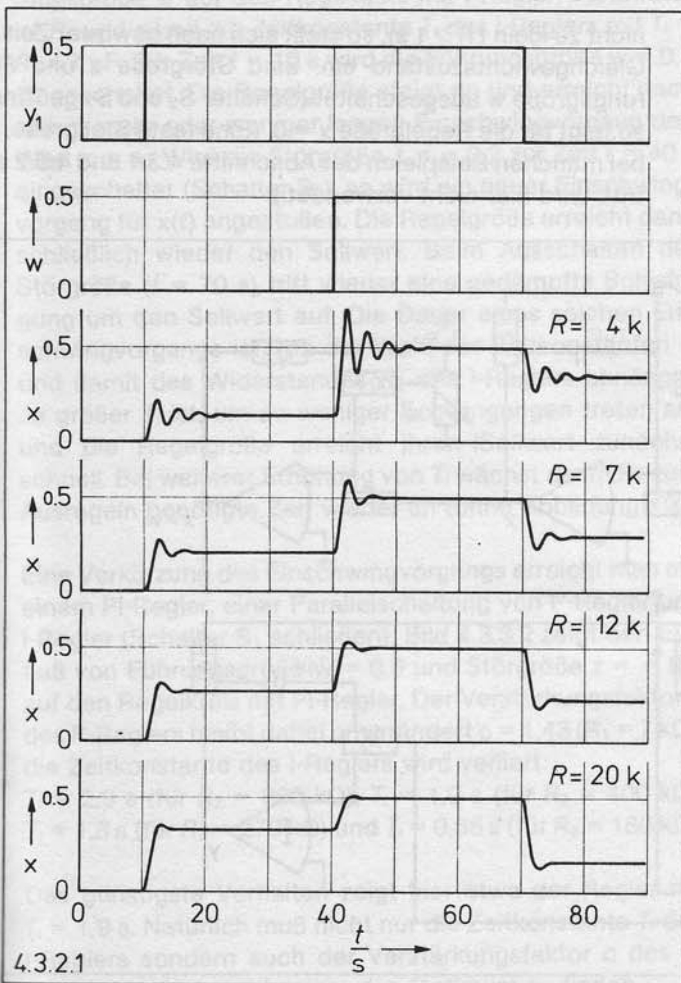
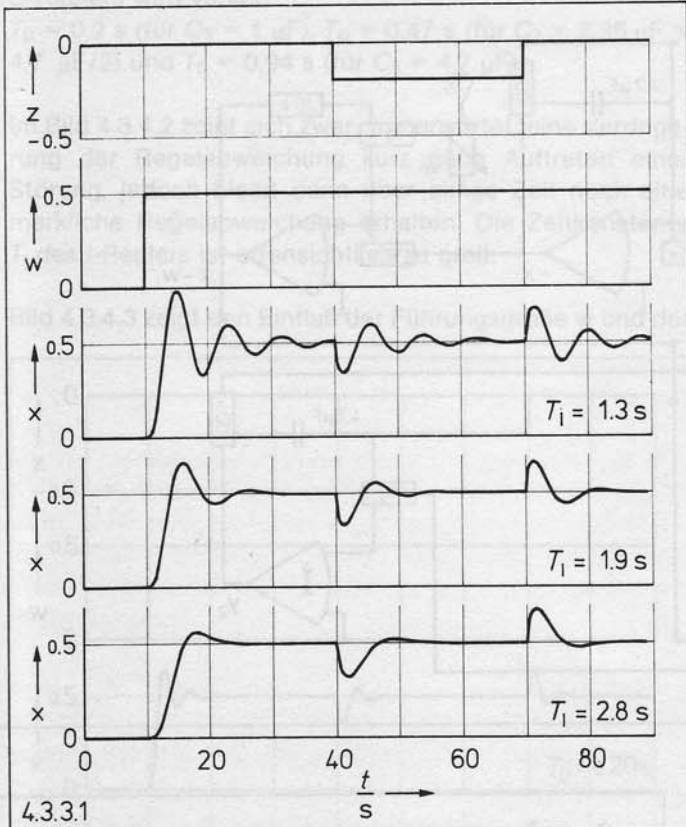


Bild 4.3.2.2 zeigt den Einfluß der Störgröße  $z$ . Dazu werden zur Zeit  $t = 10 \text{ s}$  Stellgröße  $y_1$  und Führungsgröße  $w$  gleichzeitig eingeschaltet (Schalter  $S_1$  und  $S_3$ ). Bei  $t = 40 \text{ s}$  wird die Störgröße  $z = -0,2$  eingeschaltet (Schalter  $S_2$ ) und nach weiteren  $30 \text{ s}$  wieder aus. Parameter ist wieder der Widerstand  $R$  bzw. der Faktor  $c$ . Es tritt mit der Störung





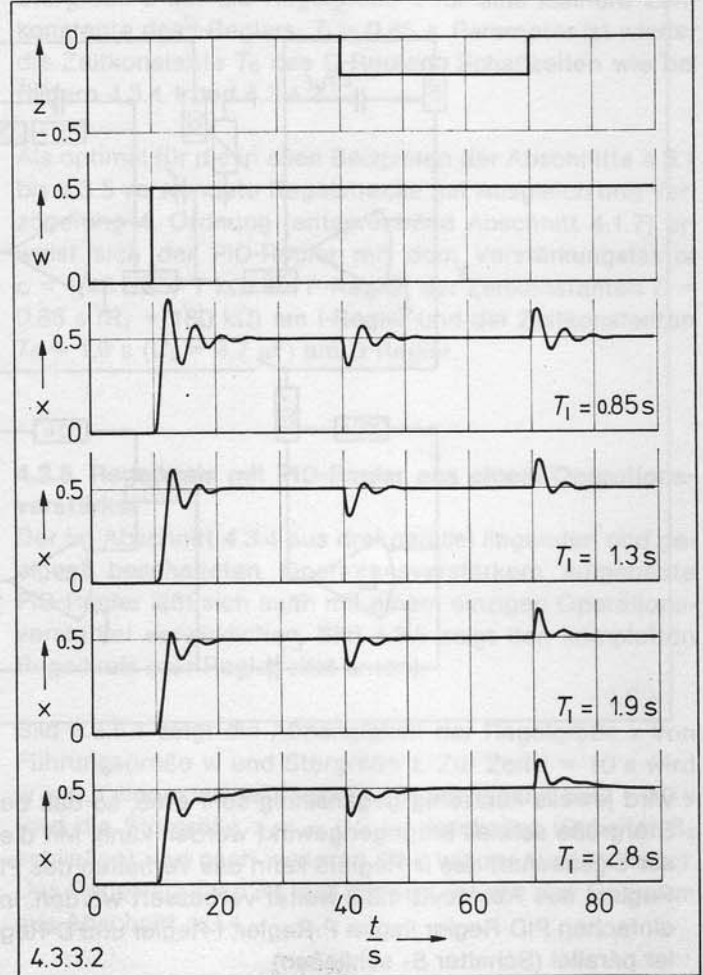
4.3.3.1

Bild 4.3.3.1 zeigt den Einfluß der Störgröße  $z$  und der Führungsgröße  $w$  auf den Regelkreis mit I-Regler. Parameter ist  $R_2$  und damit die Zeitkonstante  $T_I$  des I-Reglers mit  $T_I = R_2 \cdot 4,7 \mu\text{F}$ . Zur Zeit  $t = 10 \text{ s}$  wird die Führungsgröße  $w = 0,5$  eingeschaltet. Die Regelgröße steigt an und erreicht nach einem mehr oder weniger langen Einschwingvorgang den Wert  $x = w$ . Wird die Störgröße  $z = -0,2$  zur Zeit  $t = 40 \text{ s}$  eingeschaltet (Schalter  $S_2$ ), so wird ein neuer Einschwingvorgang für  $x(t)$  angestoßen. Die Regelgröße erreicht dann schließlich wieder den Sollwert. Beim Ausschalten der Störgröße ( $t = 70 \text{ s}$ ) tritt wieder eine gedämpfte Schwingung um den Sollwert auf. Die Dauer eines solchen Einschwingvorgangs ist von der Wahl der Zeitkonstanten  $T_I$  und damit des Widerstandes  $R_2$  des I-Reglers abhängig. Je größer  $T_I$  ist, um so weniger Schwingungen treten auf und die Regelgröße erreicht ihren Sollwert zunächst schnell. Bei weiterer Erhöhung von  $T_I$  wächst dann die zum Ausregeln benötigte Zeit wieder an (ohne Abbildung).

Eine Verkürzung des Einschwingvorgangs erreicht man mit einem PI-Regler, einer Parallelschaltung von P-Regler und I-Regler (Schalter  $S_1$  schließen). Bild 4.3.3.2 zeigt den Einfluß von Führungsgröße  $w = 0,5$  und Störgröße  $z = -0,2$  auf den Regelkreis mit PI-Regler. Der Verstärkungsfaktor  $c$  des P-Reglers bleibt dabei unverändert  $c = 1,43$  ( $R_1 = 7 \text{ k}\Omega$ ), die Zeitkonstante des I-Reglers wird variiert:

$T_I = 2,8 \text{ s}$  (für  $R_2 = 600 \text{ k}\Omega$ ),  $T_I = 1,9 \text{ s}$  (für  $R_2 = 400 \text{ k}\Omega$ ),  
 $T_I = 1,3 \text{ s}$  (für  $R_2 = 270 \text{ k}\Omega$ ) und  $T_I = 0,85 \text{ s}$  (für  $R_2 = 180 \text{ k}\Omega$ ).

Das günstigste Verhalten zeigt hier etwa der Regler mit  $T_I = 1,9 \text{ s}$ . Natürlich muß nicht nur die Zeitkonstante  $T_I$  des I-Reglers sondern auch der Verstärkungsfaktor  $c$  des P-Reglers variiert werden, um das Optimum zu finden.

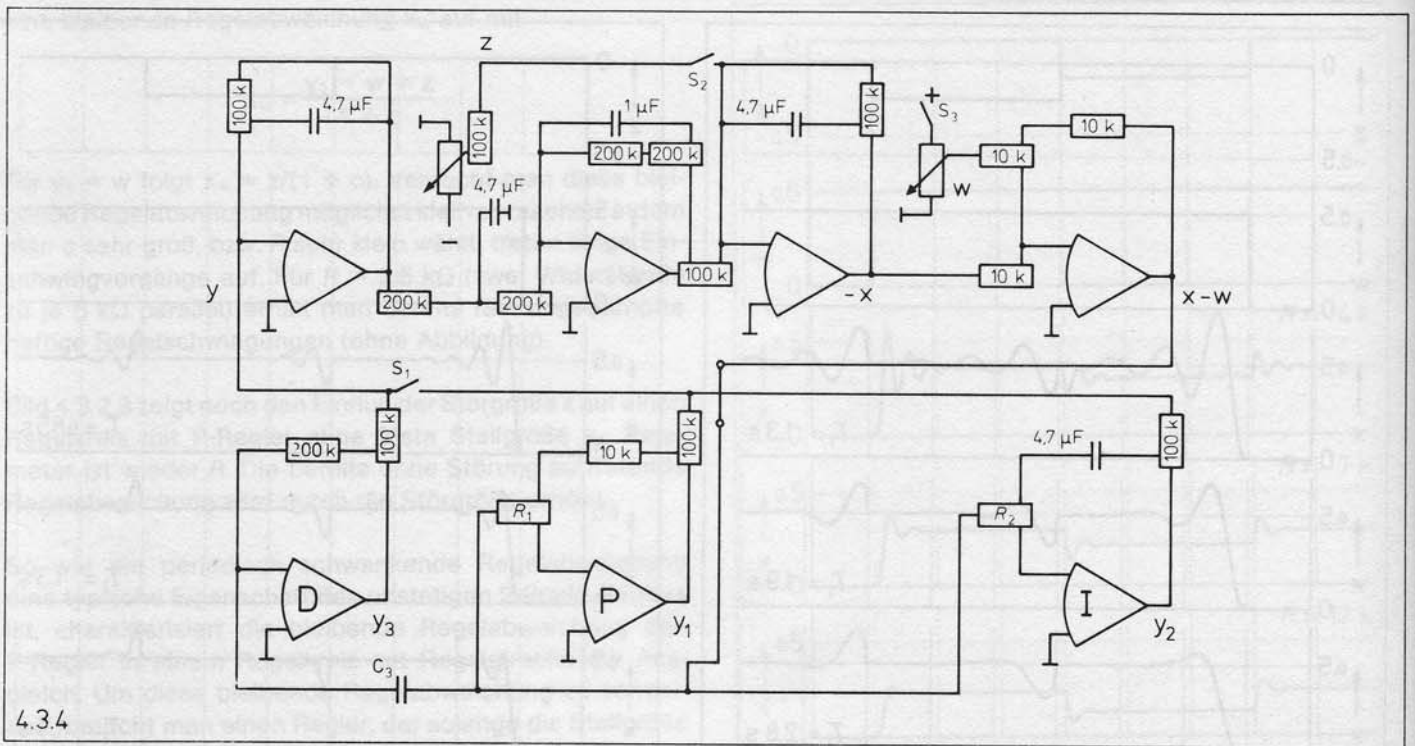


4.3.3.2

#### 4.3.4 Regelkreis mit D-Regler und PID-Regler

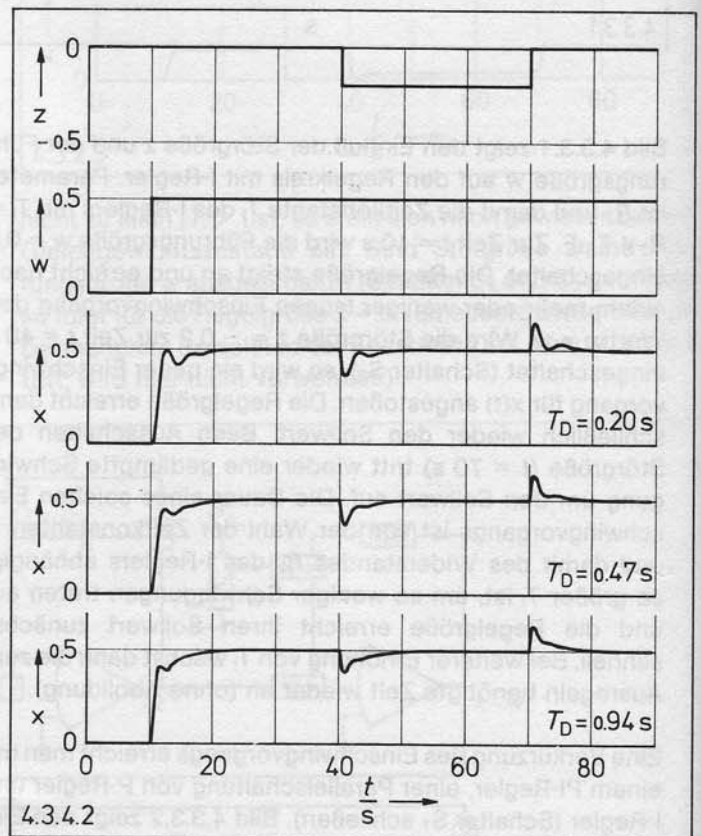
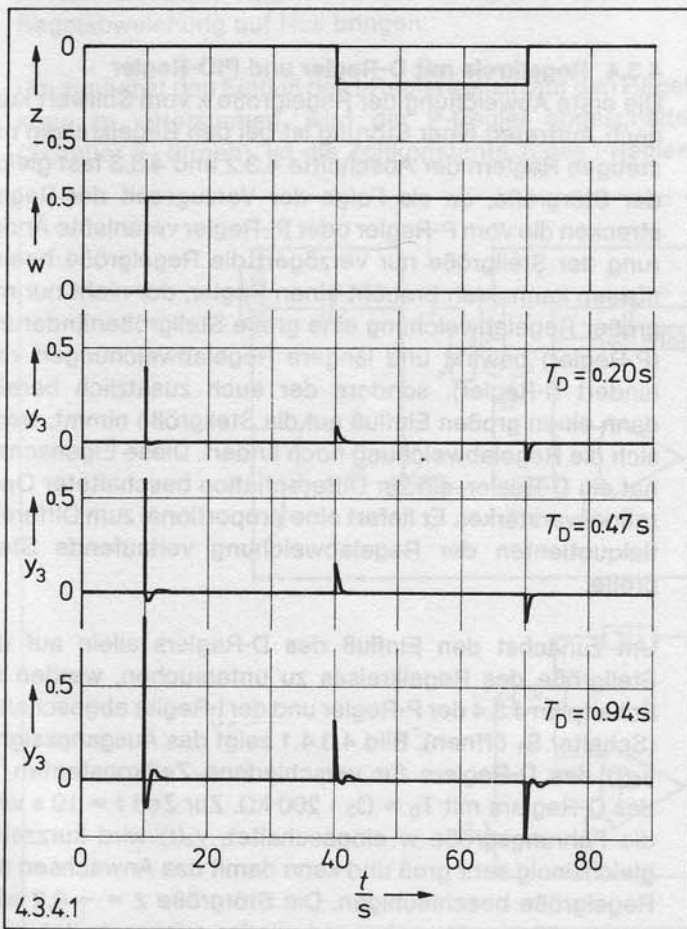
Die erste Abweichung der Regelgröße  $x$  vom Sollwert kurz nach Auftreten einer Störung ist bei den Regelkreisen mit stetigen Reglern der Abschnitte 4.3.2 und 4.3.3 fast gleich der Störgröße, da als Folge der Verzugszeit der Regelstrecken die vom P-Regler oder PI-Regler veranlaßte Änderung der Stellgröße nur verzögert die Regelgröße beeinflussen kann. Man braucht einen Regler, der nicht nur mit großer Regelabweichung eine große Stellgrößenänderung (P-Regler) bewirkt und längere Regelabweichungen verhindert (I-Regler), sondern der auch zusätzlich bereits dann einen großen Einfluß auf die Stellgröße nimmt, wenn sich die Regelabweichung noch ändert. Diese Eigenschaft hat ein D-Regler, ein zur Differentiation beschalteter Operationsverstärker. Er liefert eine proportional zum Differentialquotient der Regelabweichung verlaufende Stellgröße.

Um zunächst den Einfluß des D-Reglers allein auf die Stellgröße des Regelkreises zu untersuchen, werden im Schaltplan 4.3.4 der P-Regler und der I-Regler abgeschaltet (Schalter  $S_1$  öffnen). Bild 4.3.4.1 zeigt das Ausgangssignal  $y_3(t)$  des D-Reglers für verschiedene Zeitkonstanten  $T_D$  des D-Reglers mit  $T_D = C_3 \cdot 200 \text{ k}\Omega$ . Zur Zeit  $t = 10 \text{ s}$  wird die Führungsgröße  $w$  eingeschaltet,  $y_3(t)$  wird kurzzeitig gleichsinnig sehr groß und kann damit das Anwachsen der Regelgröße beschleunigen. Die Störgröße  $z = -0,2$  wird jeweils  $30 \text{ s}$  später ein- und wieder ausgeschaltet.  $y_3(t)$



4.3.4

wird jeweils kurzzeitig gegenseitig sehr groß, so daß der Störgröße schnell entgegengewirkt werden kann. Mit dieser Eigenschaft des D-Reglers kann das Verhalten des PI-Reglers aus Abschnitt 4.3.3 weiter verbessert werden. Im einfachen PID-Regler liegen P-Regler, I-Regler und D-Regler parallel (Schalter  $S_1$  schließen).



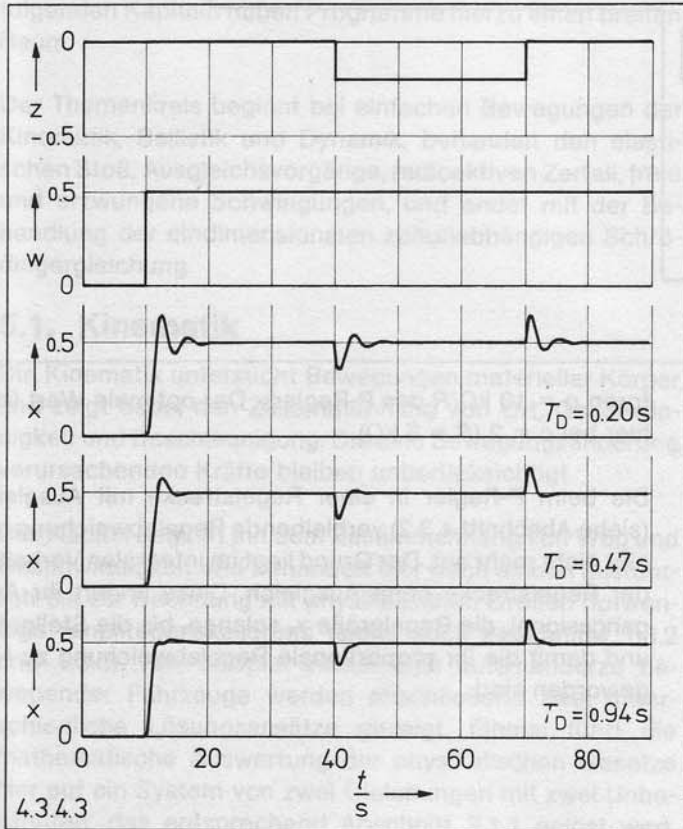
Um den Einfluß der Führungsgröße  $w$  und der Störgröße  $z$  auf den Regelkreis mit PID-Regler zu untersuchen, muß man den Verstärkungsfaktor  $c$  des P-Reglers, die Zeitkonstante  $T_I$  des I-Reglers und die Zeitkonstante  $T_D$  des D-Reglers variieren. Um hier nur eine Auswahl der möglichen Kombinationen zu treffen, werden für  $c$  und  $T_I$  zunächst die Werte aus Abschnitt 4.3.3 gewählt, bei denen dort ein günstiges Regelverhalten auftrat:  $c = 1,43$  ( $R_1 = 7 \text{ k}\Omega$ ) und  $T_I = 1,9 \text{ s}$  ( $R_2 = 400 \text{ k}\Omega$ ). Die Zeitkonstante  $T_D$  des

D-Reglers wird variiert:

$T_D = 0,2 \text{ s}$  (für  $C_3 = 1 \mu\text{F}$ ),  $T_D = 0,47 \text{ s}$  (für  $C_3 = 2,35 \mu\text{F} = 4,7 \mu\text{F}/2$ ) und  $T_D = 0,94 \text{ s}$  (für  $C_3 = 4,7 \mu\text{F}$ ).

Im Bild 4.3.4.2 zeigt sich zwar, wie erwartet, eine Verringerung der Regelabweichung kurz nach Auftreten einer Störung, jedoch bleibt dann über einige Zeit noch eine merkliche Regelabweichung erhalten. Die Zeitkonstante  $T_I$  des I-Reglers ist offensichtlich zu groß.

Bild 4.3.4.3 zeigt den Einfluß der Führungsgröße  $w$  und der



Störgröße  $z$  auf die Regelgröße  $x$  für eine kleinere Zeitkonstante des I-Reglers:  $T_I = 0,85 \text{ s}$ . Parameter ist wieder die Zeitkonstante  $T_D$  des D-Reglers. Schaltzeiten wie bei Bildern 4.3.4.1 und 4.3.4.2.

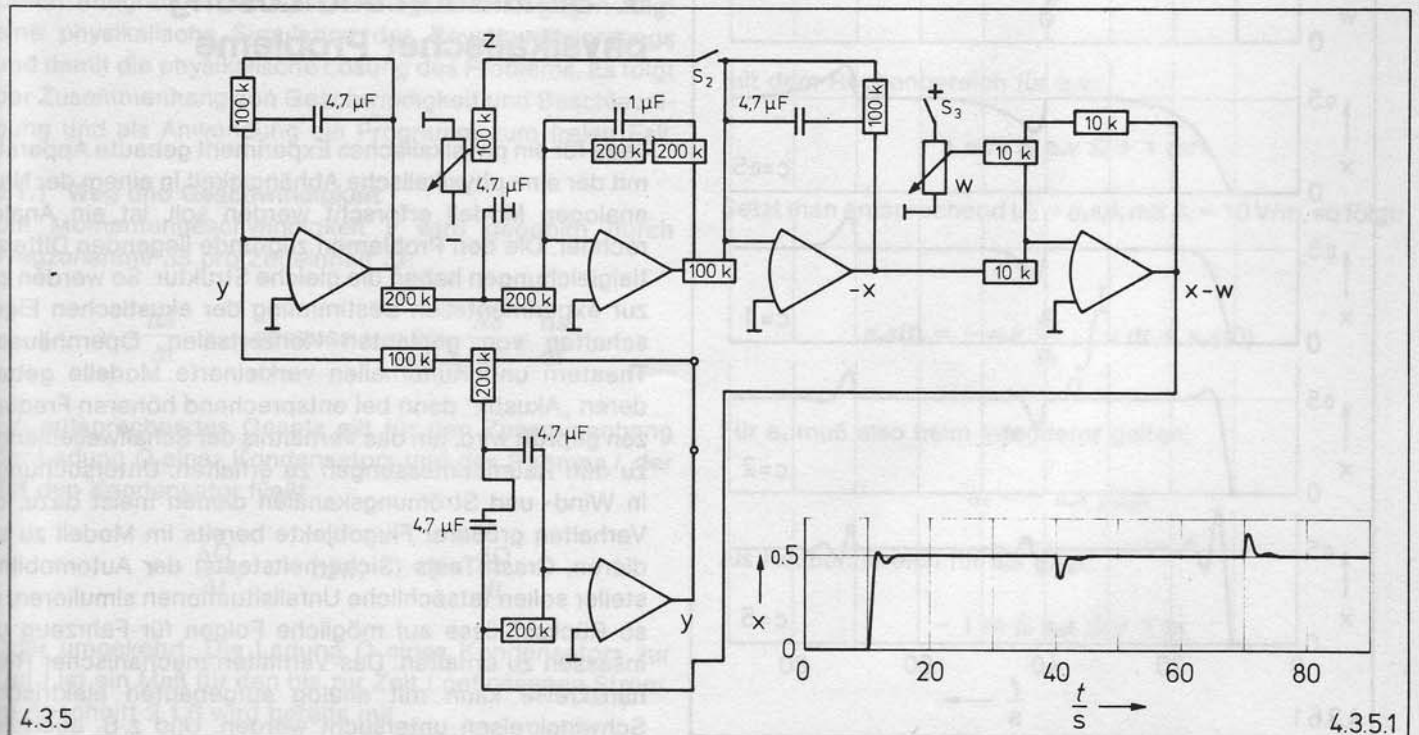
Als optimal für die in allen Beispielen der Abschnitte 4.3.1 bis 4.3.5 verwendete Regelstrecke mit Ausgleich und Verzögerung 4. Ordnung (entsprechend Abschnitt 4.1.7) erweist sich der PID-Regler mit dem Verstärkungsfaktor  $c = 1,43$  ( $R_1 = 7 \text{ k}\Omega$ ) am P-Regler, der Zeitkonstanten  $T_I = 0,85 \text{ s}$  ( $R_2 = 180 \text{ k}\Omega$ ) am I-Regler und der Zeitkonstanten  $T_D = 1,9 \text{ s}$  ( $C_3 = 4,7 \mu\text{F}$ ) am D-Regler.

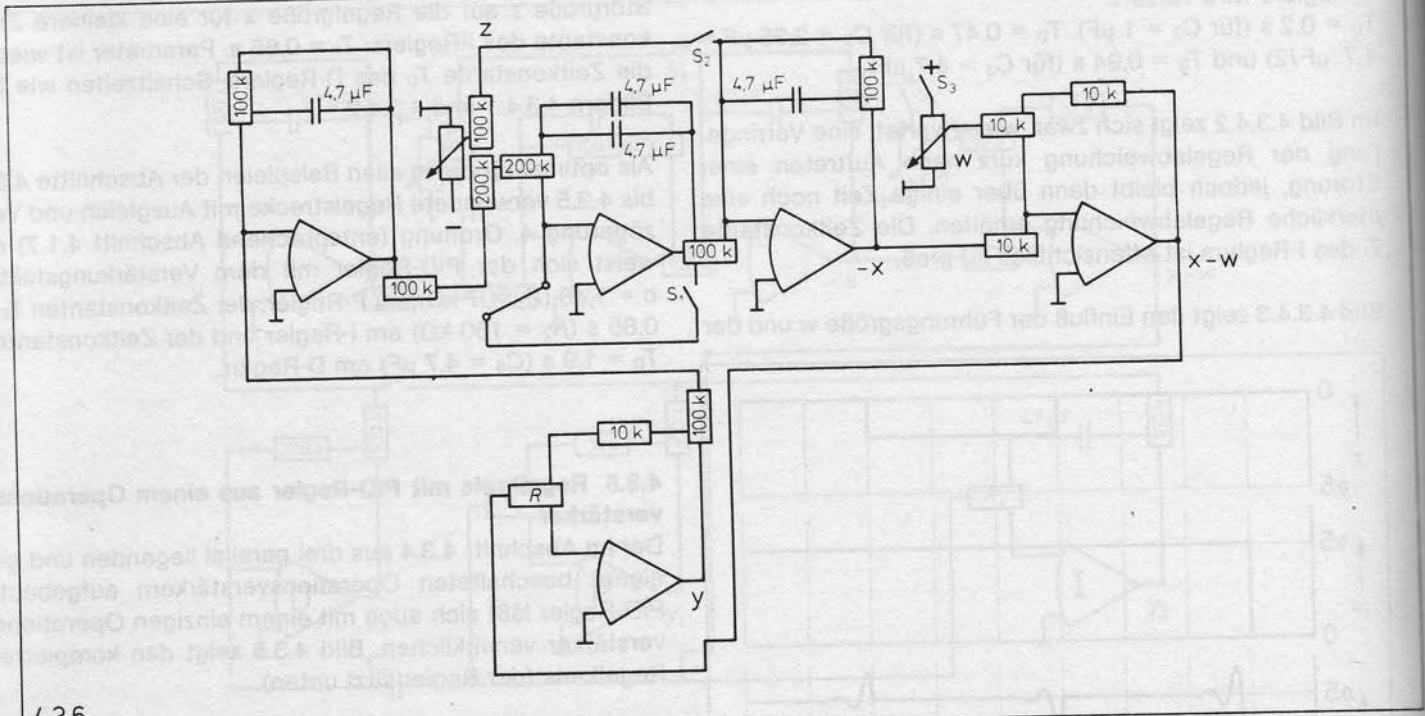
#### 4.3.5 Regelkreis mit PID-Regler aus einem Operationsverstärker

Der im Abschnitt 4.3.4 aus drei parallel liegenden und geeignet beschalteten Operationsverstärkern aufgebaute PID-Regler läßt sich auch mit einem einzigen Operationsverstärker verwirklichen. Bild 4.3.5 zeigt den kompletten Regelkreis (der Regler sitzt unten).

Bild 4.3.5.1 zeigt die Abhängigkeit der Regelgröße  $x$  von Führungsgröße  $w$  und Störgröße  $z$ . Zur Zeit  $t = 10 \text{ s}$  wird  $w = 0,5$  eingeschaltet (Schalter  $S_3$  schließen), bei  $t = 40 \text{ s}$  wird die Störgröße  $z = -0,2$  eingeschaltet (Schalter  $S_2$  schließen) und nach weiteren 30 s wieder ausgeschaltet. Das Regelverhalten ist fast ebenso gut wie das Optimum aus Abschnitt 4.3.4.

Sucht man den optimalen Regler einer technischen Regelstrecke, so kann man deren Übergangsfunktion bestimmen und auf dem Analogrechner simulieren. Durch Variation des Reglers und seiner Parameter läßt sich auf dem Analogrechner ein guter Regler finden, der dann wieder in ein technisches Gerät mit entsprechendem Verhalten umgebaut wird.





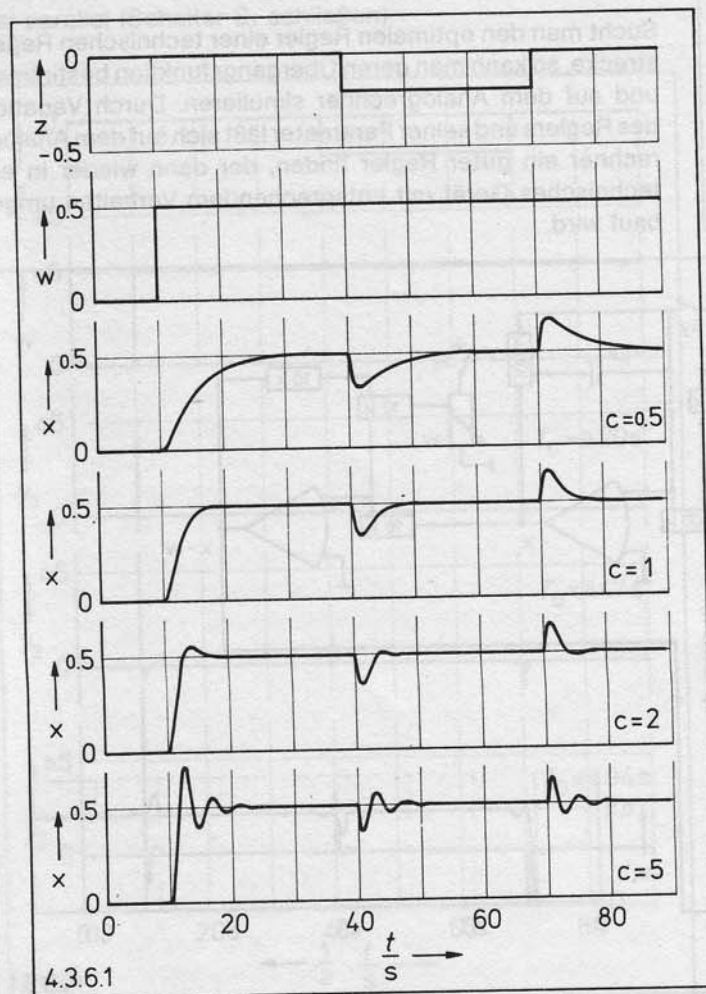
4.3.6

### 4.3.6 Regelkreis mit Regelstrecke ohne Ausgleich

Bild 4.3.6 zeigt einen Regelkreis bestehend aus der Regelstrecke ohne Ausgleich und mit Verzögerung 2. Ordnung des Abschnitts 4.2.3 und aus einem P-Regler. Bild 4.3.6.1 zeigt den Einfluß der Störgröße  $z$  und der Führungsgröße  $w$  auf die Regelgröße  $x$  für verschiedene Verstärkungsfak-

toren  $c = 10 \text{ k}\Omega/R$  des P-Reglers. Der optimale Wert liegt hier bei  $c = 2$  ( $R = 5 \text{ k}\Omega$ ).

Die beim P-Regler in einer Regelstrecke mit Ausgleich (siehe Abschnitt 4.3.2) verbleibende Regelabweichung tritt hier nicht mehr auf. Der Grund liegt im integralen Verhalten der Regelstrecke ohne Ausgleich. Diese ändert ihr Ausgangssignal, die Regelgröße  $x$ , solange, bis die Stellgröße und damit die ihr proportionale Regelabweichung zu Null geworden sind.



4.3.6.1

## 5. Simulation und Lösung physikalischer Probleme

Jede für ein physikalisches Experiment gebaute Apparatur, mit der eine physikalische Abhängigkeit in einem der Natur analogen Modell erforscht werden soll, ist ein Analogrechner. Die den Problemen zugrunde liegenden Differentialgleichungen haben die gleiche Struktur. So werden z. B. zur experimentellen Bestimmung der akustischen Eigenschaften von geplanten Konzertsälen, Opernhäusern, Theatern und Kulturhallen verkleinerte Modelle gebaut, deren „Akustik“ dann bei entsprechend höheren Frequenzen geprüft wird, um das Verhältnis der Schallwellenlängen zu den Raumabmessungen zu erhalten. Untersuchungen in Wind- und Strömungskänen dienen meist dazu, das Verhalten größerer Flugobjekte bereits im Modell zu studieren. Crash-Tests (Sicherheitstests) der Automobilhersteller sollen tatsächliche Unfallsituationen simulieren, um so Rückschlüsse auf mögliche Folgen für Fahrzeug und Insassen zu erhalten. Das Verhalten mechanischer Resonanzkreise kann mit analog aufgebauten elektrischen Schwingkreisen untersucht werden. Und z. B. auch eine

Luftkissenfahrbahn ist ein Analogrechner, wenn damit allgemeine Aussagen über den zentralen Stoß und über Beschleunigungsvorgänge gemacht werden sollen (vergl. Abschnitte 5.3.4 und 5.3.5).

Auf dem in diesem Buche beschriebenen elektronischen Analogrechner können nun, wie die Kapitel 3.2 bis 3.6 zeigen, zahlreiche Differentialgleichungen programmiert werden. Die physikalischen Größen werden dabei durch elektrische Potentiale ersetzt. So bietet sich neben der Berechnung statischer Abhängigkeiten der Physik vor allem die Simulation dynamischer Vorgänge an, und in den folgenden Kapiteln haben Programme hierzu einen breiten Raum.

Der Themenkreis beginnt bei einfachen Bewegungen der Kinematik, Ballistik und Dynamik, behandelt den elastischen Stoß, Ausgleichsvorgänge, radioaktiven Zerfall, freie und erzwungene Schwingungen, und endet mit der Behandlung der eindimensionalen zeitunabhängigen Schrödingergleichung.

## 5.1. Kinematik

Die Kinematik untersucht Bewegungen materieller Körper und zeigt dabei den Zusammenhang von Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung. Die eine Bewegungsänderung verursachenden Kräfte bleiben unberücksichtigt.

Das Kapitel beginnt mit dem Zusammenhang von Weg und Geschwindigkeit und behandelt hier noch einmal ausführlich die zur Rechnung mit physikalischen Größen notwendige Amplitudenskalierung (siehe auch Abschnitte 1.3.2 und 1.3.3). Am Beispiel zweier sich aufeinander zu bewegender Fahrzeuge werden anschließend zwei unterschiedliche Lösungsansätze gezeigt. Einmal führt die mathematische Auswertung der physikalischen Gesetze hier auf ein System von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten, das entsprechend Abschnitt 3.1.1 gelöst wird. Durch Integration der Geschwindigkeiten dagegen folgt eine physikalische Simulation des Bewegungsvorgangs und damit die physikalische Lösung des Problems. Es folgt der Zusammenhang von Geschwindigkeit und Beschleunigung und als Anwendung ein Programm zum freien Fall.

### 5.1.1 Weg und Geschwindigkeit

Die Momentangeschwindigkeit  $v$  wird gegeben durch Wegzunahme  $\Delta s$  pro Zeiteinheit  $\Delta t$ :

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}, \quad \text{genauer: } v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

Ein entsprechendes Gesetz gilt für den Zusammenhang der Ladung  $Q$  eines Kondensators und des Stromes  $I$ , der auf den Kondensator fließt:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}, \quad \text{bzw.} \quad I = \frac{dQ}{dt}$$

Oder umgekehrt: Die Ladung  $Q$  eines Kondensators zur Zeit  $t$  ist ein Maß für den bis zur Zeit  $t$  geflossenen Strom. Im Abschnitt 2.1.6 wird bereits mit

$$Q(t) = \int_0^t I dt + Q(0)$$

die mathematische Integration durch die Aufladung eines Kondensators simuliert.

Entsprechend gilt: Die z. B. von einem Auto zurückgelegte Wegstrecke  $s$  zur Zeit  $t$  ist ein Maß für die bis zur Zeit  $t$  gefahrene Geschwindigkeit  $v$ ; man schreibt:

$$s(t) = \int_0^t v dt + s(0)$$

mit dem Weg  $s(0)$  zur Zeit  $t = 0$ .

Ein geeignet beschalteter Operationsverstärker liefert im Abschnitt 2.1.6 als Ausgangsspannung  $U_0$  das Integral der Eingangsspannung  $U_1$  nach der Zeit multipliziert mit einem Faktor  $-k$ :

$$U_0(t) = -k \int_0^t U_1 dt + U_0(0)$$

mit  $k = 1/R_1 C_0$  und dem Rechenbereich für  $U$ :

$$-10 \text{ V} \leq U \leq +10 \text{ V}$$

Setzt man  $U_1 = a_v v \beta_v$  mit  $\beta_v = 10 \text{ Vs/m}$  (vergleiche Abschnitt 1.3.2), so folgt:

$$U_0(t) = -k \beta_v \int_0^t a_v v dt + U_0(0)$$

mit dem Rechenbereich für  $a_v v$ :

$$-1 \text{ m/s} \leq a_v v \leq +1 \text{ m/s}$$

Setzt man entsprechend  $U_0 = a_s s \beta_s$  mit  $\beta_s = 10 \text{ V/m}$ , so folgt:

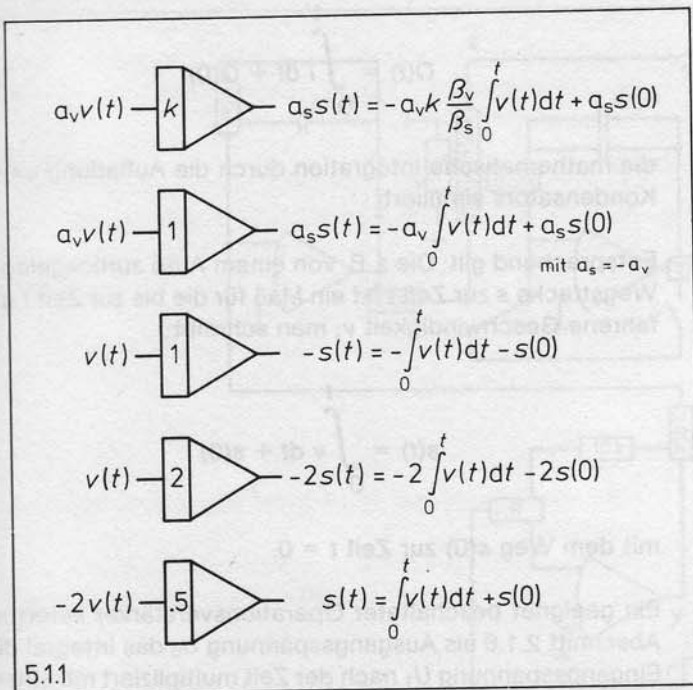
$$a_s s(t) = -a_v k \frac{\beta_v}{\beta_s} \int_0^t v dt + a_s s(0)$$

Für  $a_s$  muß also beim Integrieren gelten:

$$a_s = -a_v k \beta_v / \beta_s$$

Als Rechenbereich für  $a_s s$  folgt:

$$-1 \text{ m} \leq a_s s \leq +1 \text{ m}$$



Dem Eingang des Integrierers wird das Signal  $a_v v$  zugeführt, als Ausgangssignal erhält man dann  $a_s s$ . Dabei erscheinen die Ein- und Ausgangsgrößen in ihrer richtigen physikalischen Dimension. Bild 5.1.1 zeigt dazu einige Beispiele. Die Amplitudenskalierung wird in Abschnitt 1.3.2 ausführlich behandelt.

### 5.1.2 Begegnung zweier Fahrzeuge (mathematische Lösung)

Auf einer geraden Straße sind zur Zeit  $t = 0$  zwei Radfahrer 100 m voneinander entfernt. Fahrer 1 soll sich dabei am Ort  $s_1(0) = 0$  und Fahrer 2 am Ort  $s_2(0) = 100$  m befinden. Sie fahren mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten ( $v_1 = 6$  m/s und  $v_2 = -4$  m/s) aufeinander zu. Wann und wo treffen sie sich?

Die mathematische Lösung führt über den Ansatz:

$$s_1(t) = v_1 t + s_1(0)$$

$$s_2(t) = v_2 t + s_2(0)$$

und mit der Bedingung für den Treffpunkt  $s_1(t) = s_2(t) = s$  zu einer bestimmten Zeit  $t$  auf ein System von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten:

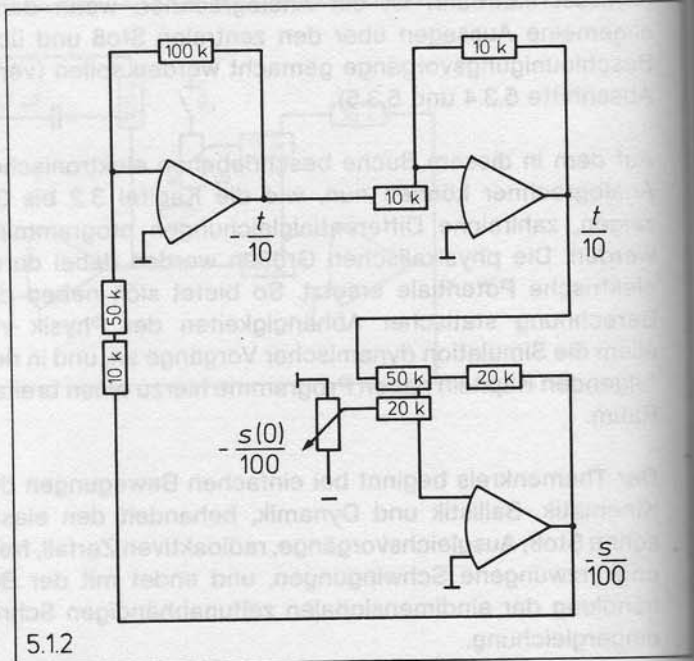
$$t = s/v_1$$

$$s = v_2 t + s_2(0)$$

Das Gleichungssystem läßt sich entsprechend Abschnitt 3.1.1 programmieren. Es muß jedoch vorher noch eine Amplitudenskalierung (siehe Abschnitt 1.3.2) vorgenommen werden:

$$\frac{t}{10} = \frac{10}{v_1} \frac{s}{100}$$

$$\frac{s}{100} = \frac{v_2}{10} \frac{t}{10} + \frac{s_2(0)}{100}$$



Die Rechengrößen  $t/10$  und  $s/100$  dürfen dabei ihre Rechenbereiche nicht überschreiten:

$$-1 \text{ s} \leq t/10 \leq +1 \text{ s}$$

$$-1 \text{ m} \leq s/100 \leq +1 \text{ m}$$

Am Operationsverstärker links im Bild 5.1.2 wird aus  $s/100$  entsprechend der oberen Gleichung gebildet:

$$-\frac{t}{10} = -\frac{s}{100} \frac{1}{0.6 \text{ m/s}}$$

Der nachfolgende Inverter liefert dann  $+t/10$ . Am unteren Operationsverstärker wird aus  $-s(0)/100 = -1 \text{ m}$  ( $\hat{=} -10 \text{ V}$ ) und  $t/10$  entsprechend der unteren Gleichung gebildet:

$$\frac{s}{100} = -\left[-1 \text{ m} + \frac{t}{10} 0.4 \text{ m/s}\right] = 1 \text{ m} - \frac{t}{10} 0.4 \text{ m/s}$$

Als Lösung folgt hier:  $t/10 = 1 \text{ s}$  ( $\hat{=} 10 \text{ V}$ ) und  $s/100 = 0.6 \text{ m}$  ( $\hat{=} 6 \text{ V}$ )! Die Radfahrer treffen sich also nach 10 s am Ort  $s = 60 \text{ m}$ .

### 5.1.3 Begegnung zweier Fahrzeuge (Simulation des Vorgangs)

Die Aufgabe aus Abschnitt 5.1.2 soll nun nicht durch mathematische Lösung des Gleichungssystems sondern durch ein physikalisches Experiment beschrieben werden. Dazu programmiert man zunächst einen dem zu lösenden Problem analog verlaufenden Prozeß. Man simuliert den physikalischen Vorgang.

Im Abschnitt 5.1.1 wird dem Eingangssignal eines Integrierers die Geschwindigkeit und dem Ausgangssignal der zurückgelegte Weg in Analogie gesetzt. Man erhält so den Ort der Radfahrer als Funktion der Zeit.



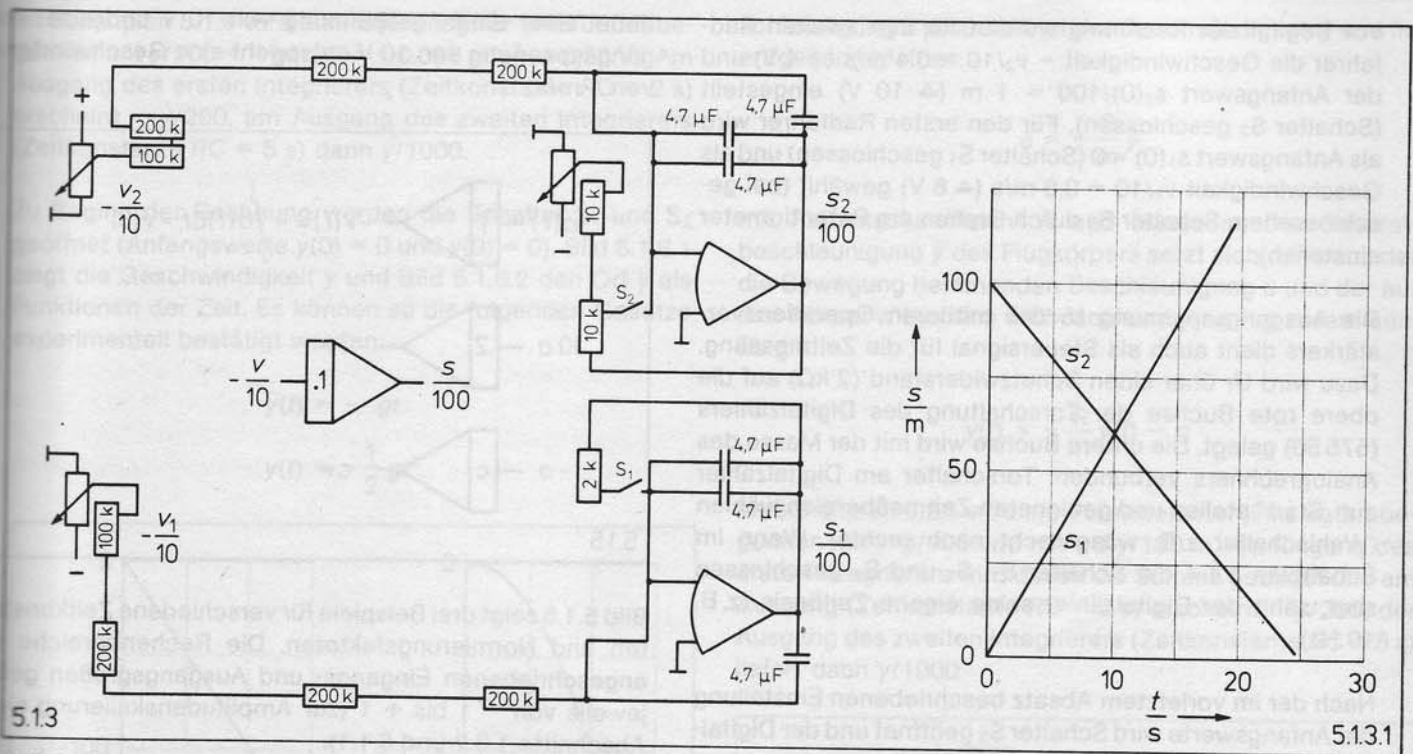


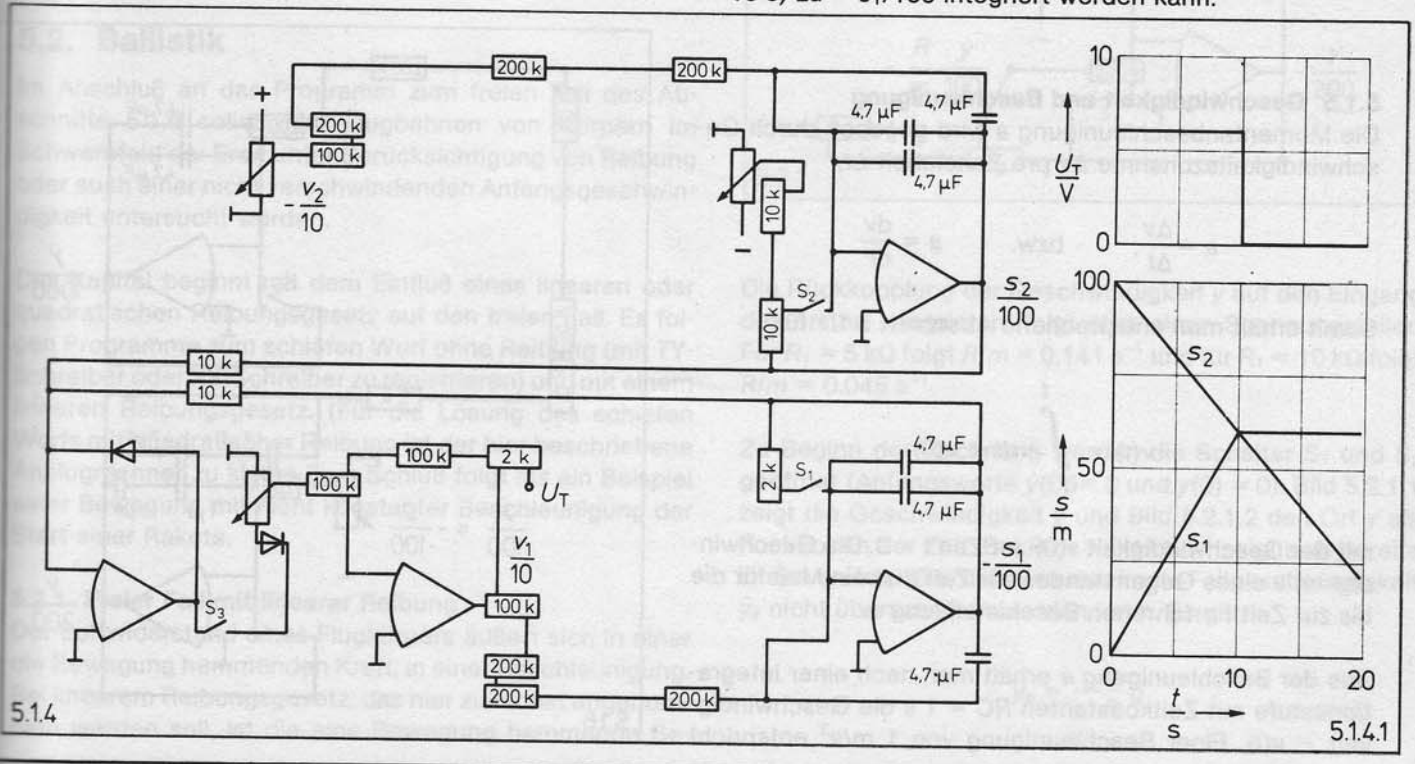
Bild 5.1.3 zeigt die beiden Integrierer (Zeitkonstante  $RC = 10$  s) zur Erzeugung der Ortsfunktionen. Unten wird mit  $-v_1/10 = -0.6$  m/s ( $\hat{=} -6$  V) begonnen und als Anfangswert für den Ort des ersten Radfahrers  $s_1(0) = 0$  gewählt (Schalter  $S_1$  geschlossen). Oben wird mit  $-v_2/10 = 0.4$  m/s ( $\hat{=} 4$  V) begonnen und als Anfangswert für den Ort des zweiten Radfahrers  $s_2(0)/100 = 1$  m ( $\hat{=} 10$  V) gewählt (Schalter  $S_2$  geschlossen).

### 5.1.4 Begegnung zweier Fahrzeuge (physikalische Lösung)

Um die Auswertung des Experiments aus Abschnitt 5.1.3 zu automatisieren, wird den beiden Integrierern für  $s_2/100$  und  $-s_1/100$  ein Komparator (vergleiche Abschnitt 2.4.8) nachgeschaltet. Dieser hält die Bewegung des ersten Radfahrers und den Lauf einer Stoppuhr an, wenn beide Fahrzeuge sich treffen, d. h. wenn  $s_2 - s_1 = 0$  ist.

Zum Start werden die beiden Schalter  $S_1$  und  $S_2$  geöffnet. Bild 5.1.3.1 zeigt die Ausgangssignale der beiden Integrierer. Der Ort  $s_1$  des ersten Radfahrers nimmt mit der Zeit konstant zu, der Ort des zweiten mit der Zeit ab. Man kann z. B. den Treffpunkt und die Zeit vom Start bis zum Treffen beobachten.

Die obere Hälfte des Schaltplans 5.1.4 ist identisch mit der oberen Hälfte aus 5.1.3. In der unteren Hälfte liefert der Komparator (links) mit dem nachfolgenden Potentiometer und sich anschließenden Inverter die Geschwindigkeit  $v_1/10$ , die dann mit einem Integrierer (Zeitkonstante  $RC = 10$  s) zu  $-s_1/100$  integriert werden kann.



Vor Beginn der Rechnung werden für den zweiten Radfahrer die Geschwindigkeit  $-v_2/10 = 0.4 \text{ m/s}$  ( $\hat{=} 4 \text{ V}$ ) und der Anfangswert  $s_2(0)/100 = 1 \text{ m}$  ( $\hat{=} 10 \text{ V}$ ) eingestellt (Schalter  $S_2$  geschlossen). Für den ersten Radfahrer wird als Anfangswert  $s_1(0) = 0$  (Schalter  $S_1$  geschlossen) und als Geschwindigkeit  $v_1/10 = 0.6 \text{ m/s}$  ( $\hat{=} 6 \text{ V}$ ) gewählt (bei geschlossenem Schalter  $S_3$  durch Drehen am Potentiometer einstellen).

Die Ausgangsspannung  $U_T$  des mittleren Operationsverstärkers dient auch als Steuersignal für die Zeitmessung. Dazu wird  $U_T$  über einen Schutzwiderstand ( $2 \text{ k}\Omega$ ) auf die obere rote Buchse der Torschaltung des Digitalzählers (575 50) gelegt. Die untere Buchse wird mit der Masse des Analogrechners verbunden. Torschalter am Digitalzähler auf „Start“ stellen und geeigneten Zeitmeßbereich wählen (Wahlschalter z.B. waagrecht nach rechts). Wenn im Schaltplan 5.1.4 die Schalter  $S_1$ ,  $S_2$  und  $S_3$  geschlossen sind, zählt der Digitalzähler seine eigene Zeitbasis (z.B.  $10 \text{ Hz}$ ).

Nach der im vorletztem Absatz beschriebenen Einstellung der Anfangswerte wird Schalter  $S_3$  geöffnet und der Digitalzähler auf Null gesetzt.

Zum Start werden der Schalter  $S_3$  geschlossen und gleichzeitig die Schalter  $S_1$  und  $S_2$  geöffnet. Der Digitalzähler startet. Bild 5.1.4.1 zeigt oben das Steuersignal  $U_T$  für den Digitalzähler und unten die Ausgangssignale der beiden Integrierer. Wird  $s_2 - s_1 = 0$ , so setzt der Komparator  $v_1 = 0$  und damit auch  $U_T = 0$ . Der Digitalzähler stoppt und  $s_1$  bleibt konstant. Die gemessene Zeit, etwa  $10 \text{ s}$ , und der gemessene Weg, etwa  $60 \text{ m}$  ( $\hat{=} 6 \text{ V}$ ), können in Ruhe abgelesen werden.

Das Programm besteht somit nicht nur aus der Simulation des physikalischen Vorgangs, sondern es enthält auch Hilfen zur Auswertung der interessierenden Größen.

### 5.1.5 Geschwindigkeit und Beschleunigung

Die Momentanbeschleunigung  $a$  wird gegeben durch Geschwindigkeitszunahme  $\Delta v$  pro Zeiteinheit  $\Delta t$ :

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad \text{bzw.} \quad a = \frac{dv}{dt}$$

Somit erhält man entsprechend Abschnitt 5.1.1 für

$$v(t) = \int_0^t a \, dt + v(0)$$

mit der Geschwindigkeit  $v(0)$  zur Zeit  $t = 0$ . Die Geschwindigkeit  $v$  eines Gegenstandes zur Zeit  $t$  ist ein Maß für die bis zur Zeit  $t$  erfahrenen Beschleunigung  $a$ .

Aus der Beschleunigung  $a$  erhält man nach einer Integrationsstufe mit Zeitkonstanten  $RC = 1 \text{ s}$  die Geschwindigkeit  $-v(t)$ . Einer Beschleunigung von  $1 \text{ m/s}^2$  entspricht

dabei einer Eingangsspannung von  $10 \text{ V}$  und einer Ausgangsspannung von  $10 \text{ V}$  entspricht eine Geschwindigkeit von  $1 \text{ m/s}$ .

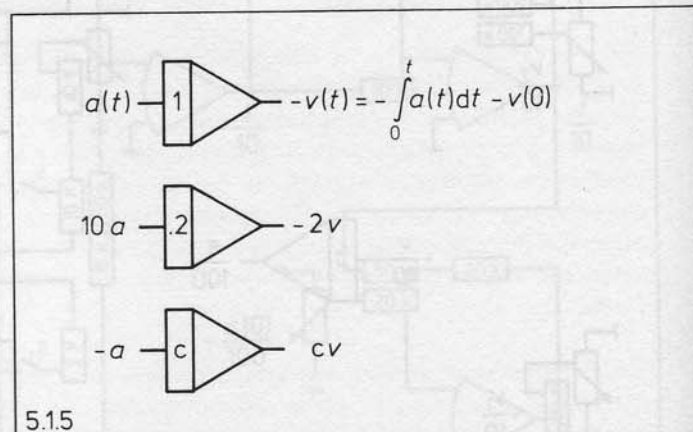


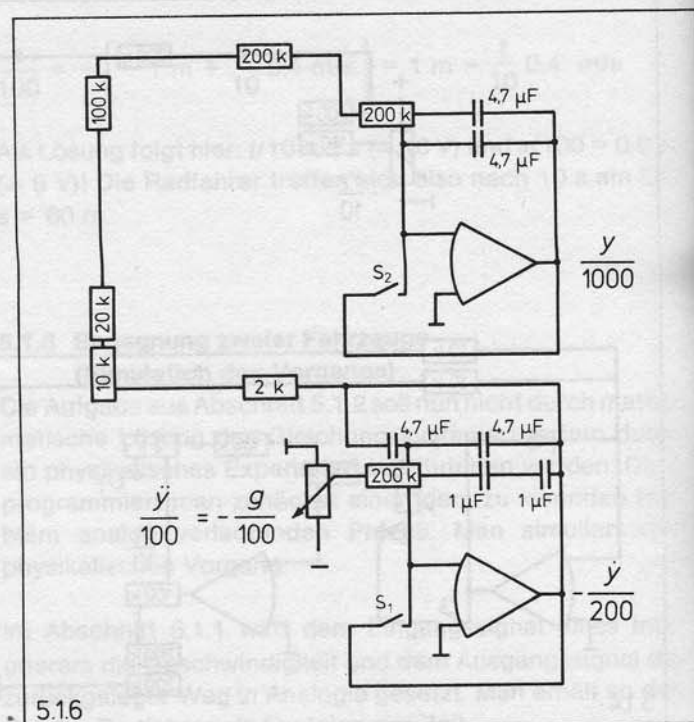
Bild 5.1.5 zeigt drei Beispiele für verschiedene Zeitkonstanten und Normierungsfaktoren. Die Rechenbereiche der angeschriebenen Eingangs- und Ausgangsgrößen gehen jeweils von  $-1$  bis  $+1$  (zur Amplitudenskalisierung siehe Abschnitte 1.3.2 und 5.1.1).

### 5.1.6 Freier Fall

Das einfachste Beispiel der Kinematik mit nicht verschwindender Beschleunigung ist wohl der freie Fall. Hier gilt mit der Erdbeschleunigung  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$  für die Beschleunigung  $\ddot{y}$  eines freien Körpers:

$$\ddot{y} = -g$$

Durch einmalige Integration erhält man entsprechend Abschnitt 5.1.5 die Geschwindigkeit  $\dot{y}(t)$  und nach einer zweiten Integration entsprechend Abschnitt 5.1.1 den Ort  $y(t)$ .

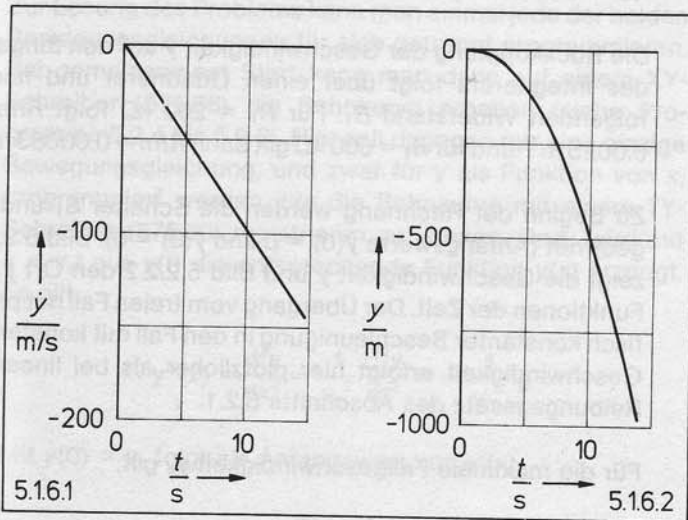


Im Schaltplan 5.1.6 wird am Potentiometer links unten begonnen mit  $\ddot{y}/100 = -g/100 = -0.098 \text{ m/s}^2 (\cong 0,98 \text{ V})$ . Am Ausgang des ersten Integrierers (Zeitkonstante  $RC = 2 \text{ s}$ ) erscheint  $-\dot{y}/200$ , am Ausgang des zweiten Integrierers (Zeitkonstante  $RC = 5 \text{ s}$ ) dann  $y/1000$ .

Zu Beginn der Rechnung werden die Schalter  $S_1$  und  $S_2$  geöffnet (Anfangswerte  $\dot{y}(0) = 0$  und  $y(0) = 0$ ). Bild 5.1.6.1 zeigt die Geschwindigkeit  $\dot{y}$  und Bild 5.1.6.2 den Ort  $y$  als Funktionen der Zeit. Es können so die folgenden Gesetze experimentell bestätigt werden:

$$\dot{y}(t) = -gt$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2$$



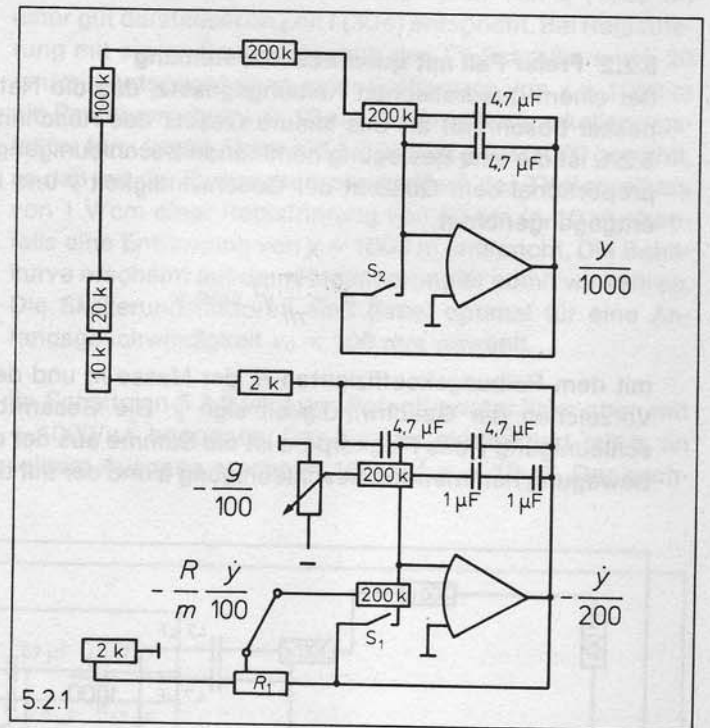
schleunigung  $a$  proportional der Geschwindigkeit  $\dot{y}$  und ihr entgegengerichtet:

$$a = -\frac{R}{m}\dot{y}$$

mit Reibungskoeffizient  $R$  und Masse  $m$ . Die Gesamtbeschleunigung  $\ddot{y}$  des Flugkörpers setzt sich dann aus der die Bewegung hemmenden Beschleunigung  $a$  und der auf den Körper wirkenden Erdbeschleunigung  $-g$  zusammen. Es gilt:

$$\ddot{y}(t) = -\frac{R}{m}\dot{y}(t) - g$$

Im Schaltplan 5.2.1 wird am Potentiometer links unten begonnen mit  $-g/100$  und mit  $-R\dot{y}/100 \text{ m}$ . Am Eingang des ersten Integrierers wird davon die Summe gebildet und am Ausgang (Zeitkonstante  $RC = 2 \text{ s}$ ) erscheint  $-\dot{y}/200$ ; der Ausgang des zweiten Integrierers (Zeitkonstante  $RC = 5 \text{ s}$ ) liefert dann  $y/1000$ .



## 5.2. Ballistik

Im Anschluß an das Programm zum freien Fall des Abschnitts 5.1.6 sollen hier Flugbahnen von Körpern im Schwerfeld der Erde unter Berücksichtigung von Reibung oder auch einer nicht verschwindenden Anfangsgeschwindigkeit untersucht werden.

Das Kapitel beginnt mit dem Einfluß eines linearen oder quadratischen Reibungsgesetz auf den freien Fall. Es folgen Programme zum schiefen Wurf ohne Reibung (mit TY-Schreiber oder XY-Schreiber zu registrieren) und mit einem linearen Reibungsgesetz. (Für die Lösung des schiefen Wurfs mit quadratischer Reibung ist der hier beschriebene Analogrechner zu klein.) Zum Schluß folgt als ein Beispiel einer Bewegung mit nicht konstanter Beschleunigung der Start einer Rakete.

### 5.2.1 Freier Fall mit linearer Reibung

Der Luftwiderstand eines Flugkörpers äußert sich in einer die Bewegung hemmenden Kraft, in einer Beschleunigung. Bei linearem Reibungsgesetz, das hier zunächst angenommen werden soll, ist die eine Bewegung hemmende Be-

Die Rückkopplung der Geschwindigkeit  $\dot{y}$  auf den Eingang des ersten Integrierers folgt über einen Spannungsteiler. Für  $R_1 = 5 \text{ k}\Omega$  folgt  $R/m = 0.141 \text{ s}^{-1}$  und für  $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$  folgt  $R/m = 0.045 \text{ s}^{-1}$ .

Zu Beginn der Rechnung werden die Schalter  $S_1$  und  $S_2$  geöffnet (Anfangswerte  $\dot{y}(0) = 0$  und  $y(0) = 0$ ). Bild 5.2.1.1 zeigt die Geschwindigkeit  $\dot{y}$  und Bild 5.2.1.2 den Ort  $y$  als Funktionen der Zeit. Bei  $R/m = 0.141 \text{ s}^{-1}$  zeigt sich bereits in den ersten 15 s, daß eine maximale Fallgeschwindigkeit  $\dot{y}_e$  nicht überschritten werden kann. Es gilt:

$$\dot{y}_e = -\frac{m}{R}g$$

Körper wirkenden Erdbeschleunigung  $-g$ . Es gilt:

$$\ddot{y}(t) = -\frac{R}{m} \dot{y}(t)^2 \text{ sign } \dot{y} - g$$

Da beim Fall aus der Ruhelage  $\dot{y}$  immer kleiner oder gleich Null und somit  $\text{sign } \dot{y} = -1$  ist, folgt:

$$\ddot{y}(t) = \frac{R}{m} \dot{y}(t)^2 - g$$

Im Schaltplan 5.2.2 wird am Eingang des unteren Integrierers die Summe aus  $-g/100$  und  $R\dot{y}^2/100$  m gebildet. Am Ausgang (Zeitkonstante  $RC = 2$  s) erscheint  $-\dot{y}/200$  und am Ausgang des zweiten Integrierers (Zeitkonstante  $RC = 5$  s) dann  $y/1000$ .

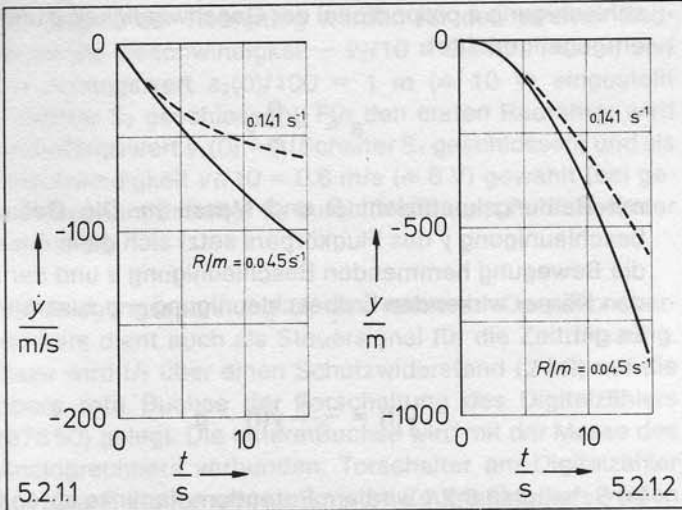
Die Rückkopplung der Geschwindigkeit  $\dot{y}$  auf den Eingang des Integrierers folgt über einen Quadrierer und nachfolgenden Widerstand  $R_1$ . Für  $R_1 = 200$  k $\Omega$  folgt  $R/m = 0.0025$  m $^{-1}$  und für  $R_1 = 600$  k $\Omega$  gilt dann  $R/m = 0.00083$  m $^{-1}$ .

Zu Beginn der Rechnung werden die Schalter  $S_1$  und  $S_2$  geöffnet (Anfangswerte  $\dot{y}(0) = 0$  und  $y(0) = 0$ ). Bild 5.2.2.1 zeigt die Geschwindigkeit  $\dot{y}$  und Bild 5.2.2.2 den Ort  $y$  als Funktionen der Zeit. Der Übergang vom freien Fall mit praktisch konstanter Beschleunigung in den Fall mit konstanter Geschwindigkeit erfolgt hier plötzlicher als bei linearem Reibungsgesetz des Abschnitts 5.2.1.

Für die maximale Fallgeschwindigkeit  $\dot{y}_e$  gilt:

$$\dot{y}_e = -\frac{m}{R} g$$

Mit  $R/m = 0.0025$  m $^{-1}$  folgt  $\dot{y}_e = -63$  m/s,  
mit  $R/m = 0.00083$  m $^{-1}$  folgt  $\dot{y}_e = -109$  m/s.



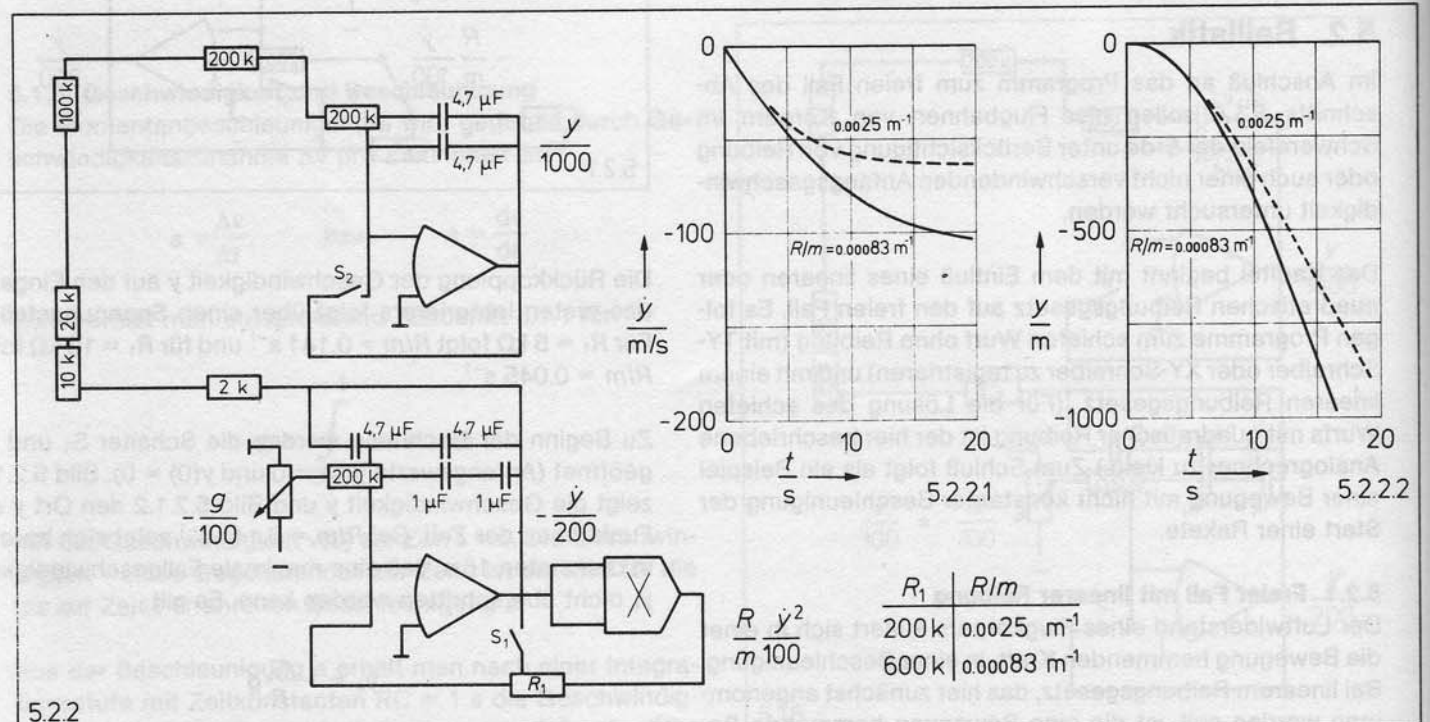
Mit  $R/m = 0.141$  s $^{-1}$  folgt  $y_e = -70$  m/s,  
mit  $R/m = 0.045$  s $^{-1}$  folgt  $y_e = -220$  m/s.

### 5.2.2 Freier Fall mit quadratischer Reibung

Bei einem quadratischen Reibungsgesetz, das die Natur besser beschreibt als das lineare Gesetz des Abschnitts 5.2.1, ist die eine Bewegung hemmende Beschleunigung  $a$  proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit  $\dot{y}$  und ihr entgegengerichtet:

$$a = -\frac{R}{m} \dot{y}^2 \text{ sign } \dot{y}$$

mit dem Reibungskoeffizienten  $R$ , der Masse  $m$  und dem Vorzeichen der Geschwindigkeit  $\text{sign } \dot{y}$ . Die Gesamtbeschleunigung  $\ddot{y}$  des Flugkörpers ist die Summe aus der die Bewegung hemmenden Beschleunigung  $a$  und der auf den



### 5.2.3 Schiefer Wurf (Registrierung mit TY-Schreiber)

Beim freien Fall des Abschnitts 5.1.6 wird als Anfangswert der Geschwindigkeit  $\dot{y}(0) = 0$  gewählt. Gibt man dagegen eine nicht verschwindende Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  vor, die im allgemeinen nicht nur eine Y-Komponente sondern auch eine X-Komponente hat, so spricht man vom schiefen Wurf.

Bei Vernachlässigung der Reibung gelten als Bewegungsgleichungen für die Y- und X-Komponenten der Bahnkurve:

$$\ddot{y} = -g \quad \text{und} \quad \dot{x} = v_x$$

mit den Anfangswerten  $y(0) = 0$ ,  $x(0) = 0$ ,  $\dot{y}(0) = v_y$  und mit  $v_y^2 + v_x^2 = v_0^2$ .

Zur Lösung des Problems kann man einmal jede der beiden Bewegungsgleichungen für sich getrennt programmieren. Bei gemeinsamem Start kann man dann auf einem XY-Schreiber (575 66) die Bahnkurve erhalten (siehe Programme 5.2.4 bis 5.2.6). Hier soll dagegen nur eine einzige Bewegungsgleichung, und zwar für  $y$  als Funktion von  $x$ , programmiert werden, um die Bahnkurve mit einem TY-Schreiber (575 60) registrieren zu können. Dazu wird mit  $x = v_x t$  aus  $y(t)$  die entsprechende Funktion  $y(x)$  erzeugt. Es gilt:

$$y''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{v_x^2} \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{1}{v_x^2} g$$

Mit  $\dot{y}(0) = v_y$  folgt als Anfangswert von  $y'(x)$ :

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{v_x} \frac{dy}{dt}$$

$$y'(0) = \frac{v_y}{v_x} = \sqrt{\frac{v_0^2}{v_x^2} - 1}$$

Mit den Integrierern eines Analogrechners können nur Integrale nach der Zeit berechnet werden (siehe Abschnitte 1.3.3 und 2.1.6, vergleiche auch Vorbemerkung zu Kapitel 3.2). Zur Lösung der Gleichung

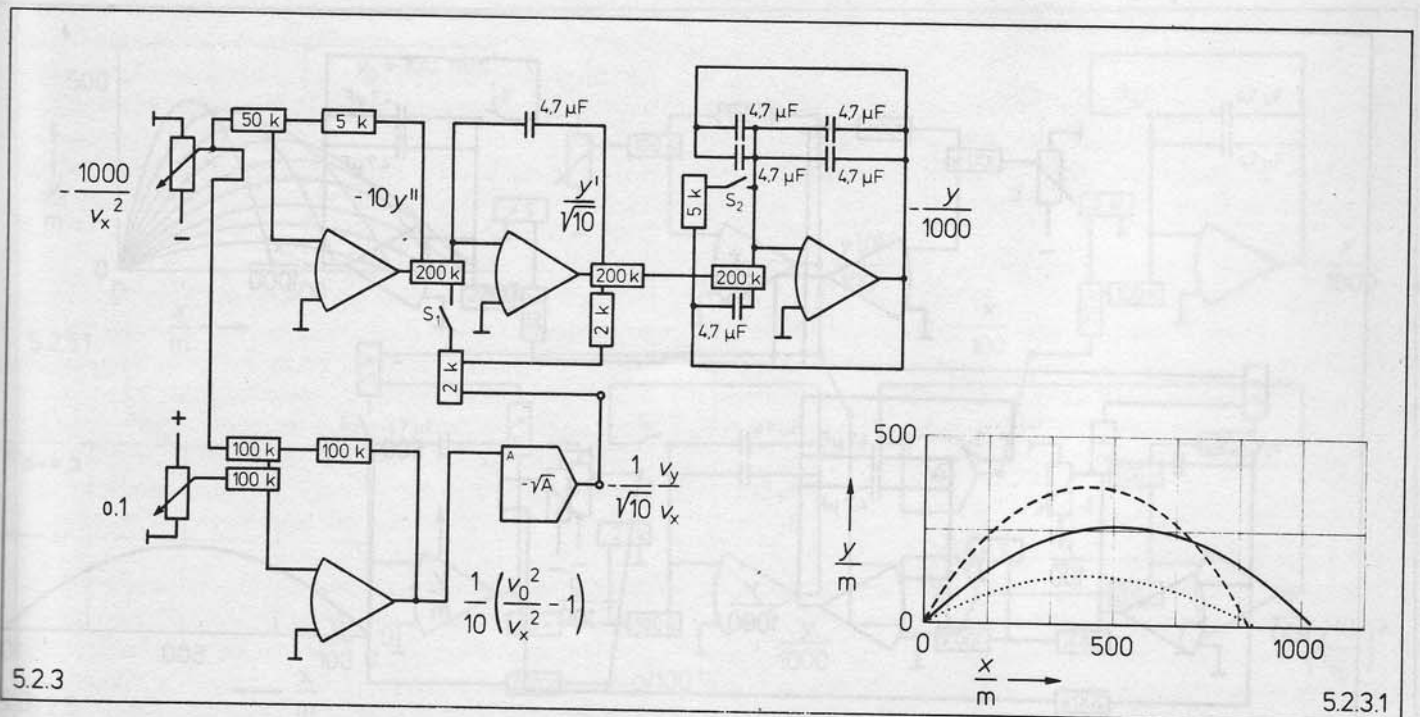
$$y''(x) = -\frac{1}{v_x^2} g$$

muß man bei den Integrierern die Zeit  $t$  als unabhängige Variable ersetzen durch  $x = t/v_x$ . Mit  $y_1(x)$  am Eingang eines Integrierers erhält man dann an dessen Ausgang (Zeitkonstante  $RC$ ):

$$y_0(x) = -\frac{\alpha}{RC} \int_0^x y_1(x) dx + y_0(0)$$

Der Skalierungsfaktor  $\alpha = 0,03$  s/m wird hier einmal so gewählt, daß der interessierende Bereich von  $x$  (1000 m) einer gut darstellbaren Zeit  $t$  (30 s) entspricht. Bei Registrierung mit einem Papiervorschub des TY-Schreibers von 20 cm/min entspricht dann einer Entfernung von  $x = 1000$  m ein Papiervorschub von 10 cm. Als Amplitudenskalierungsfaktor für  $y$  (siehe Abschnitt 1.3.2) wird  $a = 1/1000$  gewählt, so daß mit der Eingangsempfindlichkeit des TY-Schreibers von 1 V/cm einer Registrierung von 10 cm ( $\cong 10$  V) ebenfalls eine Entfernung von  $y = 1000$  m entspricht. Die Bahnkurve erscheint auf dem Registrierpapier somit winkeltreu. Die Skalierungsfaktoren sind dabei optimal für eine Anfangsgeschwindigkeit  $v_0 = 100$  m/s gewählt.

Im Schaltplan 5.2.3 wird am Potentiometer links oben mit  $-1000/v_x^2$  begonnen. Der Inverter multipliziert mit  $g$ , an seinem Ausgang erscheint  $10g/v_x^2 = -10y''$ . Der nach-



folgende Integrierer (Zeitkonstante  $RC = 0.94$  s) liefert:

$$-\frac{\alpha}{RC} \int_0^x (-10 y'') dx + \frac{10\alpha}{RC} y'(0)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}} \int_0^x y'' dx + \frac{1}{\sqrt{10}} y'(0) = \frac{1}{\sqrt{10}} y'$$

( $RC/10\alpha$  ist etwa gleich  $\sqrt{10}$ ). Ein zweiter Integrierer (Zeitkonstante  $RC = 9.4$  s) zeigt als Ausgangssignal ( $RC/\alpha$  ist hier etwa gleich  $100\sqrt{10}$ ):

$$-\frac{\alpha}{RC} \int_0^x \frac{y'(x)}{\sqrt{10}} dx = -y(x)/1000$$

Wenn der Rechenfehler klein bleiben soll, sind bei diesem Programm die Operationsverstärker besonders gut abzugleichen (siehe Abschnitt 1.4.1).

Die Anfangswerte werden bei geschlossenen Schaltern  $S_1$  und  $S_2$  eingestellt. Es gilt  $y(0) = 0$  und  $y'(0) = v_y/v_x$ . Der zweite Anfangswert wird in der unteren Hälfte des Schaltbildes 5.2.3 automatisch berechnet. Der Summierer bildet (mit  $v_0 = 100$  m/s):

$$\frac{1}{10} \left( \frac{v_0^2}{v_x^2} - 1 \right)$$

Der nachfolgende Radizierer liefert dann:

$$-\frac{1}{\sqrt{10}} \sqrt{\frac{v_0^2}{v_x^2} - 1} = -\frac{1}{\sqrt{10}} \frac{v_y}{v_x}$$

Mit dem Potentiometer links oben kann damit gleichzeitig  $y''$  und  $y'(0)$  so geändert werden, daß mit  $v_0 = 100$  m/s immer gilt:

$$v_x^2 + v_y^2 = v_0^2$$

Es wird also bei festem Betrag der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  nur deren Richtung variiert. Der Abschlußwinkel kann leicht über das Ausgangssignal A des Radizierers eingestellt werden. Es gilt:

$$A = -\frac{1}{\sqrt{10}} \frac{v_y}{v_x} = -0.18 (\hat{=} -1.8 \text{ V}) \text{ für } 30^\circ$$

$$-0.32 (\hat{=} -3.2 \text{ V}) \text{ für } 45^\circ$$

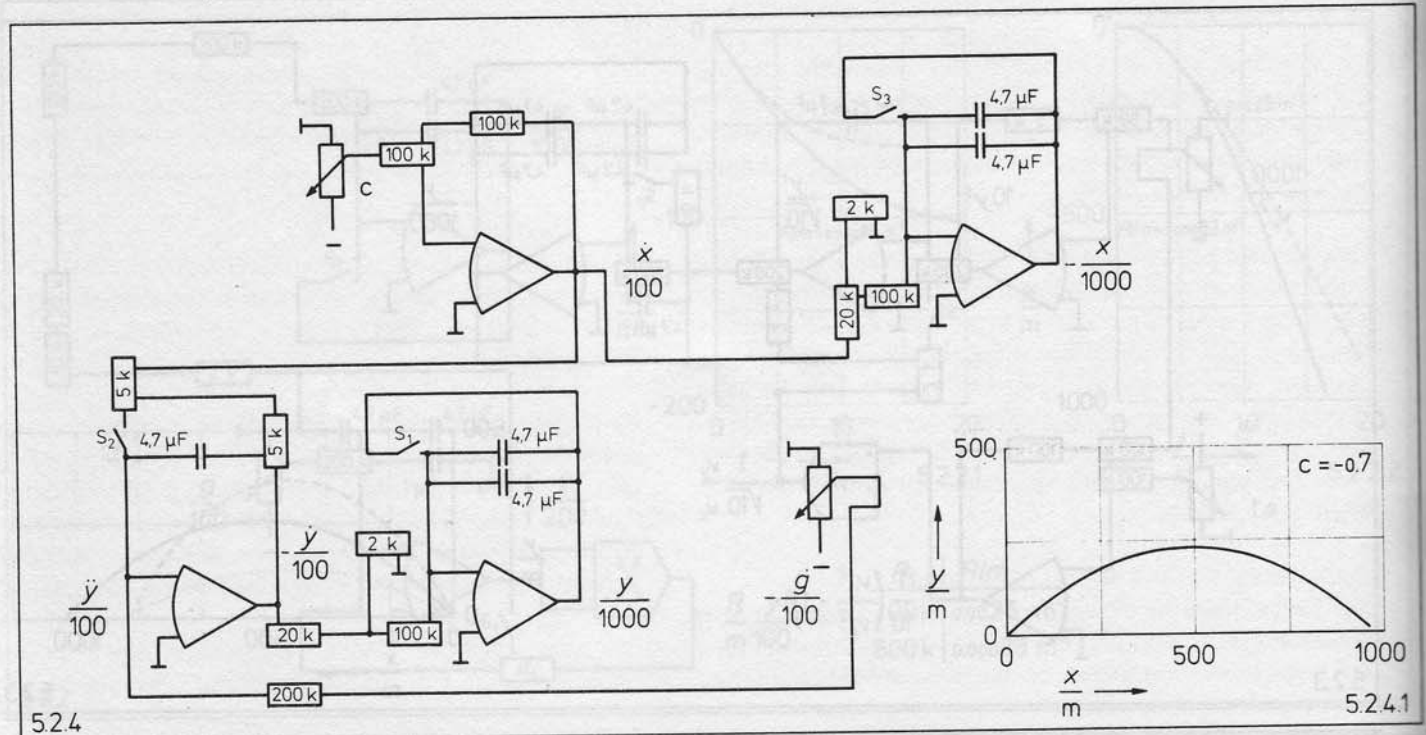
$$-0.55 (\hat{=} -5.5 \text{ V}) \text{ für } 60^\circ$$

Mit Beginn der Rechnung werden die Schalter  $S_1$  und  $S_2$  geöffnet. Bild 5.2.3.1 zeigt die Bahnkurven  $y(x)$  für drei verschiedene Abschlußwinkel. Es zeigt sich, daß die größte Entfernung mit einem Startwinkel von  $45^\circ$  überbrückt wird. Die Wurfweiten für  $30^\circ$  und  $60^\circ$  sind gleich (mit Reibung siehe Abschnitt 5.2.6). Bild 5.2.3.1 zeigt dabei die Registrierung des TY-Schreibers im Maßstab 1 : 2.

Die zur Registrierung mit dem TY-Schreiber notwendige Zeit ist hier jedoch kein Maß für die echte Flugzeit. Erst bei Registrierung mit einem XY-Schreiber kann das Programm so gestaltet werden, daß Rechenzeit und Flugzeit übereinstimmen.

#### 5.2.4 Schiefer Wurf (Registrierung mit XY-Schreiber)

Steht ein XY-Schreiber (z. B. 575 66) zur Registrierung der Ergebnisse zur Verfügung, können die im Abschnitt 5.2.3 für den schiefen Wurf angegebenen Bewegungsgleichungen getrennt programmiert werden. Bei Vernachlässigung der Reibung gilt für die Y- und X-Komponenten der Bahn-



kurve:

$$\ddot{y} = -g \quad \text{und} \quad \dot{x} = v_x$$

mit den Anfangsbedingungen  $y(0) = 0$ ,  $x(0) = 0$ ,  $\dot{y}(0) = v_y$  und mit  $v_x^2 + v_y^2 = v_0^2$ . Als Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  wird wieder 100 m/s gewählt, jedoch soll der Abschlußwinkel hier fest  $45^\circ$  betragen. Somit gilt  $v_x = v_y = 70,7$  m/s.

Im Schaltplan 5.2.4 wird in der oberen Hälfte aus  $\dot{x}/100$  mit einem Integrierer (Zeitkonstante  $RC = 10$  s)  $-x/1000$  erzeugt. In der unteren Hälfte wird mit  $\dot{y}/100 = -g/100 = -0,098$  m/s<sup>2</sup> ( $\hat{=} -0,98$  V) begonnen. Der erste Integrierer (Zeitkonstante  $RC = 1$  s) liefert  $-y/100$ , der zweite Integrierer (Zeitkonstante  $RC = 10$  s) gibt  $y/1000$ .

Mit Beginn der Rechnung werden die Schalter  $S_1$ ,  $S_2$  und  $S_3$  geöffnet (Anfangswerte  $y(0) = 0$ ,  $x(0) = 0$  und  $\dot{y}/100 = \dot{x}/100 = 0,707$  m/s ( $\hat{=} 7,07$  V) vorher einstellen). Bild 5.2.4.1 zeigt die Lösung auf einem XY-Schreiber registriert. Als Zeit wird für die Wurfweite von 1000 m etwa  $t = 14,1$  s benötigt.

### 5.2.5 Schiefer Wurf mit einstellbarem Winkel

Um den Abschlußwinkel frei wählen zu können, muß man den Schaltplan 5.2.4 durch ein Programm ergänzen, das entsprechend  $v_x^2 + v_y^2 = v_0^2$  aus dem Anfangswert  $v_y$  automatisch die dazu passende Geschwindigkeitskomponente  $v_x$  berechnet. Als Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  wird im folgenden wieder 100 m/s gewählt.

Der Schaltplan 5.2.5 zeigt das komplette Programm. Links unten wird wieder aus  $\dot{y}/100 = -g/100$  durch zweimalige Integration  $y/1000$  gebildet. Der Anfangswert  $\dot{y}(0)/100 = v_y/100$  wird auch einem Quadrierer zugeführt. Dieser liefert  $(v_y/v_0)^2$ . Der nachfolgende Summierer bildet  $1 - (v_y/v_0)^2$ .

Der Radizierer gibt

$$-\dot{x}/100 = -v_x/100 = -\frac{1}{100} \sqrt{v_0^2 - v_y^2}$$

und der nachfolgende Integrierer (Zeitkonstante  $RC = 10$  s) liefert dann  $x/1000$ .

Mit Beginn der Rechnung werden die Schalter  $S_1$ ,  $S_2$  und  $S_3$  geöffnet (Anfangswerte  $y(0) = 0$ ,  $\dot{y}(0)/100$  und  $x(0) = 0$  vorher einstellen). Bild 5.2.5.1 zeigt mit einem XY-Schreiber registrierte Lösungen für verschiedene Abschlußwinkel.

### 5.2.6 Schiefer Wurf mit linearer Reibung

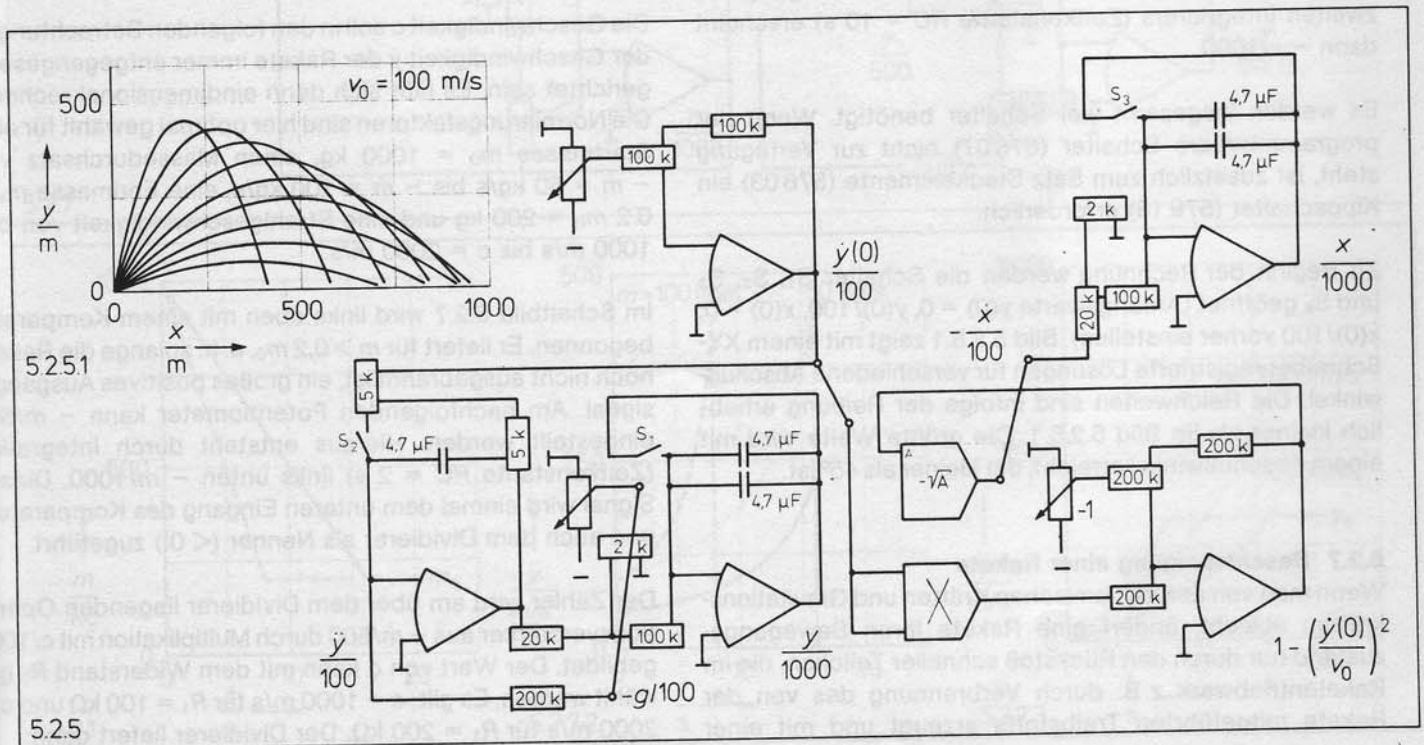
Der Luftwiderstand eines Flugkörpers äußert sich in einer die Bewegung hemmenden Kraft, in einer Beschleunigung. Bei linearem Reibungsgesetz, das hier angenommen werden soll, ist die eine Bewegung hemmende Beschleunigung  $a$  proportional der Geschwindigkeit und ihr entgegengerichtet. Die Beschleunigung läßt sich in Y- und X-Komponente aufteilen und es gilt:

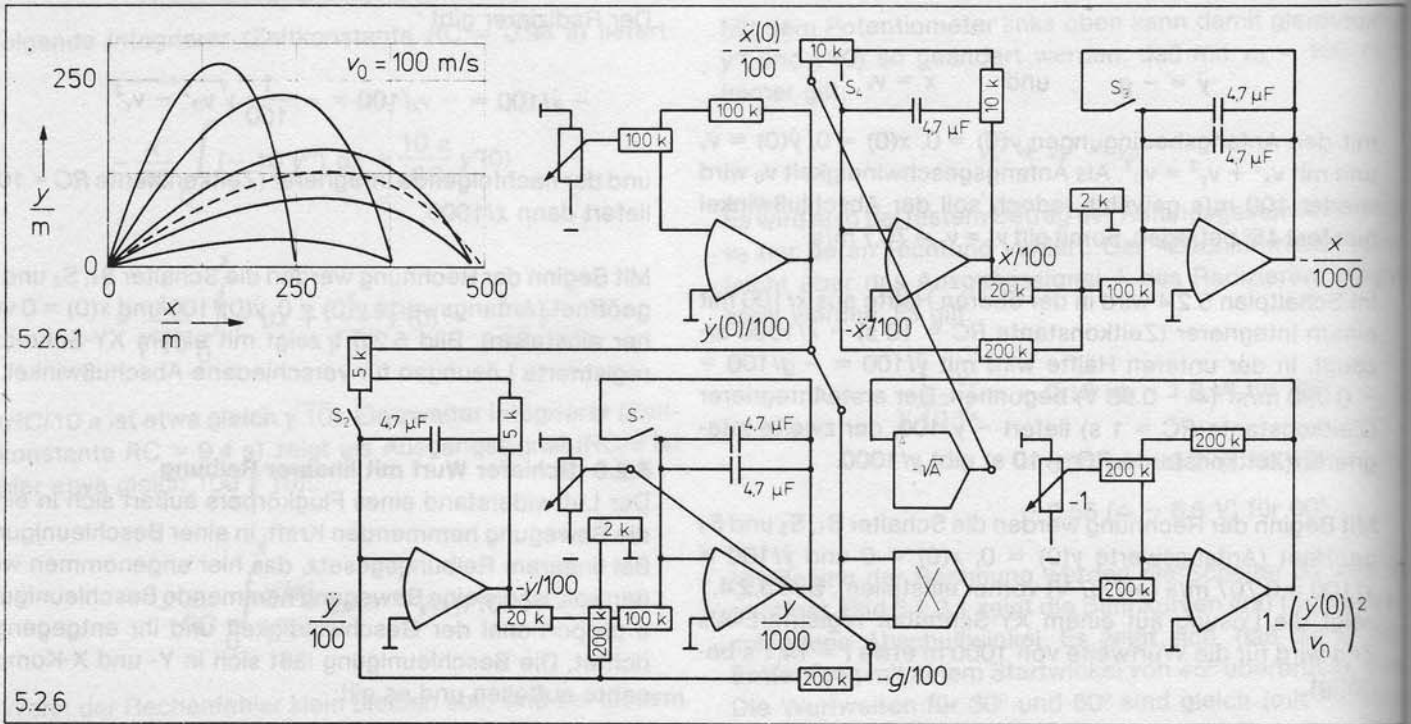
$$a_y = -\frac{R}{m} \dot{y} \quad \text{und} \quad a_x = -\frac{R}{m} \dot{x}$$

mit Reibungskoeffizient  $R$  und Masse  $m$ . Für die Lösung des schiefen Wurfs mit einem quadratischen Reibungsgesetz, das die Natur besser beschreibt als ein lineares Gesetz, ist der hier beschriebene Analogrechner zu klein.

Die Gesamtbeschleunigung des Flugkörpers setzt sich aus der die Bewegung hemmenden Beschleunigung  $a$  und der auf den Körper wirkenden Erdbeschleunigung  $-g$  zusammen. Für die Bewegungsgleichungen gilt:

$$\ddot{y} = -\frac{R}{m} \dot{y} - g \quad \text{und} \quad \ddot{x} = -\frac{R}{m} \dot{x}$$





mit den Anfangswerten  $y(0) = 0$ ,  $x(0) = 0$ ,  $\dot{y}(0) = v_y$ ,  $\dot{x}(0) = v_x$  und mit  $v_x^2 + v_y^2 = v_0^2$ . Als Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  wird wieder 100 m/s gewählt und für  $R/m$  soll gelten:  $R/m = 0.1 \text{ s}^{-1}$ .

Im Schaltplan 5.2.6 wird links unten vor dem Eingang des ersten Integrierers die Summe  $\ddot{y}/100 = -\dot{y}/1000 - g/100$  gebildet. Am Ausgang des Integrierers (Zeitkonstante  $RC = 1 \text{ s}$ ) erscheint  $-\dot{y}/100$  und der zweite Integrierer (Zeitkonstante  $RC = 10 \text{ s}$ ) liefert dann  $y/1000$ . Rechts unten wird wie im Abschnitt 5.2.5 aus  $\dot{y}(0)/100$  der Anfangswert  $\dot{x}(0)/100$  berechnet. Rechts oben wird mit  $-\ddot{x}/100 = \dot{x}/1000$  am Eingang eines Integrierers an dessen Ausgang (Zeitkonstante  $RC = 1 \text{ s}$ )  $\dot{x}/100$  gebildet. Am Ausgang des zweiten Integrierers (Zeitkonstante  $RC = 10 \text{ s}$ ) erscheint dann  $-x/1000$ .

Es werden insgesamt vier Schalter benötigt. Wenn der programmierbare Schalter (57607) nicht zur Verfügung steht, ist zusätzlich zum Satz Steckelemente (57603) ein Kippschalter (57913) erforderlich.

Zu Beginn der Rechnung werden die Schalter  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  und  $S_4$  geöffnet (Anfangswerte  $y(0) = 0$ ,  $\dot{y}(0)/100$ ,  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0)/100$  vorher einstellen). Bild 5.2.6.1 zeigt mit einem XY-Schreiber registrierte Lösungen für verschiedene Abschubwinkel. Die Reichweiten sind infolge der Reibung erheblich kleiner als im Bild 5.2.5.1. Die größte Weite wird mit einem Abschubwinkel erreicht, der kleiner als  $45^\circ$  ist.

**5.2.7 Beschleunigung einer Rakete**

Wenn man von aerodynamischen Kräften und Gravitationskräften absieht, ändert eine Rakete ihren Bewegungszustand nur durch den Rückstoß schneller Teilchen, die im Raketentriebwerk z.B. durch Verbrennung des von der Rakete mitgeführten Treibstoffs erzeugt und mit einer

Geschwindigkeit  $c$  (z.B. 2000 m/s) relativ zur Rakete ausgestoßen werden. Während des Beschleunigungsvorgangs verringert sich somit die Masse der Rakete von der Startmasse  $m_0$  bis auf eine Restmasse  $m_e$  (z.B.  $0.2 m_0$ ), die von den leeren Treibstoffbehältern und der Nutzlast gegeben wird.

Der Schub einer Rakete ergibt sich aus dem Produkt von Massedurchsatz je Sekunde ( $-\dot{m}$ ) und Strahlgeschwindigkeit ( $c$ ). Bei Vernachlässigung von Gravitation und Reibung folgt als Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{y} = -\dot{m}c$$

Die Geschwindigkeit  $c$  soll in den folgenden Betrachtungen der Geschwindigkeit  $\dot{y}$  der Rakete immer entgegengesetzt gerichtet sein. Es läßt sich dann eindimensional rechnen. Die Normierungsfaktoren sind hier optimal gewählt für eine Startmasse  $m_0 = 1000 \text{ kg}$ , einen Massedurchsatz von  $-\dot{m} = 50 \text{ kg/s}$  bis  $-\dot{m} = 100 \text{ kg/s}$ , eine Endmasse  $m_e = 0.2 m_0 = 200 \text{ kg}$  und eine Strahlgeschwindigkeit von  $c = 1000 \text{ m/s}$  bis  $c = 2000 \text{ m/s}$ .

Im Schaltbild 5.2.7 wird links oben mit einem Komparator begonnen. Er liefert für  $m > 0.2 m_0$ , d.h. solange die Rakete noch nicht ausgebrannt ist, ein großes positives Ausgangssignal. Am nachfolgenden Potentiometer kann  $-\dot{m}/500$  eingestellt werden. Hieraus entsteht durch Integration (Zeitkonstante  $RC = 2 \text{ s}$ ) links unten  $-m/1000$ . Dieses Signal wird einmal dem unteren Eingang des Komparators und auch dem Dividierer als Nenner ( $< 0!$ ) zugeführt.

Der Zähler wird am über dem Dividierer liegenden Operationsverstärker aus  $-\dot{m}/500$  durch Multiplikation mit  $c/1000$  gebildet. Der Wert von  $c$  kann mit dem Widerstand  $R_1$  gewählt werden. Es gilt:  $c = 1000 \text{ m/s}$  für  $R_1 = 100 \text{ k}\Omega$  und  $c = 2000 \text{ m/s}$  für  $R_1 = 200 \text{ k}\Omega$ . Der Dividierer liefert dann:



$$\frac{\dot{m}c/500000}{-m/1000} = -\frac{\dot{m}c}{m} \frac{1}{500} = \frac{\ddot{y}}{500}$$

Aus der Beschleunigung bildet der Integrierer (Zeitkonstante  $RC = 10$  s) rechts unten  $-\dot{y}/5000$  und der folgende Integrierer (Zeitkonstante  $RC = 5$  s) berechnet dann  $y/25000$ .

Vor Beginn der Rechnung werden bei geschlossenen Schaltern  $S_1$ ,  $S_2$  und  $S_3$  die Anfangswerte  $y(0) = 0$ ,  $\dot{y}(0) = 0$  und  $m(0)/1000 = 1$  kg ( $\hat{=} 10$  V) gewählt. Am Potentiometer links oben wird  $-\dot{m}/500 = 0.1$  kg/s ( $\hat{=} 1$  V) oder  $-\dot{m}/500 = 0.2$  kg/s ( $\hat{=} 2$  V) eingestellt und mit  $R_1$  der Wert der Strahlgeschwindigkeit  $c$  vorgegeben.

Werden die Schalter  $S_1$ ,  $S_2$  und  $S_3$  gleichzeitig geöffnet, beginnt die Rechnung. Bilder 5.2.7.1 bis 5.2.7.4 zeigen die Ergebnisse, die ausgezogenen Kurven für  $\dot{m} = -50$  kg/s und  $c = 1000$  m/s, die gestrichelten Kurven für  $\dot{m} = -100$  kg/s und  $c = 1000$  m/s, die gepunkteten Kurven für  $\dot{m} = -50$  kg/s und  $c = 2000$  m/s.

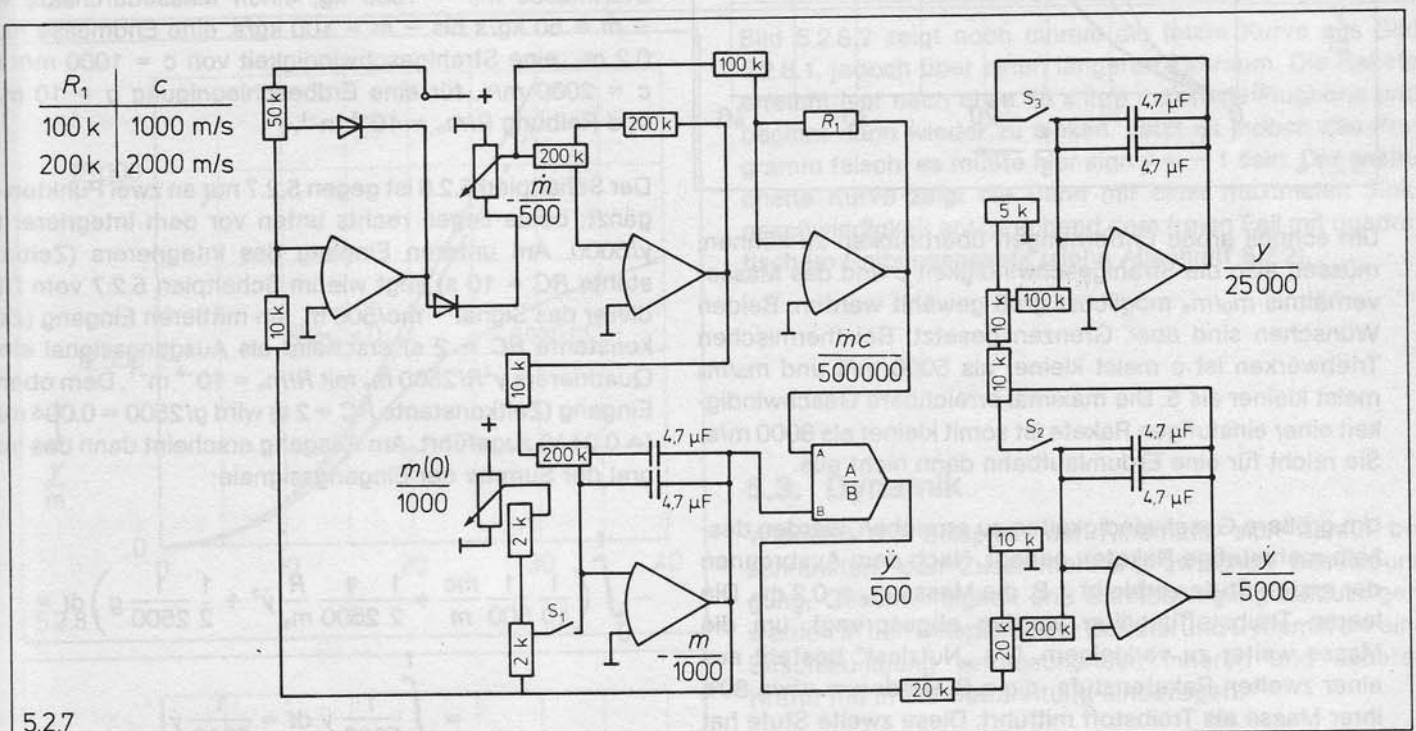
Die Masse  $m$  nimmt bei konstantem Massedurchsatz geradlinig ab, bis die Endmasse  $m_e$  erreicht ist (Bild 5.2.7.1). Jetzt wird das Ausgangssignal des Komparators automatisch auf Null gesetzt, damit folgt  $\dot{m} = 0$  und  $\dot{m}$  ändert sich nicht mehr. Die Rakete ist ausgebrannt und bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit  $\dot{y}_e$  weiter (Bild 5.2.7.3). Diese Endgeschwindigkeit ist nur von  $c$  und  $m_0/m_e$  abhängig, nicht von  $\dot{m}$ . Der Massedurchsatz braucht auch nicht konstant zu sein.

Die von der Mathematik gelieferte Formel

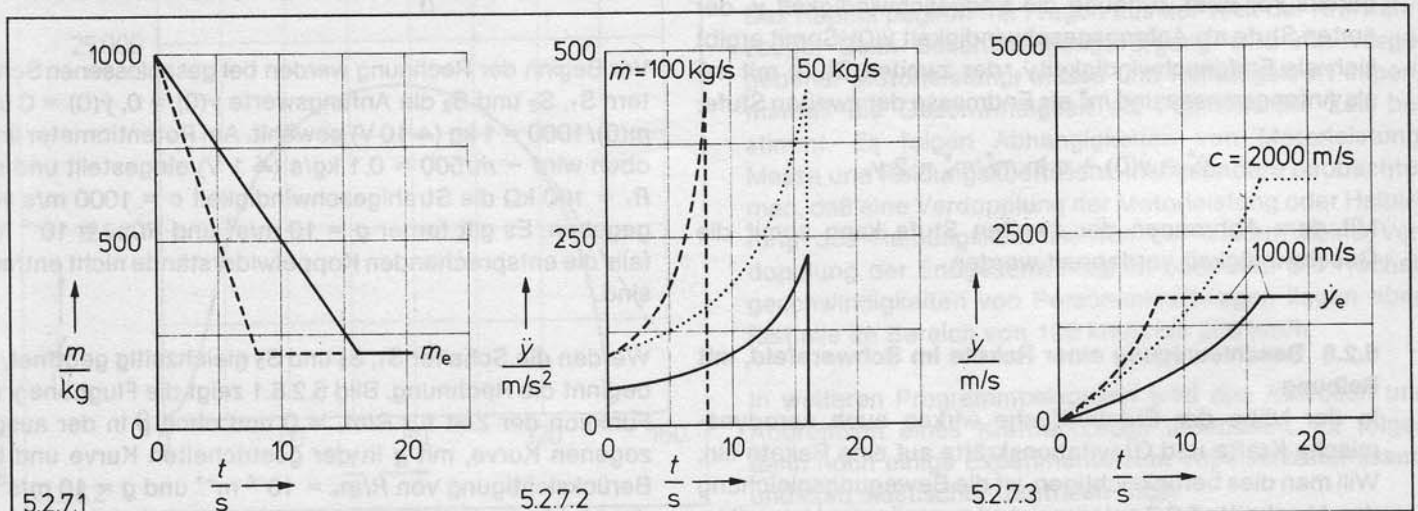
$$\dot{y}_e = \dot{y}(0) + c \ln m_0/m_e$$

läßt sich experimentell bestätigen. Hier ist  $\dot{y}(0) = 0$ . Mit  $m_0/m_e = 5$  und  $c = 1000$  m/s folgt  $\dot{y}_e = 1600$  m/s, mit  $m_0/m_e = 5$  und  $c = 2000$  m/s folgt  $\dot{y}_e = 3200$  m/s.

Die während der Brenndauer von 8 s bei  $\dot{m} = -100$  kg/s und von 16 s bei  $\dot{m} = -50$  kg/s auftretenden Beschleunigungen zeigt Bild 5.2.7.2. Die Flughöhen  $y$  als Funktion der



5.2.7

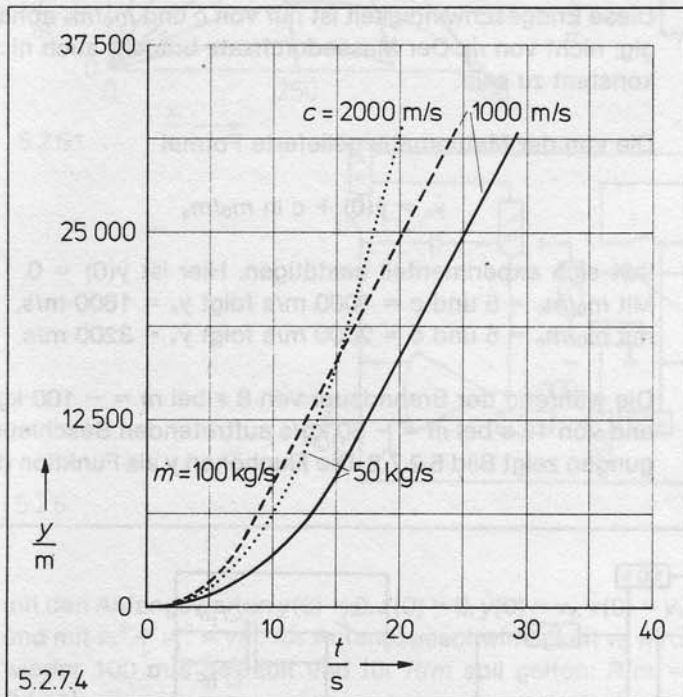


5.2.7.1

5.2.7.2

5.2.7.3

Zeit werden in Bild 5.2.7.4 wiedergegeben. Auch hier zeigt sich wie schon im Bild 5.2.7.3 deutlich, daß bei größerem Massedurchsatz die Endgeschwindigkeit früher erreicht aber nicht verändert wird, solange die Strahlgeschwindigkeit festgehalten wird.



Um schnell große Entfernungen überbrücken zu können, müssen also die Strahlgeschwindigkeit  $c$  und das Masseverhältnis  $m_0/m_e$  möglichst groß gewählt werden. Beiden Wünschen sind aber Grenzen gesetzt. Bei thermischen Triebwerken ist  $c$  meist kleiner als 5000 m/s und  $m_0/m_e$  meist kleiner als 5. Die maximal erreichbare Geschwindigkeit einer einstufigen Rakete ist somit kleiner als 8000 m/s. Sie reicht für eine Erdumlaufbahn dann nicht aus.

Um größere Geschwindigkeiten zu erreichen, werden deshalb mehrstufige Raketen gebaut. Nach dem Ausbrennen der ersten Stufe verbleibt z. B. die Masse  $m_e = 0.2 m_0$ . Die leeren Treibstoffbehälter werden abgesprengt, um die Masse weiter zu verkleinern. Die „Nutzlast“ besteht aus einer zweiten Raketenstufe, die z. B. wiederum etwa 80% ihrer Masse als Treibstoff mitführt. Diese zweite Stufe hat bereits vor ihrer Zündung die Endgeschwindigkeit  $\dot{y}_e$  der ersten Stufe als Anfangsgeschwindigkeit  $\dot{y}(0)$ . Somit ergibt sich als Endgeschwindigkeit  $\dot{y}_e^*$  der zweiten Stufe mit  $m_0^*$  als Anfangsmasse und  $m_e^*$  als Endmasse der zweiten Stufe:

$$\dot{y}_e^* = \dot{y}(0) + c \ln \frac{m_0^*}{m_e^*} = 2 \dot{y}_e$$

Mit dem Abbrennen der zweiten Stufe kann somit die Geschwindigkeit verdoppelt werden.

### 5.2.8 Beschleunigung einer Rakete im Schwerfeld, mit Reibung

In der Nähe der Erdoberfläche wirken auch aerodynamische Kräfte und Gravitationskräfte auf eine Rakete ein. Will man dies berücksichtigen, ist die Bewegungsgleichung des Abschnitts 5.2.7 entsprechend zu ergänzen. Um weiter-

hin eindimensional rechnen zu können, wird angenommen, daß die Schwerkraft dem Schub der Rakete und damit ihrer Geschwindigkeit genau entgegengesetzt gerichtet ist und daß sich die aerodynamischen Kräfte allein durch ein quadratisches Reibungsgesetz (siehe auch Abschnitt 5.2.2) beschreiben lassen. Es gilt dann in Erweiterung des Abschnitts 5.2.7:

$$m\ddot{y} = -\dot{m}c - mg - R^*\dot{y}^2 \text{ sign } \dot{y}$$

Im folgenden Programm wird fest  $\text{sign } \dot{y} = 1$  gesetzt, was für  $\dot{y} > 0$ , d. h. solange die Rakete steigt, erlaubt ist. Ferner wird einfacherhalber angenommen, daß der Reibungskoeffizient  $R^*$  nicht konstant ist, sondern gegeben wird durch  $R^* = R/m_e$ . Nach Division durch  $m$  erhält man dann:

$$\ddot{y} = -\frac{\dot{m}}{m}c - g - \frac{R}{m_e}\dot{y}^2$$

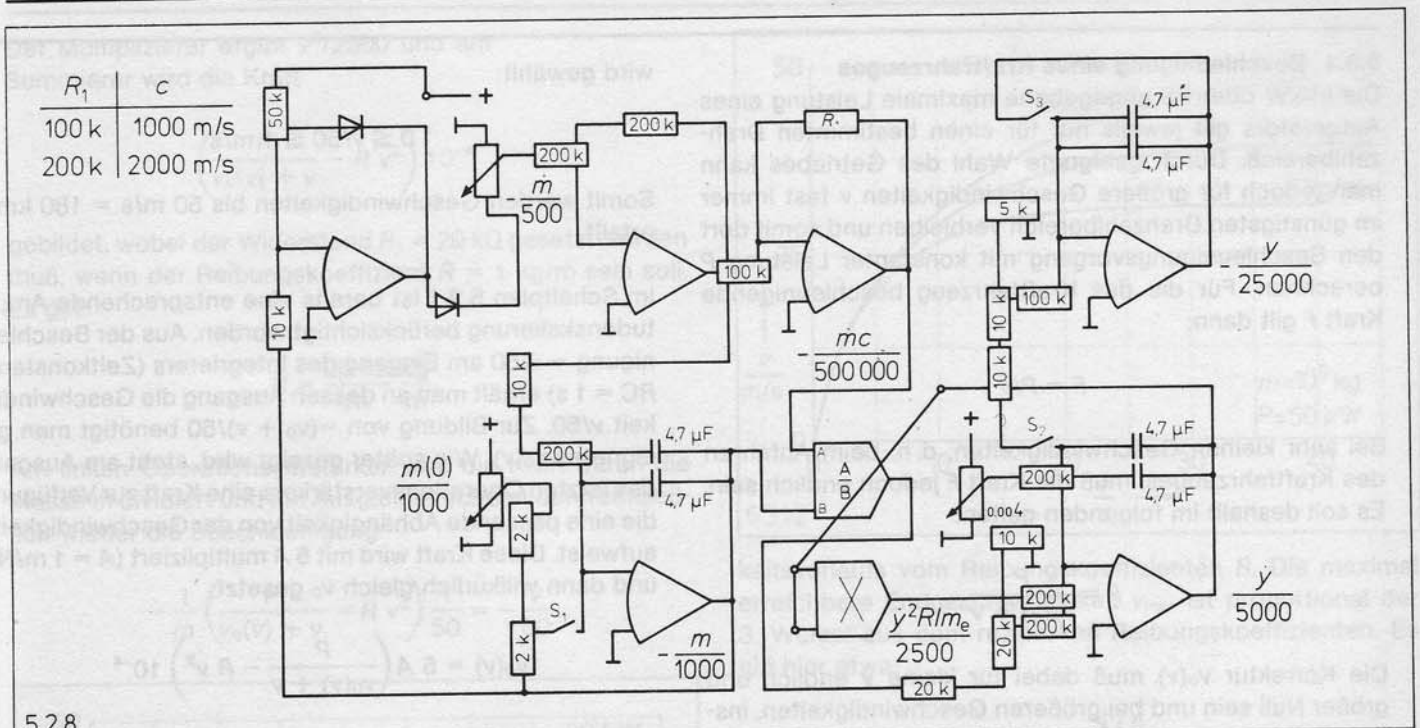
Diese Gleichung ist im Schaltplan 5.2.8 programmiert. Die Normierungsfaktoren sind wieder optimal gewählt für eine Startmasse  $m_0 = 1000$  kg, einen Massedurchsatz von  $-\dot{m} = 50$  kg/s bis  $-\dot{m} = 100$  kg/s, eine Endmasse  $m_e = 0.2 m_0$ , eine Strahlgeschwindigkeit von  $c = 1000$  m/s bis  $c = 2000$  m/s, für eine Erdbeschleunigung  $g = 10$  m/s<sup>2</sup> und Reibung  $R/m_e = 10^{-4}$  m<sup>-1</sup>.

Der Schaltplan 5.2.8 ist gegen 5.2.7 nur an zwei Punkten ergänzt; beide liegen rechts unten vor dem Integrierer für  $\dot{y}/5000$ . Am unteren Eingang des Integrierers (Zeitkonstante  $RC = 10$  s) liegt wie im Schaltplan 5.2.7 vom Dividierer das Signal  $-\dot{m}c/500$  m, am mittleren Eingang (Zeitkonstante  $RC = 2$  s) erscheint als Ausgangssignal eines Quadrierers  $\dot{y}^2 R/2500 m_e$  mit  $R/m_e = 10^{-4}$  m<sup>-1</sup>. Dem oberen Eingang (Zeitkonstante  $RC = 2$  s) wird  $g/2500 = 0.004$  m/s<sup>2</sup> ( $\approx 0.04$  V) zugeführt. Am Ausgang erscheint dann das Integral der Summe der Eingangssignale:

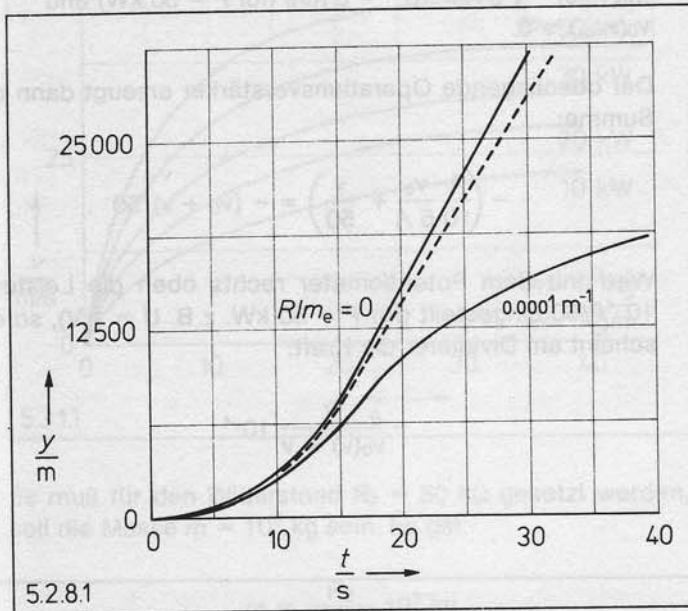
$$\begin{aligned} -\int_0^t \left( \frac{1}{10} \frac{1}{500} \frac{\dot{m}c}{m} + \frac{1}{2} \frac{1}{2500} \frac{R}{m_e} \dot{y}^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2500} g \right) dt &= \\ &= \int_0^t \frac{1}{5000} \ddot{y} dt = \frac{1}{5000} \dot{y} \end{aligned}$$

Vor Beginn der Rechnung werden bei geschlossenen Schaltern  $S_1$ ,  $S_2$  und  $S_3$  die Anfangswerte  $y(0) = 0$ ,  $\dot{y}(0) = 0$  und  $m(0)/1000 = 1$  kg ( $\approx 10$  V) gewählt. Am Potentiometer links oben wird  $-\dot{m}/500 = 0.1$  kg/s ( $\approx 1$  V) eingestellt und mit  $R_1 = 100$  k $\Omega$  die Strahlgeschwindigkeit  $c = 1000$  m/s vorgegeben. Es gilt ferner  $g = 10$  m/s<sup>2</sup> und  $R/m_e = 10^{-4}$  m<sup>-1</sup> falls die entsprechenden Koppelwiderstände nicht entfernt sind.

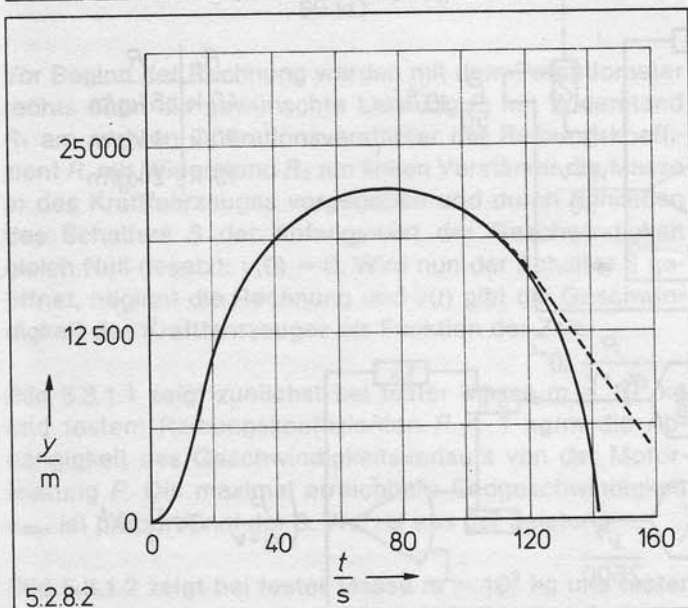
Werden die Schalter  $S_1$ ,  $S_2$  und  $S_3$  gleichzeitig geöffnet, so beginnt die Rechnung. Bild 5.2.8.1 zeigt die Flughöhe  $y$  als Funktion der Zeit für  $R/m_e = 0$  und ohne  $g$  in der ausgezogenen Kurve, mit  $g$  in der gestrichelten Kurve und bei Berücksichtigung von  $R/m_e = 10^{-4}$  m<sup>-1</sup> und  $g = 10$  m/s<sup>2</sup> in der rechten ausgezogenen Kurve.



5.2.8



5.2.8.1



5.2.8.2

Bild 5.2.8.2 zeigt noch einmal die letzte Kurve aus Bild 5.2.8.1, jedoch über einen längeren Zeitraum. Die Rakete erreicht hier nach etwa 75 s ihre maximale Flughöhe und beginnt dann wieder zu sinken. Jetzt ist jedoch das Programm falsch, es müßte hier  $\text{sign } \dot{y} = -1$  sein. Die gestrichelte Kurve zeigt die Bahn mit einer maximalen Sinkgeschwindigkeit entsprechend dem freien Fall mit quadratischem Reibungsgesetz (siehe Abschnitt 5.2.2).

### 5.3. Dynamik

Während die Beispiele der Kinematik sich darauf beschränkten, den Zusammenhang zwischen Beschleunigung, Geschwindigkeit und Bahnbewegung aufzuzeigen, werden in den Beispielen der Ballistik und Dynamik die eine Beschleunigung verursachenden inneren und äußeren Kräfte mit in die Betrachtung einbezogen.

Das Kapitel beginnt mit Fragen aus der Welt der Kraftfahrzeuge. Beim Beschleunigungsvorgang wird mit vorgegebener Motorleistung, Masse und Reibungskraft experimentell die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit bestimmt. Es folgen Abhängigkeiten von Motorleistung, Masse und Reibungskoeffizient. Insbesondere beobachtet man, daß eine Verdopplung der Motorleistung oder Halbierung des Reibungskoeffizienten bei weitem keine Verdopplung der Endgeschwindigkeit bedeutet. Die Höchstgeschwindigkeiten von Personenkraftwagen liegen eben fast alle im Bereich von 100 km/h bis 200 km/h.

In weiteren Programmbeispielen wird das Ausrollen und Abbremsen eines Kraftfahrzeugs untersucht. Es folgen dann noch einige Experimente zum Impulserhaltungssatz und zum elastischen zentralen Stoß.

### 5.3.1 Beschleunigung eines Kraftfahrzeuges

Die in kW oder PS angegebene maximale Leistung eines Automotors gilt jeweils nur für einen bestimmten Drehzahlbereich. Durch geeignete Wahl des Getriebes kann man jedoch für größere Geschwindigkeiten  $v$  fast immer im günstigsten Drehzahlbereich verbleiben und somit dort den Beschleunigungsvorgang mit konstanter Leistung  $P$  berechnen. Für die das Kraftfahrzeug beschleunigende Kraft  $F$  gilt dann:

$$F = P/v$$

Bei sehr kleinen Geschwindigkeiten, d. h. beim Anfahren des Kraftfahrzeuges, muß die Kraft  $F$  jedoch endlich sein. Es soll deshalb im folgenden gelten:

$$F = \frac{P}{v_0(v) + v}$$

Die Korrektur  $v_0(v)$  muß dabei für kleine  $v$  endlich und größer Null sein und bei größeren Geschwindigkeiten, insbesondere bei der Endgeschwindigkeit  $v_{\max}$  verschwinden.

Der das Kraftfahrzeug beschleunigenden Kraft  $F$  treten die Trägheit der Masse  $m$  und die Reibung  $R$  (Luft- und Rollwiderstand) entgegen. Mit einem quadratischen Reibungsgesetz folgt für  $v \geq 0$ :

$$F = m\dot{v} + Rv^2$$

Nach Einsetzen von  $F$  und Auflösung nach  $\dot{v}$  gilt:

$$\dot{v} = \frac{1}{m} \left( \frac{P}{v_0(v) + v} - Rv^2 \right)$$

Für einen mittleren Personenkraftwagen gilt z. B. für Masse  $m = 10^3$  kg, Reibungskoeffizient  $R = 1$  kg/m und Leistung  $P = 50$  kW. Als Rechenbereich für die Geschwindigkeit

wird gewählt:

$$0 \leq v/50 \leq 1 \text{ m/s}$$

Somit werden Geschwindigkeiten bis  $50 \text{ m/s} = 180 \text{ km/h}$  erfaßt.

Im Schaltplan 5.2.1 ist bereits eine entsprechende Amplitudenskalierung berücksichtigt worden. Aus der Beschleunigung  $-\dot{v}/50$  am Eingang des Integrierers (Zeitkonstante  $RC = 1$  s) erhält man an dessen Ausgang die Geschwindigkeit  $v/50$ . Zur Bildung von  $-(v_0 + v)/50$  benötigt man geeignetes  $v_0(v)$ . Wie später gezeigt wird, steht am Ausgang des letzten Operationsverstärkers eine Kraft zur Verfügung, die eine passende Abhängigkeit von der Geschwindigkeit  $v$  aufweist. Diese Kraft wird mit  $5 A$  multipliziert ( $A = 1 \text{ m/Ns}$ ) und dann willkürlich gleich  $v_0$  gesetzt:

$$v_0(v) = 5 A \left( \frac{P}{v_0(v) + v} - R v^2 \right) 10^{-4}$$

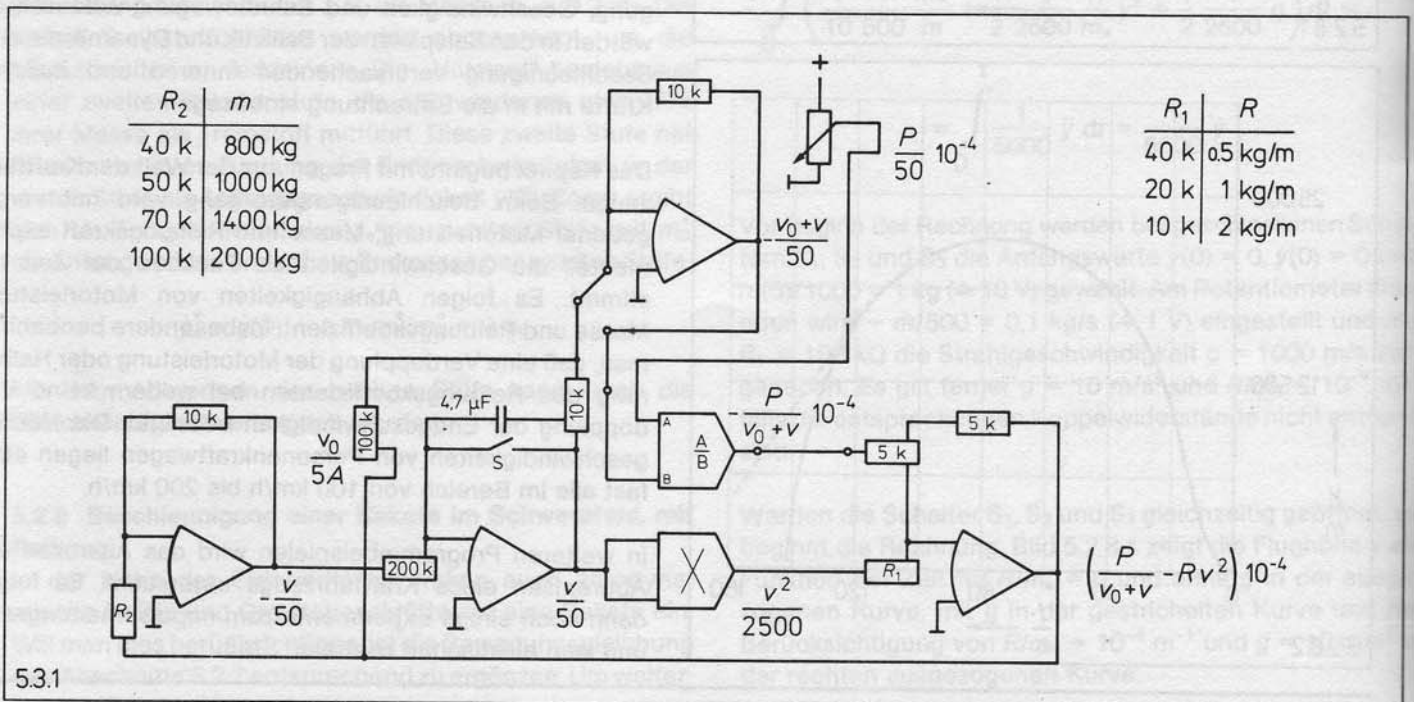
mit  $v_0(0) = \sqrt{5 A P} 10^{-4} = 5 \text{ m/s}$  (für  $P = 50 \text{ kW}$ ) und  $v_0(v_{\max}) = 0$ .

Der obenliegende Operationsverstärker erzeugt dann die Summe:

$$-\left( \frac{A}{10} \frac{v_0}{5 A} + \frac{v}{50} \right) = -(v_0 + v)/50$$

Wird mit dem Potentiometer rechts oben die Leistung  $10^{-4}P/50$  eingestellt (für  $P = 50 \text{ kW}$ , z. B.  $U = 1 \text{ V}$ ), so erscheint am Dividierer die Kraft:

$$-\frac{P}{v_0(v) + v} 10^{-4}$$



Der Multiplizierer ergibt  $v^2/2500$  und am Summierer wird die Kraft

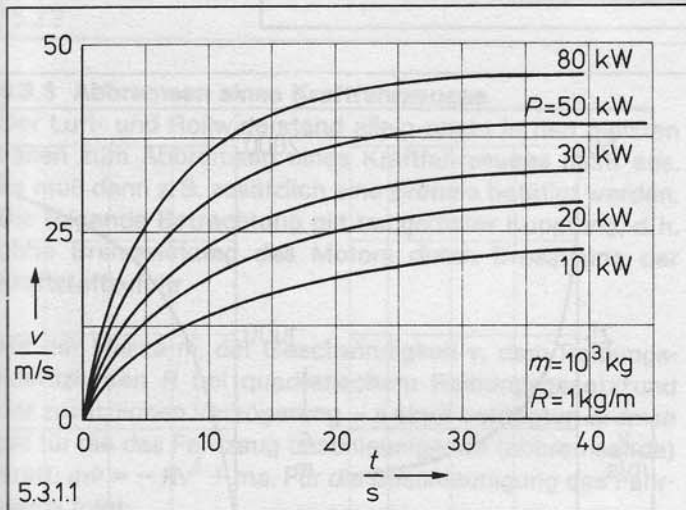
$$\left( \frac{P}{v_0(v) + v} - R v^2 \right) 10^{-4}$$

gebildet, wobei der Widerstand  $R_1 = 20 \text{ k}\Omega$  gesetzt werden muß, wenn der Reibungskoeffizient  $R = 1 \text{ kg/m}$  sein soll. Es gilt:

$$R = \frac{20 \text{ k}\Omega \text{ kg}}{R_1 \text{ m}}$$

Am linken Operationsverstärker wird die Kraft durch die Masse  $m$  dividiert und am Ausgang erscheint dann schließlich wieder die Beschleunigung

$$-\frac{1}{m} \left( \frac{P}{v_0(v) + v} - R v^2 \right) \frac{1}{50} = -\dot{v}$$



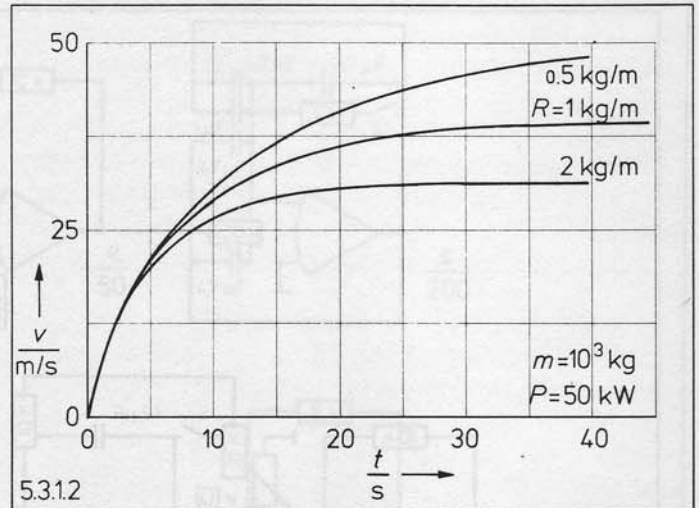
Es muß für den Widerstand  $R_2 = 50 \text{ k}\Omega$  gesetzt werden, soll die Masse  $m = 10^3 \text{ kg}$  sein. Es gilt:

$$m = \frac{R_2}{50 \text{ k}\Omega} 10^3 \text{ kg}$$

Vor Beginn der Rechnung werden mit dem Potentiometer rechts oben die gewünschte Leistung  $P$ , mit Widerstand  $R_1$  am rechten Operationsverstärker der Reibungskoeffizient  $R$ , mit Widerstand  $R_2$  am linken Verstärker die Masse  $m$  des Kraftfahrzeuges vorgegeben und durch Schließen des Schalters  $S$  der Anfangswert der Geschwindigkeit gleich Null gesetzt:  $v(0) = 0$ . Wird nun der Schalter  $S$  geöffnet, beginnt die Rechnung und  $v(t)$  gibt die Geschwindigkeit des Kraftfahrzeuges als Funktion der Zeit.

Bild 5.3.1.1 zeigt zunächst bei fester Masse  $m = 10^3 \text{ kg}$  und festem Reibungskoeffizienten  $R = 1 \text{ kg/m}$  die Abhängigkeit des Geschwindigkeitsverlaufs von der Motorleistung  $P$ . Die maximal erreichbare Endgeschwindigkeit  $v_{\max}$  ist proportional der 3. Wurzel aus der Leistung.

Bild 5.3.1.2 zeigt bei fester Masse  $m = 10^3 \text{ kg}$  und fester Leistung  $P = 50 \text{ kW}$  die Abhängigkeit des Geschwindig-



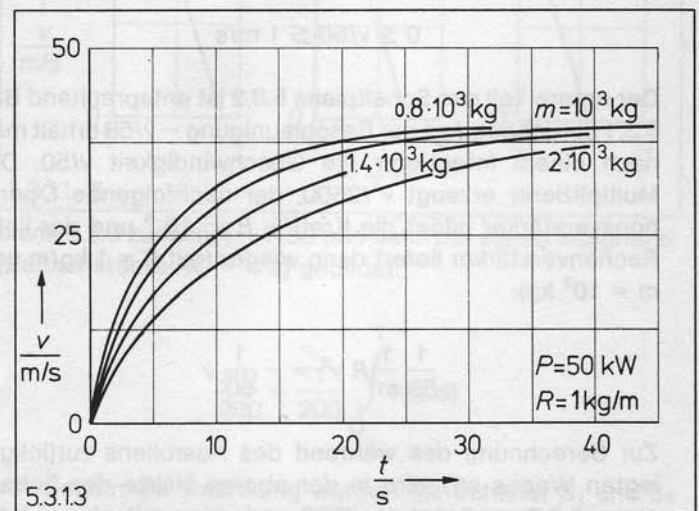
keitsverlaufs vom Reibungskoeffizienten  $R$ . Die maximal erreichbare Endgeschwindigkeit  $v_{\max}$  ist proportional der 3. Wurzel aus dem reziproken Reibungskoeffizienten. Es gilt hier etwa:

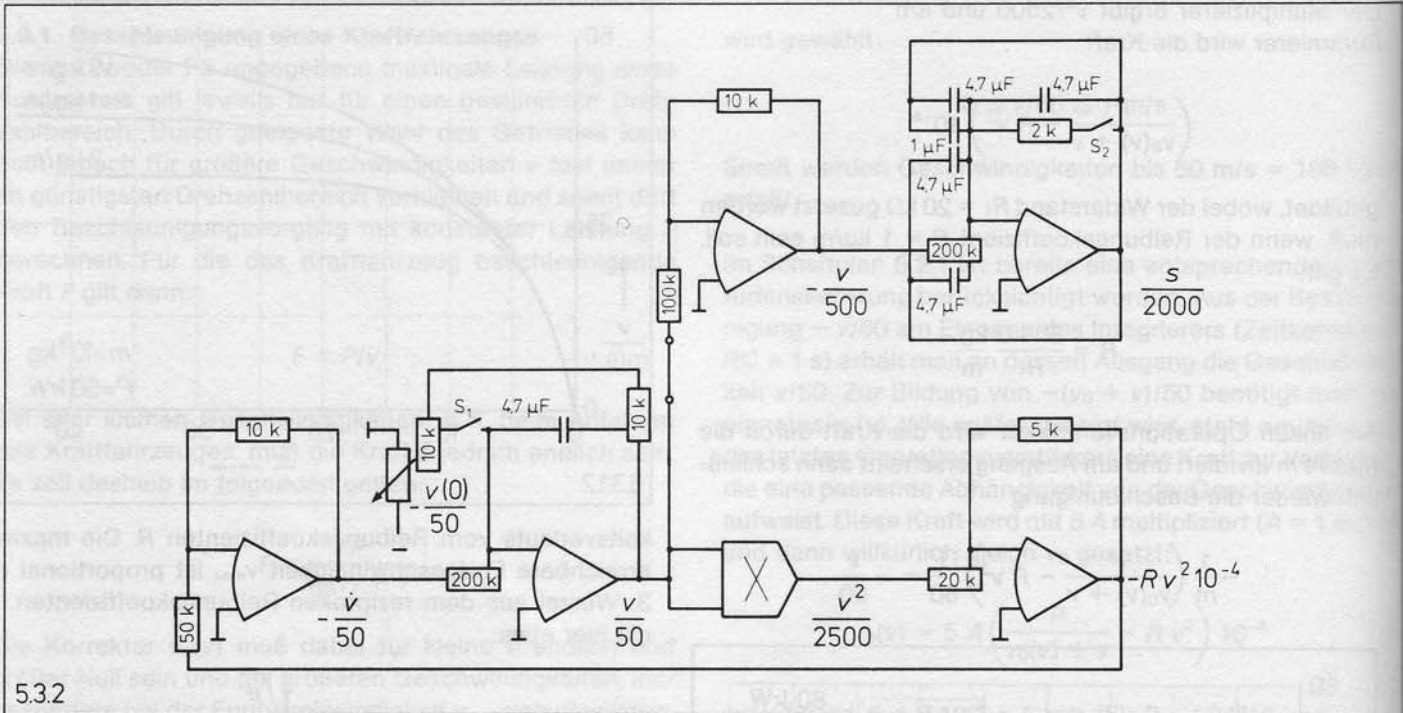
$$v_{\max} = \sqrt[3]{\frac{P}{R}}$$

Die Abweichung der registrierten Endgeschwindigkeit vom theoretischen Wert in Höhe von hier etwa 6% ist eine Folge des Fehlers der Zeitkonstante beim Integrierer und des Fehlers am Dividierer.

Bild 5.3.1.3 zeigt bei fester Leistung  $P = 50 \text{ kW}$  und festem Reibungskoeffizienten  $R = 1 \text{ kg/m}$  die Abhängigkeit des Geschwindigkeitsverlaufs von der Masse  $m$ . Die Endgeschwindigkeit ist unabhängig von der Masse, wird aber bei kleiner Masse eher erreicht.

Häufig wird bei Kraftfahrzeugen als Maß der Beschleunigung die Zeit angegeben, die notwendig ist, um aus dem Stand eine Geschwindigkeit von  $100 \text{ km/h} = 27,8 \text{ m/s}$  zu erreichen. Eine kurze Zeit bedeutet dabei eine große Beschleunigung. Die Zeiten der in den Bildern 5.3.1.1 bis 5.3.1.3 angegebenen Kurven sind gegenüber realen Kraftfahrzeugen etwas kürzer, da hier mit optimalem Getriebe, d. h.  $F = P/v$ , gerechnet wurde (siehe den 1. Absatz dieses Abschnitts).





5.3.2

**5.3.2 Ausrollen eines Kraftfahrzeuges**

Der Luft- und Rollwiderstand eines Kraftfahrzeuges begrenzt im Abschnitt 5.3.1 bei vorgegebener Motorleistung die maximal erreichbare Geschwindigkeit. Führt der Motor keine Leistung mehr zu (wird die Kupplung getreten), so bremst bereits der Luft- und Rollwiderstand das Kraftfahrzeug wieder ab. Mit der Masse  $m$ , der Geschwindigkeit  $v$  und dem Reibungskoeffizienten  $R$  gilt dann bei quadratischem Reibungsgesetz für die das Fahrzeug beschleunigende (abbremsende) Kraft:  $m\dot{v} = -Rv^2$ . Als Beschleunigung folgt:

$$\dot{v} = -\frac{R}{m}v^2$$

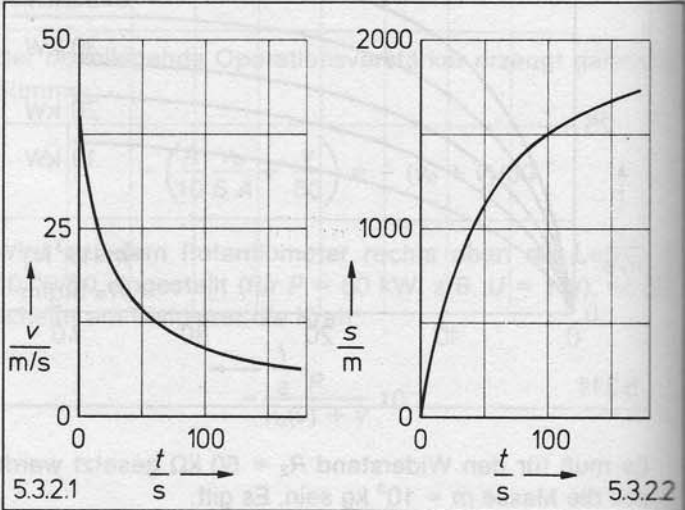
Für einen mittleren Personenkraftwagen gilt z. B.: Masse  $m = 10^3$  kg und Reibungskoeffizient  $R = 1$  kg/m. Als Rechenbereich für die Geschwindigkeit wird wie im Abschnitt 5.3.1 wieder gewählt:

$$0 \leq v/50 \leq 1 \text{ m/s}$$

Der untere Teil des Schaltplans 5.3.2 ist entsprechend Bild 5.3.1 aufgebaut. Aus der Beschleunigung  $-\dot{v}/50$  erhält man nach einem Integrierer die Geschwindigkeit  $v/50$ . Der Multiplizierer erzeugt  $v^2/2500$ , der nachfolgende Operationsverstärker bildet die Kraft  $-Rv^2 \cdot 10^{-4}$  und der linke Rechenverstärker liefert dann wieder (mit  $R = 1$  kg/m und  $m = 10^3$  kg):

$$\frac{1}{50} \frac{1}{m} R v^2 = -\frac{1}{50} \dot{v}$$

Zur Berechnung des während des Ausrollens zurückgelegten Weges  $s(t)$  wird in der oberen Hälfte des Schaltplans 5.3.2 zunächst  $-v/500$  und dann mit einem Inte-

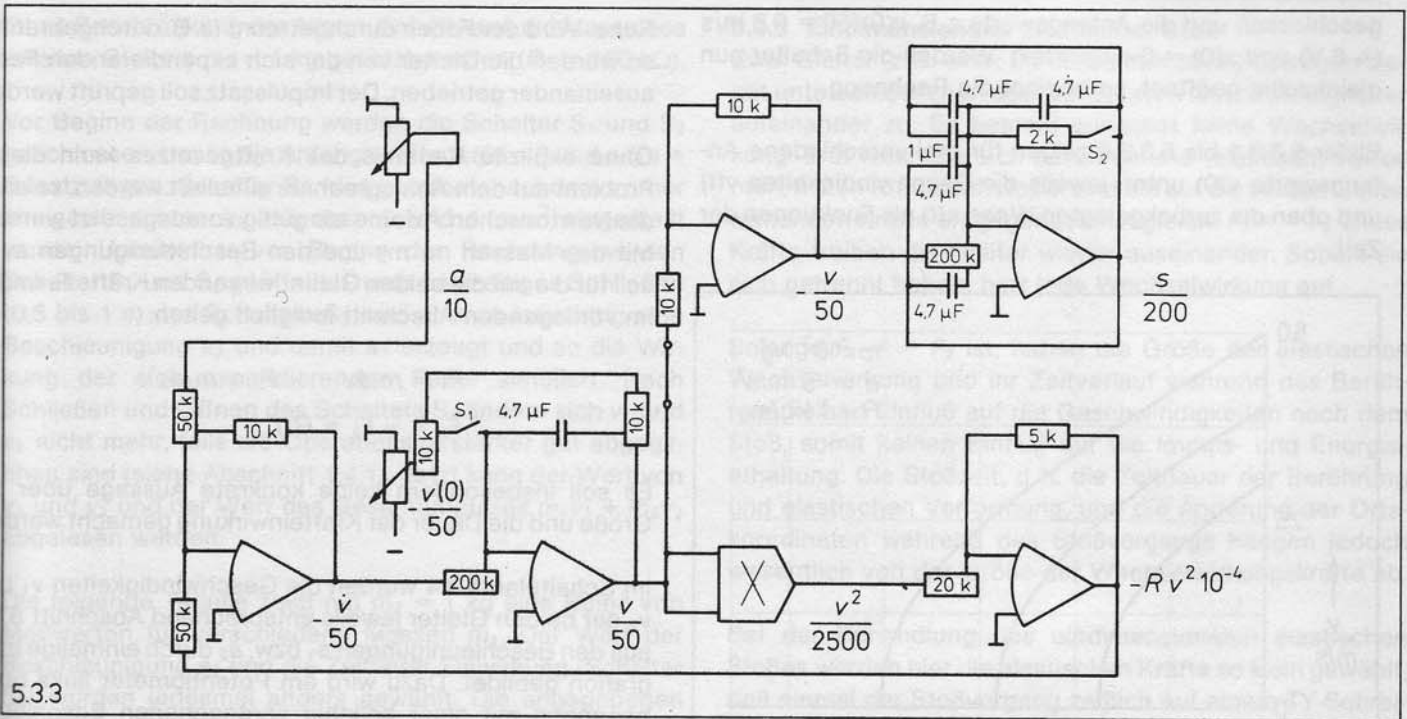


grier (Zeitkonstante  $RC = 4$  s) gebildet:

$$\frac{s(t)}{2000} = \frac{1}{2000} \int_0^t v(t) dt$$

Vor Beginn der Rechnung werden die Schalter  $S_1$  und  $S_2$  geschlossen und die Anfangswerte  $v(0)/50 = 0.8$  m/s ( $\cong 8$  V) und  $s(0) = 0$  eingestellt. Werden die Schalter nun gleichzeitig geöffnet, so beginnt die Rechnung.

Bild 5.3.2.1 zeigt die Geschwindigkeit  $v(t)$  und Bild 5.3.2.2 den zurückgelegten Weg  $s(t)$  als Funktionen der Zeit. Gilt allein das oben angegebene quadratische Reibungsgesetz, so käme das Fahrzeug nie ganz zur Ruhe und würde sogar beliebig weit fahren. Bei kleinen Geschwindigkeiten kommt jedoch noch eine geschwindigkeitsunabhängige Reibungskraft hinzu, so daß ein Fahrzeug doch irgendwann stehen bleibt. Strecken von 2000 m können aber durchaus erreicht werden.



5.3.3

**5.3.3 Abbremsen eines Kraftfahrzeuges**

Der Luft- und Rollwiderstand allein reicht in den meisten Fällen zum Abbremsen eines Kraftfahrzeuges nicht aus. Es muß dann z. B. zusätzlich eine Bremse betätigt werden. Die folgende Betrachtung gilt bei gelöster Kupplung, d. h. ohne Bremswirkung des Motors durch Drosselung der Kraftstoffzufuhr.

Mit der Masse  $m$ , der Geschwindigkeit  $v$ , dem Reibungskoeffizienten  $R$  bei quadratischem Reibungsgesetz und der zusätzlichen Verzögerung  $-a$  einer betätigten Bremse gilt für die das Fahrzeug beschleunigende (abbremsende) Kraft:  $m\dot{v} = -Rv^2 + ma$ . Für die Beschleunigung des Fahrzeugs folgt:

$$\dot{v} = -\frac{R}{m} v^2 + a$$

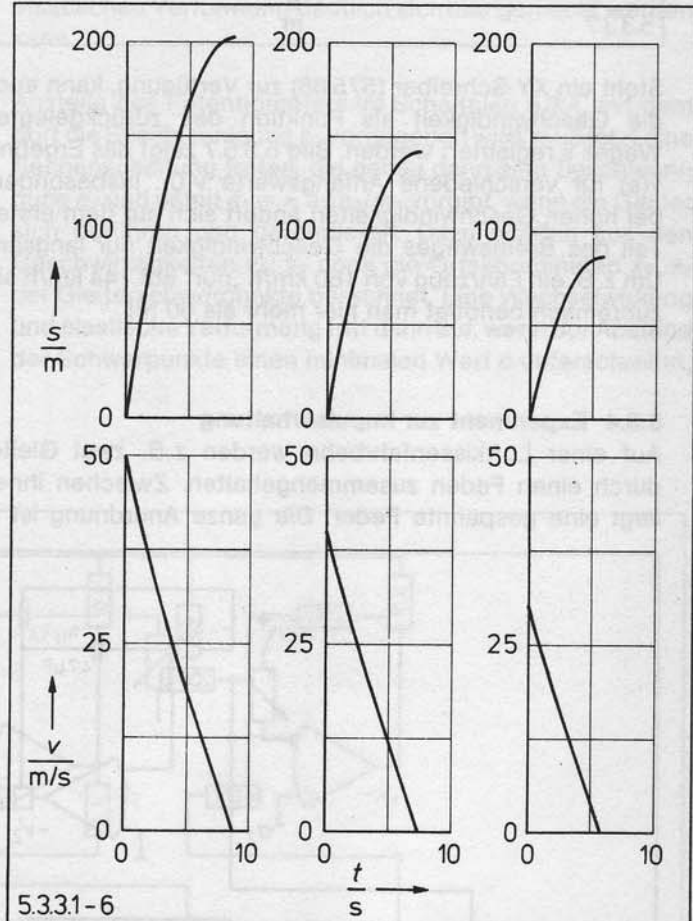
Für einen mittleren Personenkraftwagen gilt z. B. für Masse  $m = 10^3$  kg, Reibungskoeffizient  $R = 1$  kg/m und zusätzliche Bremsverzögerung  $-a = 5$  m/s<sup>2</sup>. Als Rechenbereich für die Geschwindigkeit wird wie in den Abschnitten 5.3.1 und 5.3.2 gewählt:

$$0 \leq v/50 \leq 1 \text{ m/s}$$

Im Schaltplan 5.3.3 erhält man wie in den Schaltplänen 5.3.1 und 5.3.2 aus der Beschleunigung  $-\dot{v}/50$  nach einer Integrationsstufe die Geschwindigkeit  $v/50$ . Der Multiplizierer erzeugt  $v^2/2500$ , der nachfolgende Operationsverstärker liefert die Kraft  $-Rv^2 \cdot 10^{-4}$  und am linken Summierer wird gebildet (mit  $R = 1$  kg/m und  $m = 10^3$  kg):

$$\frac{1}{50} \left( \frac{R}{m} v^2 - a \right) = -\frac{1}{50} \dot{v}$$

Zur Berechnung des während des Abbremsens zurückgelegten Weges  $s(t)$  wird in der oberen Hälfte des Schalt-



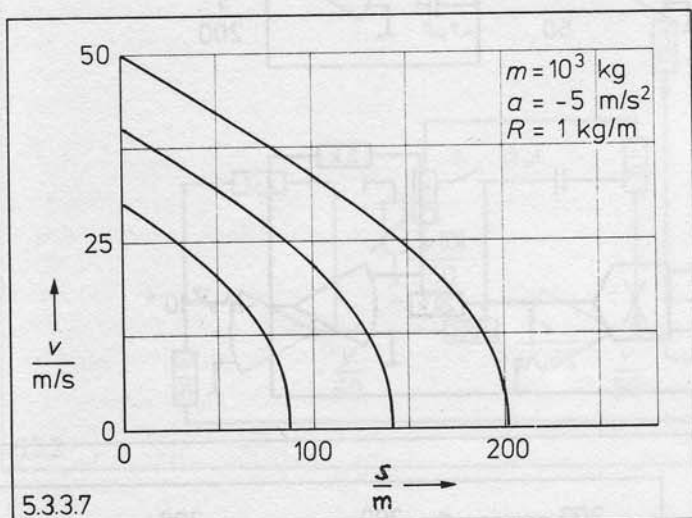
5.3.3.1-6 plans 5.3.3 zunächst  $-v/50$  und dann mit einem Integrierer (Zeitkonstante  $RC = 4$  s) gebildet:

$$\frac{s(t)}{200} = \frac{1}{200} \int_0^t v(t) dt$$

Vor Beginn der Rechnung werden die Schalter  $S_1$  und  $S_2$

geschlossen und die Anfangswerte z. B.  $v(0)/50 = 0.8 \text{ m/s}$  ( $\approx 8 \text{ V}$ ) und  $s(0) = 0$  eingestellt. Werden die Schalter nun gleichzeitig geöffnet, so beginnt die Rechnung.

Bilder 5.3.3.1 bis 5.3.3.6 zeigen für drei verschiedene Anfangswerte  $v(0)$  unten jeweils die Geschwindigkeiten  $v(t)$  und oben die zurückgelegten Wege  $s(t)$  als Funktionen der Zeit.



Steht ein XY-Schreiber (575 66) zur Verfügung, kann auch die Geschwindigkeit als Funktion des zurückgelegten Weges  $s$  registriert werden. Bild 5.3.5.7 zeigt das Ergebnis  $v(s)$  für verschiedene Anfangswerte  $v(0)$ . Insbesondere bei hohen Geschwindigkeiten ändert sich auf dem ersten Teil des Bremsweges die Geschwindigkeit nur langsam. Um z. B. ein Fahrzeug von  $180 \text{ km/h}$  „nur“ auf  $144 \text{ km/h}$  abzubremesen benötigt man hier mehr als  $60 \text{ m}$ !

### 5.3.4 Experiment zur Impulserhaltung

Auf einer Luftkissenfahrbahn werden z. B. zwei Gleiter durch einen Faden zusammengehalten. Zwischen ihnen liegt eine gespannte Feder. Die ganze Anordnung ist in

Ruhe. Wird der Faden durchgetrennt (z. B. durchgebrannt), so werden die Gleiter von der sich expandierenden Feder auseinander getrieben. Der Impulssatz soll geprüft werden.

Ohne explizite Kenntnis des Kraftgesetzes kann dieses Problem auf dem Analogrechner simuliert werden, solange die Newtonschen Axiome als gültig vorausgesetzt werden. Mit den Massen  $m_1, m_2$  und den Beschleunigungen  $a_1, a_2$  soll für die auf die beiden Gleiter wirkenden Kräfte  $F_1$  und  $F_2$  im vorliegenden Abschnitt lediglich gelten:

$$F_1 = m_1 a_1 \quad F_2 = m_2 a_2$$

$$F_2 = -F_1 = F(t)$$

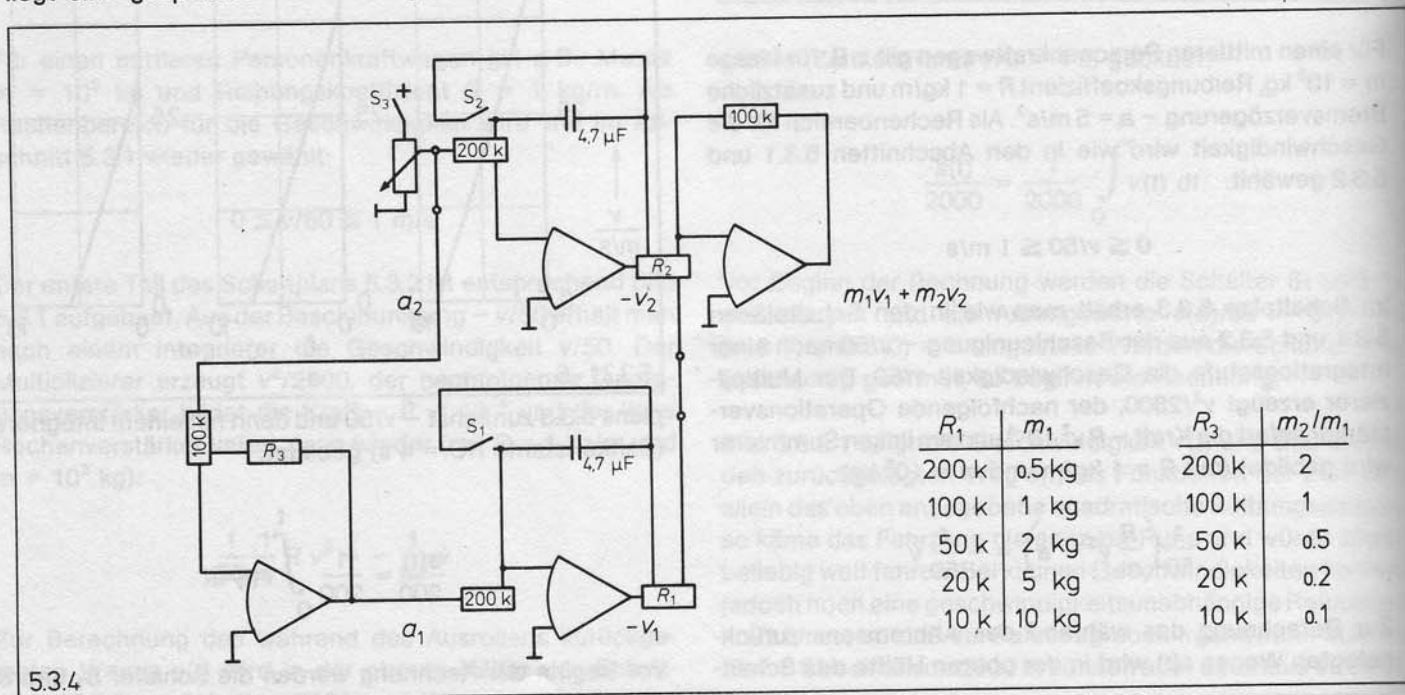
Es soll insbesondere keine konkrete Aussage über die Größe und die Dauer der Krafteinwirkung gemacht werden.

Im Schaltplan 5.3.4 werden die Geschwindigkeiten  $v_1$  und  $v_2$  der beiden Gleiter jeweils entsprechend Abschnitt 5.1.5 aus den Beschleunigungen  $a_1$  bzw.  $a_2$  durch einmalige Integration gebildet. Dazu wird am Potentiometer links oben begonnen mit einer beliebig vorgegebenen Beschleunigung  $a_2$  zwischen  $0$  und  $1 \text{ m/s}^2$ . Der rechts folgende Integrierer (Zeitkonstante  $RC = 1 \text{ s}$ ) liefert dann  $-v_2$ . Am Operationsverstärker unten links entsteht  $a_1 = -a_2 m_2 / m_1$  durch geeignete Wahl des Rückkoppelwiderstandes  $R_3$ . Es gilt hier:

$$m_2 / m_1 = R_3 / 100 \text{ k}\Omega$$

Der nachfolgende Integrierer (Zeitkonstante  $RC = 1 \text{ s}$ ) liefert  $-v_1$ . Zur Prüfung des Impulserhaltungssatzes wird am Summierer rechts oben der Gesamtimpuls  $m_1 v_1 + m_2 v_2$  gebildet durch geeignete Wahl der Widerstände  $R_1$  und  $R_2$ . Es gilt hier:

$$m_1 = \frac{100 \text{ k}\Omega}{R_1} \text{ kg} \quad m_2 = \frac{100 \text{ k}\Omega}{R_2} \text{ kg}$$





Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann die Masse des zweiten Gleiters  $m_2 = 1$  kg gesetzt werden ( $R_2 = 100$  k $\Omega$ ).

Vor Beginn der Rechnung werden die Schalter  $S_1$  und  $S_2$  geschlossen, um so die Anfangswerte  $v_1(0) = 0$  und  $v_2(0) = 0$  festzulegen. Schalter  $S_3$  wird geöffnet, nachdem vorher ein gewünschtes  $a_2$  zwischen 0 und 1 m/s<sup>2</sup> eingestellt wurde. Unmittelbar vor Beginn der Rechnung werden Schalter  $S_1$  und  $S_2$  geöffnet. Durch kurzzeitiges Schließen (0.5 bis 1 s) des Schalters  $S_3$  wird ebenso kurzzeitig eine Beschleunigung  $a_2$  und damit  $a_1$  erzeugt und so die Wirkung der sich expandierenden Feder simuliert. Nach Schließen und Öffnen des Schalters  $S_3$  ändern sich  $v_1$  und  $v_2$  nicht mehr, falls die Operationsverstärker gut abgeglichen sind (siehe Abschnitt 1.4.1). Jetzt kann der Wert von  $v_1$  und  $v_2$  und der Wert des Gesamtimpulses  $m_1v_1 + m_2v_2$  abgelesen werden.

Die folgende Tabelle zeigt mit  $m_2 = 1$  kg eine Reihe von Meßwerten für verschiedene Massen  $m_1$ . Der Wert der Beschleunigung  $a_2$  und die Zeit ihrer Einwirkung (Schalter  $S_3$ ) wurden jedesmal anders gewählt. Die angegebenen Werte des Gesamtimpulses zeigen jeweils recht gut, daß der Impulserhaltungssatz gilt, sie liegen maximal bei 0.02 Ns (d. h. Rechenfehler maximal 2%).

$m_2$	$m_1$	$v_1$	$v_2$	$m_1v_1 + m_2v_2$
1 kg	0,5 kg	- 9,3 m/s	4,6 m/s	0,08 Ns
		- 4,15 m/s	2,1 m/s	0,06 Ns
	1 kg	- 7,25 m/s	7,3 m/s	0,1 Ns
		- 4,3 m/s	4,3 m/s	0,075 Ns
	2 kg	- 3,5 m/s	7,0 m/s	0,05 Ns
		- 1,6 m/s	3,3 m/s	0,1 Ns
	5 kg	- 1,9 m/s	9,6 m/s	0,2 Ns
		- 0,5 m/s	2,4 m/s	0,2 Ns
10 kg	10 kg	- 0,55 m/s	5,5 m/s	0,1 Ns
		- 0,85 m/s	8,4 m/s	0,15 Ns

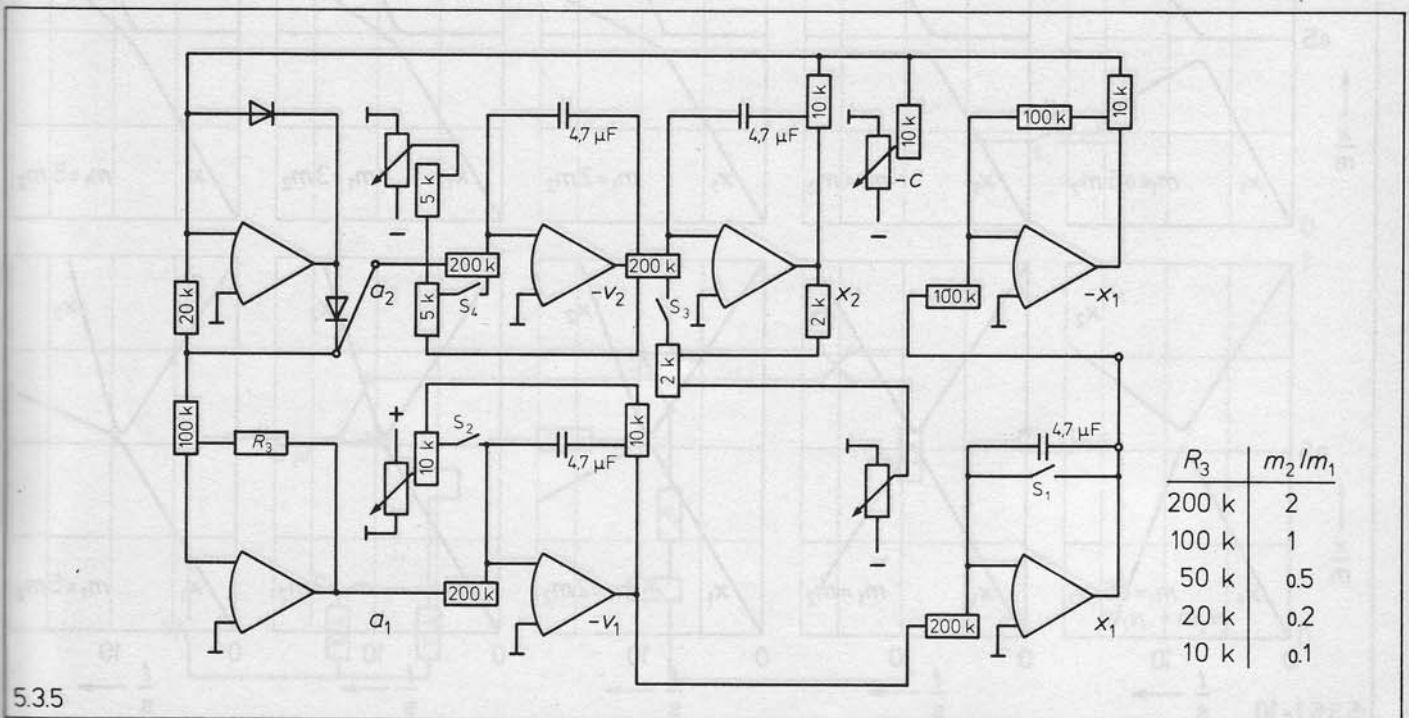
### 5.3.5 Eindimensionaler elastischer Stoß

Zwei Gleiter (z. B. einer Luftkissenfahrbahn) bewegen sich mit unterschiedlichen aber konstanten Geschwindigkeiten aufeinander zu. Es besteht zunächst keine Wechselwirkung. Erst wenn sie sich berühren und (elastisch) verformen, treten Kräfte auf. Dabei sind die auf die beiden Gleiter wirkenden Kräfte entgegengesetzt gleich:  $F_1 = -F_2$ . Diese Kräfte treiben die Gleiter wieder auseinander. Sobald sie sich getrennt haben, hört jede Wechselwirkung auf.

Solange  $F_1 = -F_2$  ist, haben die Größe der elastischen Wechselwirkung und ihr Zeitverlauf während des Berührens keinen Einfluß auf die Geschwindigkeiten nach dem Stoß, somit keinen Einfluß auf die Impuls- und Energieerhaltung. Die Stoßzeit, d. h. die Zeitdauer der Berührung und elastischen Verformung, und die Änderung der Ortskoordinaten während des Stoßvorgangs hängen jedoch wesentlich von der Größe der Wechselwirkungskräfte ab.

Bei der Behandlung des eindimensionalen elastischen Stoßes werden hier die elastischen Kräfte so klein gewählt, daß einmal der Stoßvorgang zeitlich auf einem TY-Schreiber aufgelöst (ca. 2 s) und zum anderen auch die Größe der elastischen Verformung deutlich sichtbar gemacht werden kann.

Anstelle des Potentiometers im Schaltplan 5.3.4, mit dem dort die Beschleunigung  $a_2$  vorgegeben wird, muß jetzt eine Rechenschaltung treten, die genau dann eine Beschleunigung  $a_2$  und damit  $a_1 = -a_2m_2/m_1$  vorgibt, wenn die Gleiter sich berühren und deformieren. Dazu werden aus den Geschwindigkeiten  $v_1, v_2$  noch die Ortskoordinaten  $x_1, x_2$  der Gleiterschwerpunkte berechnet. Eine Wechselwirkung und elastische Verformung tritt dann auf, wenn der Abstand der Schwerpunkte einen minimalen Wert  $c$  unterschreitet,



5.3.5

d. h. für  $x_2 - x_1 < c$ . Für die Beschleunigung  $a_2$  wird im folgenden gewählt:

$$a_2 = (x_1 - x_2 + c) 2 s^{-2} \quad \text{für } x_2 - x_1 < c$$

$$a_2 = 0 \quad \text{für } x_2 - x_1 \geq c$$

mit  $c = 0,1 \text{ m}$  und dem Rechenbereich für  $x$  von:

$$-1 \text{ m} \leq x \leq +1 \text{ m}.$$

Im Schaltplan 5.3.5 wird die Beschleunigung  $a_2$  durch eine Ventalfunktion (siehe Abschnitt 2.4.2) aus der vor dem Operationsverstärker gebildeten Summe  $x_2 - x_1 - c$  erzeugt. Der rechts folgende Integrierer (Zeitkonstante  $RC = 1 \text{ s}$ ) liefert die Geschwindigkeit  $-v_2$ , der dann folgende die Ortskoordinate  $x_2$ . Am Operationsverstärker links unten entsteht  $a_1 = -a_2 m_2 / m_1$  durch geeignete Wahl des Rückkopplungswiderstandes  $R_3$ . Es gilt hier:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{R_3}{100 \text{ k}\Omega}$$

Der nachfolgende Integrierer (Zeitkonstante  $RC = 1 \text{ s}$ ) liefert die Geschwindigkeit  $-v_1$ , der dann folgende die Ortskoordinate  $x_1$ . Zur Bildung der der Ventalfunktion zuzuführenden Summe  $x_2 - x_1 - c$  wird rechts oben im Schaltplan 5.3.5 am Inverter noch  $-x_1$  und an einem Potentiometer  $-c$  erzeugt.

Bei diesem Programm treten bei nicht gut abgestimmten Operationsverstärkern (siehe Abschnitt 1.4.1) leicht große Rechenfehler auf, die eine unschöne Verzerrung der Orts-

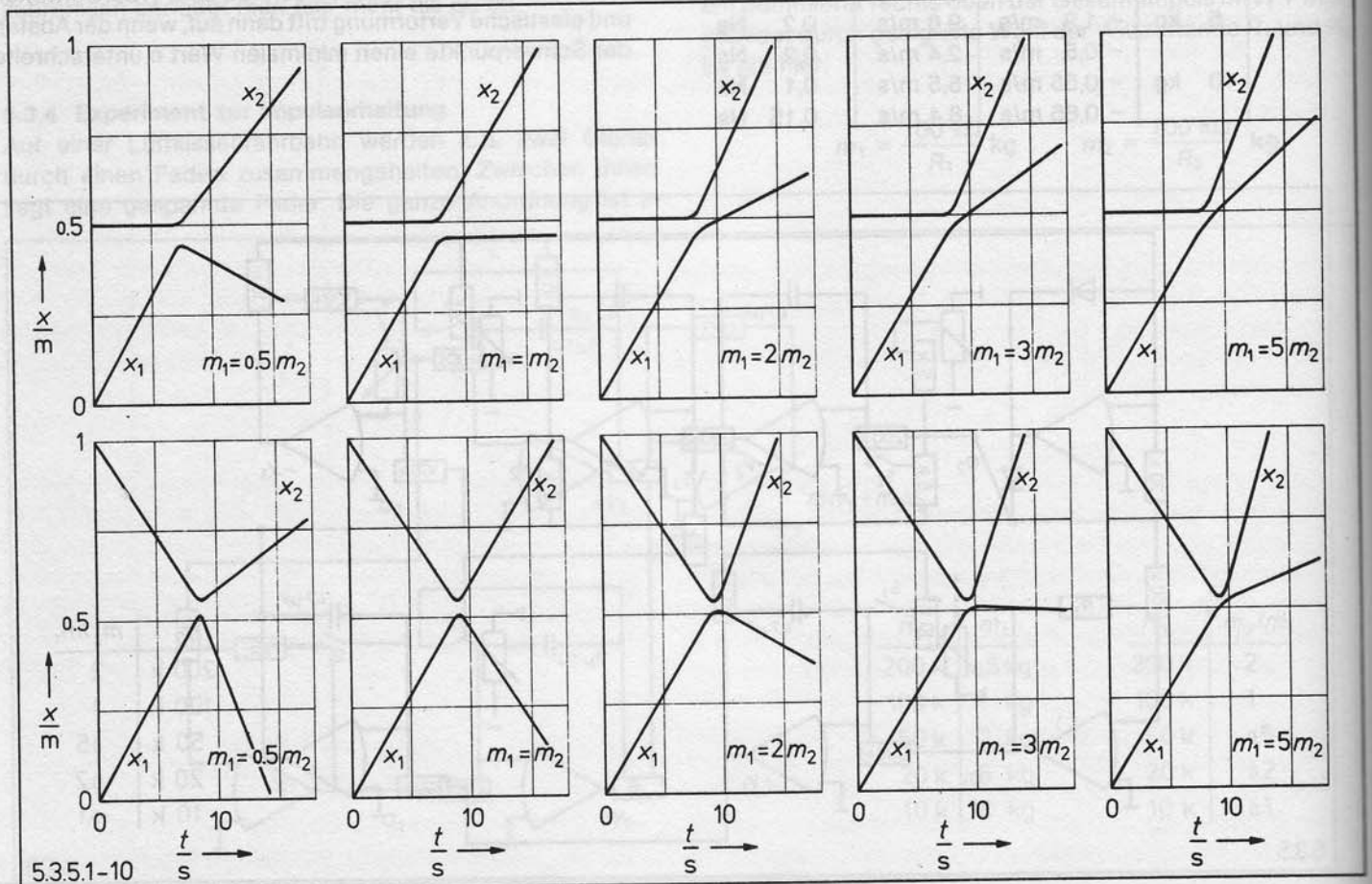
funktionen  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  bewirken. Darüber hinaus ist das Ausgangssignal des die Ventalfunktion erzeugenden Operationsverstärkers für  $x_2 - x_1 \geq c$  eventuell nicht exakt Null. Die Verstärker müssen dann im verschalteten Programm so abgeglichen werden, daß in den ersten Sekunden der Rechnung (vor dem Stoß) die Geschwindigkeiten  $v_1$  und  $v_2$  konstant und die Ortsfunktionen  $x_1$  und  $x_2$  geradlinig bleiben.

Es werden vier Schalter benötigt. Steht der programmierbare Schalter (57607) nicht zur Verfügung, ist zusätzlich zum Satz Steckelemente (57603) noch ein Kippschalter (57913) erforderlich.

Vor Beginn der Rechnung werden bei geschlossenen Schaltern  $S_1, S_2, S_3$  und  $S_4$  die Anfangswerte eingestellt, z. B.  $x_1(0) = 0, v_1(0) = 0,05 \text{ m/s}$  ( $\hat{=} 0,5 \text{ V}$ ) und  $x_2(0) = 0,5 \text{ m}$  ( $\hat{=} 5 \text{ V}$ ),  $v_2(0) = 0$  oder  $x_2(0) = 1 \text{ m}$  ( $\hat{=} 10 \text{ V}$ ),  $v_2(0) = -0,05 \text{ m/s}$  ( $\hat{=} -0,5 \text{ V}$ ). Mit dem Potentiometer rechts oben wird der minimale Abstand  $c$  der Schwerpunkte der Gleiter ohne Berührung gegeben mit  $-c = -0,1 \text{ m}$  ( $\hat{=} -1 \text{ V}$ ). Mit dem Widerstand  $R_3$  links unten kann noch das Verhältnis der Massen  $m_1/m_2$  gewählt werden. (Für  $m_1 = 3 m_2$  kann der Widerstand  $R_3 = 33,3 \text{ k}\Omega$  mit einer Parallelschaltung von  $50 \text{ k}\Omega$  und  $100 \text{ k}\Omega$  erzeugt werden.) Es gilt:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{100 \text{ k}\Omega}{R_3}$$

Mit dem Öffnen der Schalter  $S_1, S_2, S_3$  und  $S_4$  beginnt die Rechnung. Die Bilder 5.3.5.1 bis 5.3.5.10 zeigen die Ergebnisse einer Auswahl von Versuchsbeispielen. Es sind je-



weils die Ortskoordinaten der Gleiter als Funktionen der Zeit aufgetragen. In der oberen Reihe sind als Anfangswerte  $x_1(0) = 0$ ,  $v_1(0) = 0,05$  m/s,  $x_2(0) = 0,5$  m und  $v_2(0) = 0$  gewählt. In der unteren Reihe gelten als Anfangswerte  $x_1(0) = 0$ ,  $v_1(0) = 0,05$  m/s,  $x_2(0) = 1$  m und  $v_2(0) = -0,05$  m/s. Das Massenverhältnis  $m_1/m_2$  nimmt jeweils von links nach rechts zu und damit die elastische Verformung beim Stoß.

Aus den beobachteten Geschwindigkeiten vor und nach dem Stoß lassen sich Impuls- und Energieerhaltungssatz bestätigen. In den beiden folgenden Abschnitten werden noch ein Programm zur automatischen Prüfung des Impulserhaltungssatzes und ein Programm zur automatischen Prüfung des Energieerhaltungssatzes gebracht.

### 5.3.6 Impulserhaltung bei elastischem Stoß

Um Operationsverstärker zu sparen, ist im Schaltplan 5.3.6 die Erzeugung von  $a_1 = -a_2 m_2 / m_1$  in den Integrierer für  $v_1$  eingeschlossen worden. Es gilt:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{R_4}{200 \text{ k}\Omega}$$

Mit dem Operationsverstärker rechts unten wird der Gesamtimpuls  $p = m_1 v_1 + m_2 v_2$  gebildet bei geeigneter Wahl von  $R_1$  und  $R_2$ . Es gilt:

$$m_1 = \frac{100 \text{ k}\Omega}{R_1} \text{ kg} \quad \text{und} \quad m_2 = \frac{100 \text{ k}\Omega}{R_2} \text{ kg}$$

Mit den Anfangswerten  $v_1(0) = 0,05$  m/s und  $v_2(0) = 0$  folgt z.B. mit  $m_1 = 1$  kg für den Gesamtimpuls  $p = 0,05$  Ns ( $\hat{=} 0,5$  V). Eine Änderung des Impulses wird auch im Stoßvorgang selbst nicht beobachtet.

Im übrigen gilt Abschnitt 5.3.5.

### 5.3.7 Energieerhaltung bei elastischem Stoß

Im Schaltplan 5.3.7 schließt der Integrierer für  $v_1$  wieder die Erzeugung von  $a_1 = -a_2 m_2 / m_1$  ein. Es gilt:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{R_4}{200 \text{ k}\Omega}$$

Mit den Multiplizierern rechts unten wird  $v_1^2$  und  $v_2^2$  gebildet und dann mit dem folgenden Operationsverstärker die Summe der kinetischen Energie berechnet:

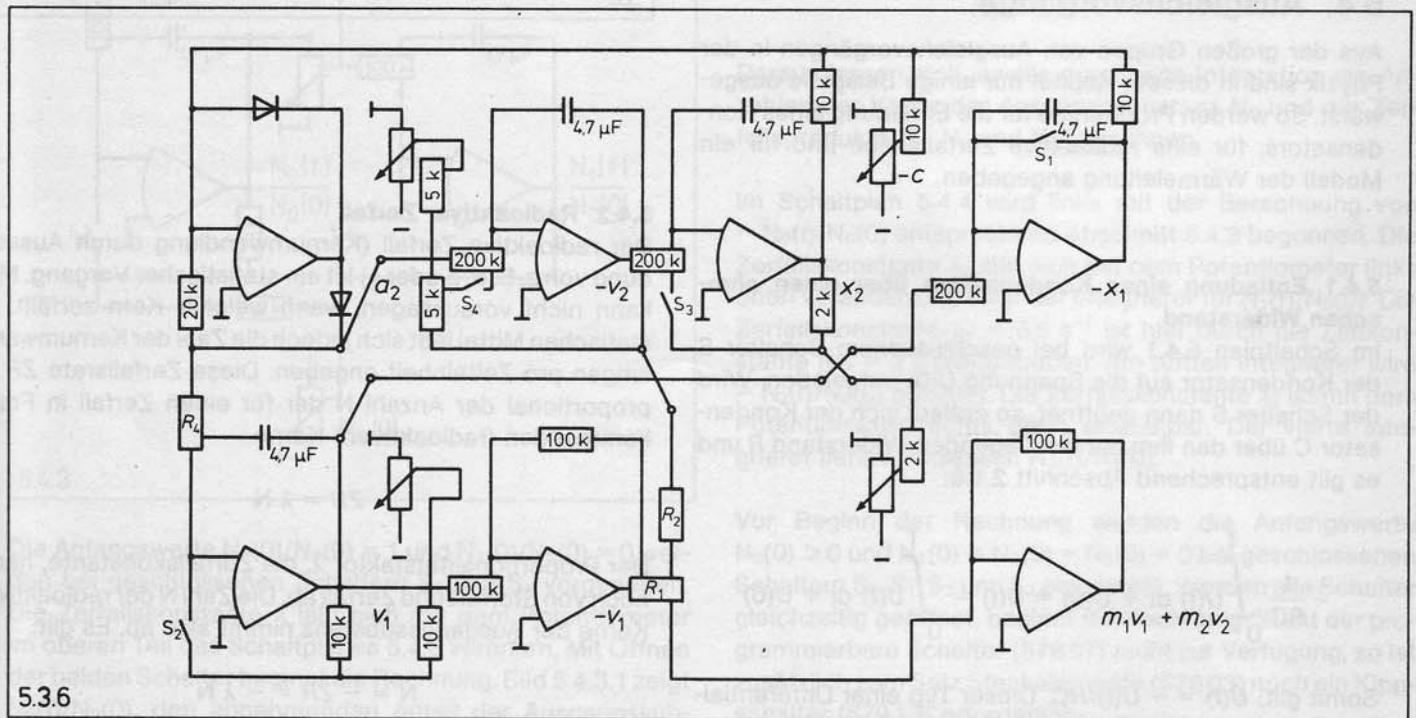
$$W = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

Es gilt:

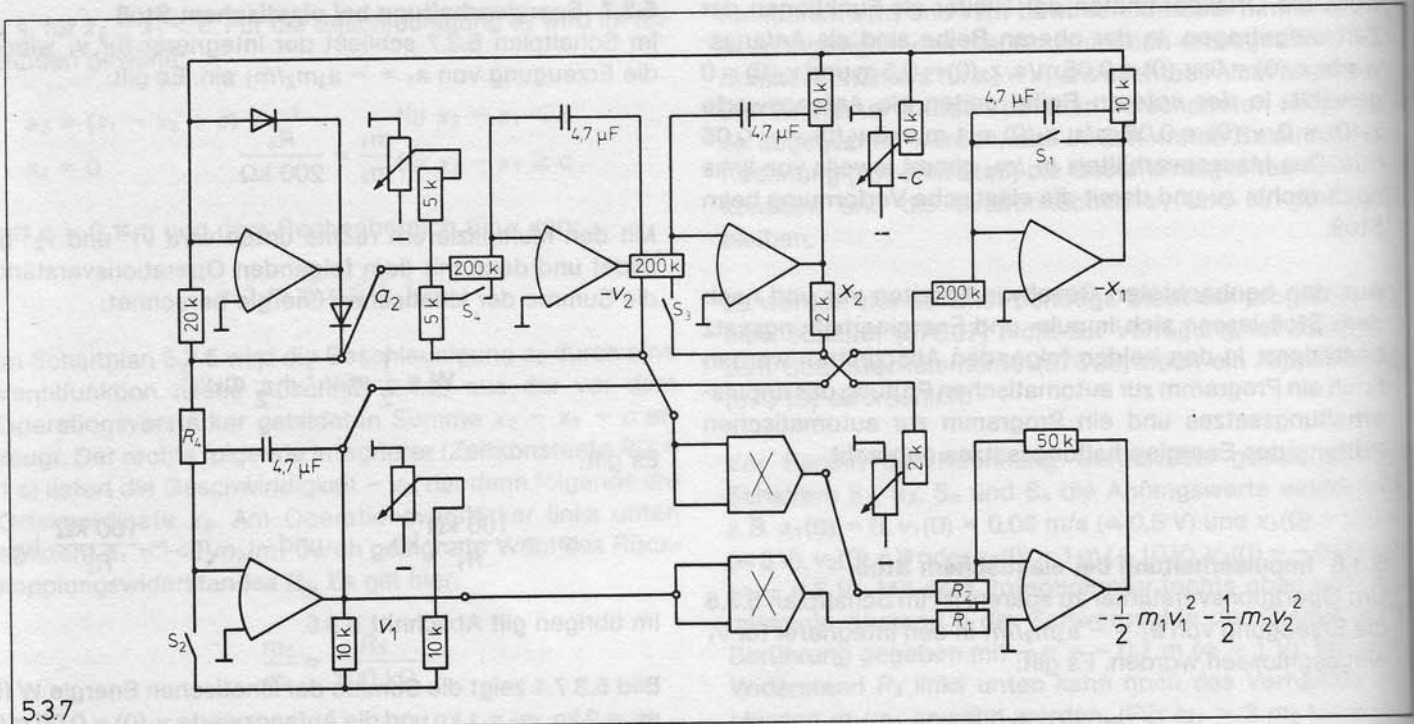
$$m_1 = \frac{100 \text{ k}\Omega}{R_1} \text{ kg} \quad \text{und} \quad m_2 = \frac{100 \text{ k}\Omega}{R_2} \text{ kg}$$

Im übrigen gilt Abschnitt 5.3.5.

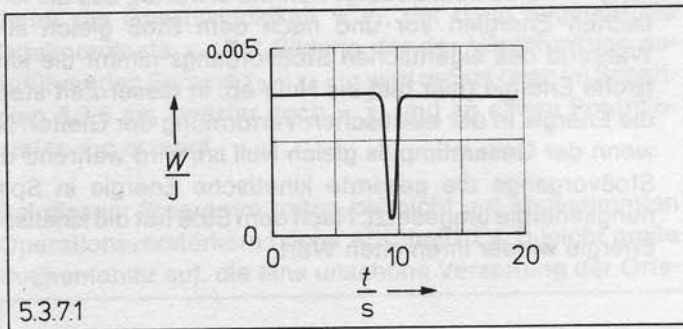
Bild 5.3.7.1 zeigt die Summe der kinetischen Energie  $W$  für  $m_1 = 2$  kg,  $m_2 = 1$  kg und die Anfangswerte  $v_1(0) = 0,05$  m/s,  $v_2(0) = -0,05$  m/s. Es zeigt sich wie erwartet, daß die kinetischen Energien vor und nach dem Stoß gleich sind. Während des eigentlichen Stoßvorgangs nimmt die kinetische Energie (hier fast bis Null) ab. In dieser Zeit steckt die Energie in der elastischen Verformung der Gleiter. Nur wenn der Gesamtimpuls gleich Null ist, wird während des Stoßvorgangs die gesamte kinetische Energie in Spannungsenergie umgesetzt. Nach dem Stoß hat die kinetische Energie wieder ihren alten Wert.



5.3.6



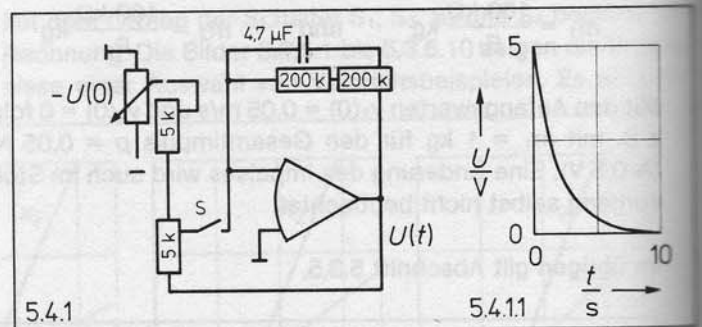
5.3.7



5.3.7.1

löst. Als Lösung erscheint eine abklingende e-Funktion (siehe Bild 5.4.1.1; hier gilt für die Zeitkonstante  $RC = 2$  s):

$$U(t) = U(0) e^{-t/RC}$$



5.4.1

5.4.1.1

## 5.4. Ausgleichsvorgänge

Aus der großen Gruppe von Ausgleichsvorgängen in der Physik sind in diesem Kapitel nur einige Beispiele ausgewählt. So werden Programme für die Entladung eines Kondensators, für eine radioaktive Zerfallsreihe und für ein Modell der Wärmeleitung angegeben.

### 5.4.1 Entladung eines Kondensators über einen ohmschen Widerstand

Im Schaltplan 5.4.1 wird bei geschlossenem Schalter S der Kondensator auf die Spannung  $U(0)$  aufgeladen. Wird der Schalter S dann geöffnet, so entlädt sich der Kondensator C über den ihm parallel liegenden Widerstand R und es gilt entsprechend Abschnitt 2.1.6:

$$-\frac{1}{RC} \int_0^t U(t) dt + U(0) = U(t) = \int_0^t \dot{U}(t) dt + U(0)$$

Somit gilt:  $\dot{U}(t) = -U(t)/RC$ . Dieser Typ einer Differentialgleichung ist bereits im Abschnitt 3.4.2 angegeben und ge-

### 5.4.2 Radioaktiver Zerfall

Der radioaktive Zerfall (Kernumwandlung durch Aussendung von z. B.  $\alpha$ ,  $\beta$  oder  $\gamma$ ) ist ein statistischer Vorgang. Man kann nicht voraussagen, wann welcher Kern zerfällt. Im statistischen Mittel läßt sich jedoch die Zahl der Kernumwandlungen pro Zeiteinheit angeben. Diese Zerfallsrate ZR ist proportional der Anzahl N der für einen Zerfall in Frage kommenden (radioaktiven) Kerne.

$$ZR = \lambda N$$

Der Proportionalitätsfaktor  $\lambda$ , die Zerfallskonstante, hängt noch von Stoffart und Zerfall ab. Die Zahl N der radioaktiven Kerne der Ausgangssubstanz nimmt also ab. Es gilt:

$$\dot{N} = -ZR = -\lambda N$$

Dies ist der gleiche Zusammenhang (die gleiche Differentialgleichung) wie in den Abschnitten 5.4.1 und 3.4.2 programmiert und gelöst ( $RC = 1/\lambda$ ). Als Lösung erscheint wieder eine abklingende e-Funktion (siehe Bild 5.4.3.1):

$$N(t) = N(0) e^{-\lambda t}$$

Neben der Zerfallskonstante  $\lambda$  wird auch gelegentlich von der mittleren Lebensdauer  $\tau = 1/\lambda$  (Zeit, in der die Anzahl auf  $1/e$  abgenommen hat) und von der Halbwertszeit  $t_{1/2} = \ln 2 / \lambda$  (Zeit, in der die Hälfte der Kerne zerfällt) gesprochen.

### 5.4.3 Radioaktiver Zerfall und stabiles Endprodukt

Die Zerfallsrate  $ZR_0$  der radioaktiven Ausgangssubstanz mit  $N_0$ -Kernen wird entsprechend Abschnitt 5.4.2 gegeben durch  $ZR_0 = \lambda_0 N_0$ . Für die Bildungsrate  $BR_1$  des Folgeprodukts gilt dann:

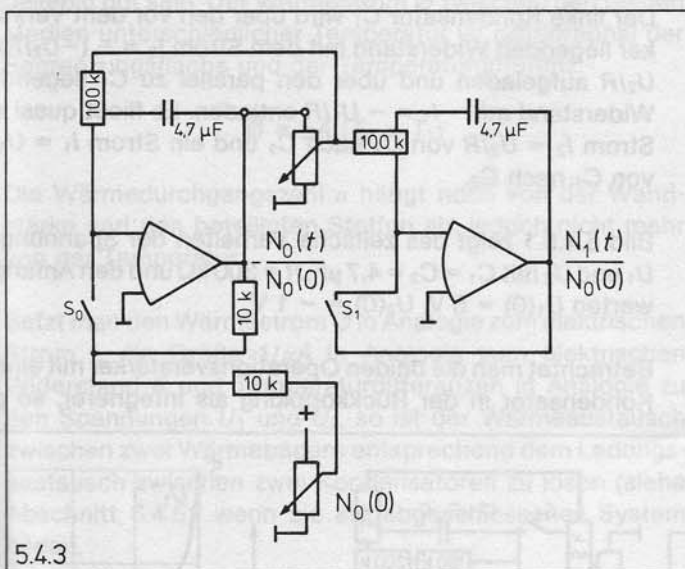
$$BR_1 = -ZR_0$$

Ist das Folgeprodukt stabil (radiogen), so wird die Änderung der Zahl  $N_1$  seiner Kerne allein durch die Bildungsrate bestimmt:

$$\dot{N}_1 = BR_1 = -\lambda_0 N_0$$

Im Schaltplan 5.4.3 wird am linken Integrierer entsprechend Abschnitten 5.4.1 und 5.4.2 die Größe  $N_0(t)/N_0(0)$  gebildet. Der rechte Integrierer liefert  $N_1(t)/N_0(0)$ . Für die Zeitkonstanten beider Integrierer muß gelten:

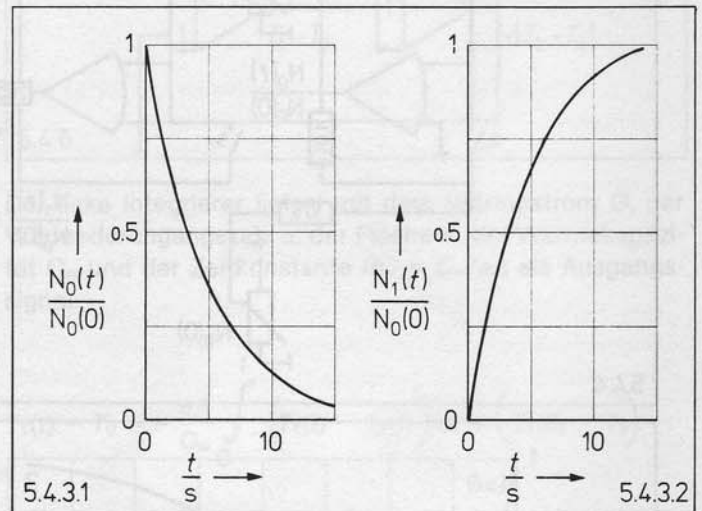
$$RC = 1/\lambda_0$$



Die Anfangswerte  $N_0(0)/N_0(0) = 1$  und  $N_1(0)/N_0(0) = 0$  werden bei geschlossenen Schaltern  $S_0$  und  $S_1$  vorgegeben. Die Zerfallskonstante  $\lambda$  läßt sich mit dem Potentiometer im oberen Teil des Schaltplanes 5.4.3 verärfern. Mit Öffnen der beiden Schalter beginnt die Rechnung. Bild 5.4.3.1 zeigt  $N_0(t)/N_0(0)$ , den abnehmenden Anteil der Ausgangssub-

stanz, und Bild 5.4.3.2 zeigt  $N_1(t)/N_0(0)$ , den wachsenden Anteil des stabilen Folgeprodukts. Da nur Kernumwandlungen erfolgen, gilt:

$$N_0(t) + N_1(t) = N_0(0)$$



### 5.4.4 Zerfallsreihe

Ist das Folgeprodukt im Abschnitt 5.4.3 wiederum radioaktiv und z.B. dessen Folgeprodukt ebenfalls, so erhält man eine Zerfallsreihe (radioaktive Familie). Am Ende einer solchen Reihe steht jeweils ein stabiler Kern. Im folgenden Beispiel soll eine Muttersubstanz insgesamt drei Folgeprodukte haben. Die Anzahl der einzelnen Glieder seien  $N_0$  (Ausgangssubstanz),  $N_1$ ,  $N_2$  und  $N_3$  (radiogenes Endprodukt), die zugehörigen Zerfallskonstanten  $\lambda_0$ ,  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ . Es gilt:

$$\dot{N}_0 = -\lambda_0 N_0$$

$$\dot{N}_1 = \lambda_0 N_0 - \lambda_1 N_1$$

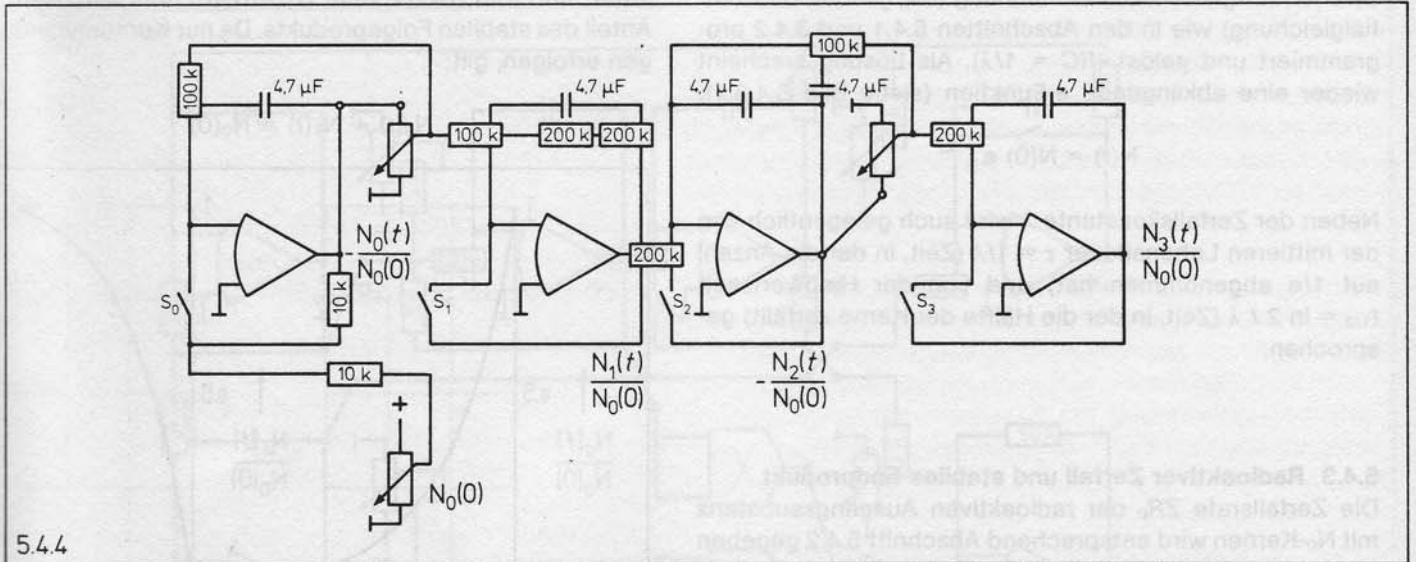
$$\dot{N}_2 = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2$$

$$\dot{N}_3 = \lambda_2 N_2$$

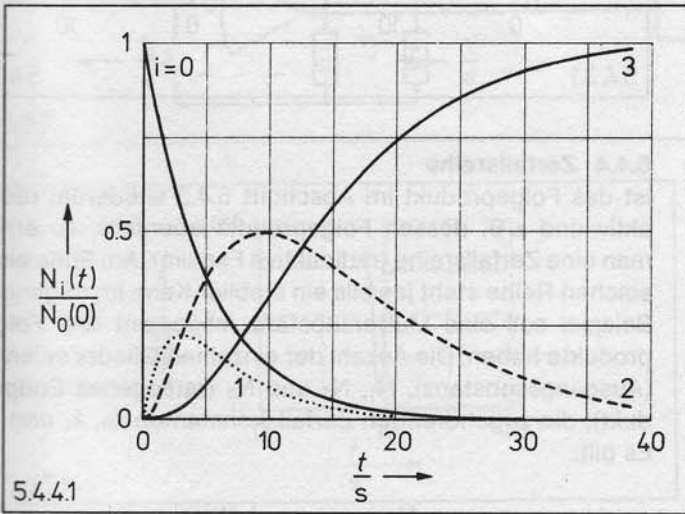
Daraus lassen sich jeweils durch eine Integration die Anzahlen der Kerne der Ausgangssubstanz  $N_0$  und der Zerfallsprodukte  $N_1$ ,  $N_2$  und  $N_3$  berechnen.

Im Schaltplan 5.4.4 wird links mit der Berechnung von  $-N_0(t)/N_0(0)$  entsprechend Abschnitt 5.4.3 begonnen. Die Zerfallskonstante  $\lambda_0$  läßt sich mit dem Potentiometer links oben verändern. Es folgt der Integrierer für  $N_1(t)/N_0(0)$ . Die Zerfallskonstante  $\lambda_1 = 0,5 \text{ s}^{-1}$  ist hier durch die Zeitkonstante  $RC = 2 \text{ s}$  fest gegeben. Am dritten Integrierer wird  $-N_2(t)/N_0(0)$  gebildet. Die Zerfallskonstante  $\lambda_2$  ist mit dem Potentiometer rechts oben einstellbar. Der vierte Integrierer liefert schließlich  $N_3(t)/N_0(0)$ .

Vor Beginn der Rechnung werden die Anfangswerte  $N_0(0) > 0$  und  $N_1(0) = N_2(0) = N_3(0) = 0$  bei geschlossenen Schaltern  $S_0$ ,  $S_1$ ,  $S_2$  und  $S_3$  eingestellt. Werden alle Schalter gleichzeitig geöffnet, beginnt die Rechnung. Steht der programmierbare Schalter (576 07) nicht zur Verfügung, so ist zusätzlich zum Satz Steckelemente (576 03) noch ein Kipp-schalter (579 13) erforderlich.



5.4.4



5.4.4.1

Bild 5.4.4.1 zeigt die Anteile  $N_i(t)/N_0(0)$  der Muttersubstanz ( $i = 0$ ), der Folgeprodukte ( $i = 1, i = 2$ ) und des radiogenen Endprodukts ( $i = 3$ ) für die Zerfallskonstanten:  $\lambda_0 = 0,2 \text{ s}^{-1}$ ,  $\lambda_1 = 0,5 \text{ s}^{-1}$  und  $\lambda_2 = 0,1 \text{ s}^{-1}$ . Nach genügend langer Zeit gibt es nur noch  $N_3 = N_0(0)$  Kerne des radiogenen Endprodukts. Alle anderen Zerfallsprodukte sind verschwunden.

**5.4.5 Ladungsausgleich zwischen zwei Kondensatoren**  
 Werden zwei auf die Spannungen  $U_1$  und  $U_2$  aufgeladene Kondensatoren  $C_1$  und  $C_2$  über einen ohmschen Widerstand  $R$  miteinander zu einem Stromkreis verbunden, so

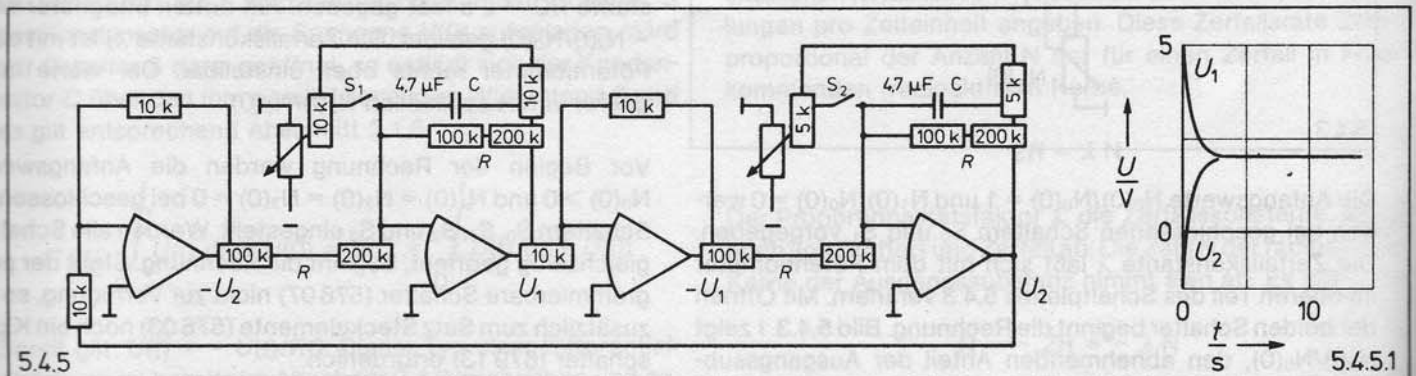
fließt ein Strom  $I = (U_1 - U_2)/R$  vom Kondensator  $C_1$  nach  $C_2$ , bis sich als Folge der Ladungsverschiebung die Spannungen  $U_1$  und  $U_2$  ausgeglichen haben. Diesen Strom kann man aufteilen in  $I_1 = U_1/R$  von  $C_1$  nach  $C_2$  und in  $I_2 = U_2/R$  von  $C_2$  nach  $C_1$ .

Um bei der Erklärung keine Probleme mit Vorzeichen zu erhalten, sind im Schaltplan 5.4.5 zwischen den beiden Integriern noch je ein Invertierer eingebaut. Die im Rückkopplungskreis je eines Operationsverstärkers liegenden Kondensatoren  $C_1$  und  $C_2$  werden bei geschlossenen Schaltern  $S_1$  und  $S_2$  auf die Spannungen  $U_1$  und  $U_2$  aufgeladen. Die Rechnung beginnt mit Öffnen der beiden Schalter.

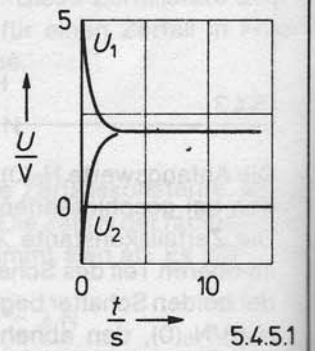
Der linke Kondensator  $C_1$  wird über den vor dem Verstärker liegenden Widerstand mit dem Strom  $I_2 = -(-U_2/R) = U_2/R$  aufgeladen und über den parallel zu  $C_1$  liegenden Widerstand mit  $-I_1 = -U_1/R$  entladen. Es fließt quasi ein Strom  $I_2 = U_2/R$  von  $C_2$  nach  $C_1$  und ein Strom  $I_1 = U_1/R$  von  $C_1$  nach  $C_2$ .

Bild 5.4.5.1 zeigt das zeitliche Verhalten der Spannungen  $U_1$  und  $U_2$  mit  $C_1 = C_2 = 4,7 \mu\text{F}$ ,  $R = 300 \text{ k}\Omega$  und den Anfangswerten  $U_1(0) = 5 \text{ V}$ ,  $U_2(0) = -1 \text{ V}$ .

Betrachtet man die beiden Operationsverstärker mit einem Kondensator in der Rückkopplung als Integrierer, so gilt



5.4.5



5.4.5.1

entsprechend Abschnitt 2.1.6:

$$U_1(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t (U_1(t) - U_2(t)) dt + U_1(0)$$

$$U_2(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t (U_2(t) - U_1(t)) dt + U_2(0)$$

Es gilt somit das folgende System von Differentialgleichungen:

$$\dot{U}_1(t) = \frac{1}{RC} (U_2(t) - U_1(t))$$

$$\dot{U}_2(t) = \frac{1}{RC} (U_1(t) - U_2(t))$$

Die allgemeine Lösung bei gleichen Zeitkonstanten  $RC$  lautet mit den Anfangswerten  $U_1(0)$  und  $U_2(0)$ :

$$U_1(t) = \frac{U_1(0) - U_2(0)}{2} e^{-2t/RC} + \frac{U_1(0) + U_2(0)}{2}$$

$$U_2(t) = \frac{U_2(0) - U_1(0)}{2} e^{-2t/RC} + \frac{U_2(0) + U_1(0)}{2}$$

### 5.4.6 Wärmeausgleich zwischen zwei Wärmebädern

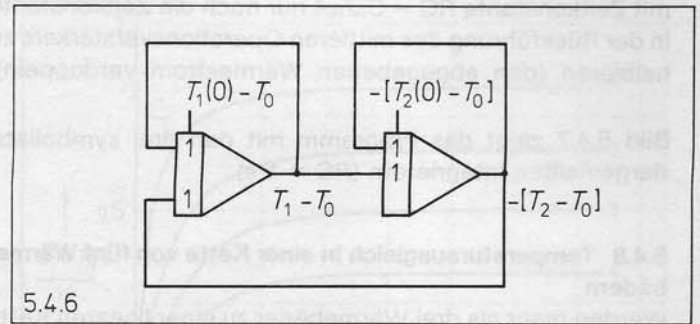
Zwei Wärmebäder mit den Temperaturen  $T_1$  und  $T_2$  werden auf einer (großen) Fläche  $A$  in Kontakt gebracht. Dabei soll der Wärmetransport innerhalb eines jeden Wärmebades beliebig gut sein. Der Wärmestrom  $\emptyset$  zwischen den beiden Medien unterschiedlicher Temperatur ist proportional der Begrenzungsfläche und der Temperaturdifferenz:

$$\emptyset = \alpha A (T_2 - T_1)$$

Die Wärmedurchgangszahl  $\alpha$  hängt noch von der Wandstärke und den beteiligten Stoffen ab, jedoch nicht mehr von der Temperatur.

Setzt man den Wärmestrom  $\emptyset$  in Analogie zum elektrischen Strom  $I$ , die Größe  $1/\alpha A$  in Analogie zum elektrischen Widerstand  $R$  und Temperaturdifferenzen in Analogie zu den Spannungen  $U_1$  und  $U_2$ , so ist der Wärmeaustausch zwischen zwei Wärmebädern entsprechend dem Ladungsaustausch zwischen zwei Kondensatoren zu lösen (siehe Abschnitt 5.4.5), wenn sie ein abgeschlossenes System bilden.

In Bild 5.4.6 sind deshalb nur die Symbole der beiden beschalteten Integrierer (siehe Abschnitt 2.1.7) miteinander passend verbunden. Gegenüber Schaltplan 5.4.5 sind außerdem die beiden Invertierer entfallen und die Zeitkonstanten zu  $RC = 1$  s gewählt. Die Ausgangssignale geben Temperaturdifferenzen zu einer willkürlich gewählten Basis  $T_0$  (z.B.  $0^\circ$  C oder Umgebungstemperatur) an.



Der linke Integrierer liefert mit dem Wärmestrom  $\emptyset$ , der Wärmedurchgangszahl  $\alpha$ , der Fläche  $A$ , der Wärmekapazität  $C_w$  und der Zeitkonstante  $RC = C_w/\alpha A$  als Ausgangssignal:

$$T_1(t) - T_0 = -\frac{\alpha A}{C_w} \int_0^t (T_1(t) - T_2(t)) dt + (T_1(0) - T_0)$$

$$= \frac{1}{C_w} \int_0^t \emptyset(t) dt + (T_1(0) - T_0)$$

Der rechte Integrierer ergibt entsprechend:

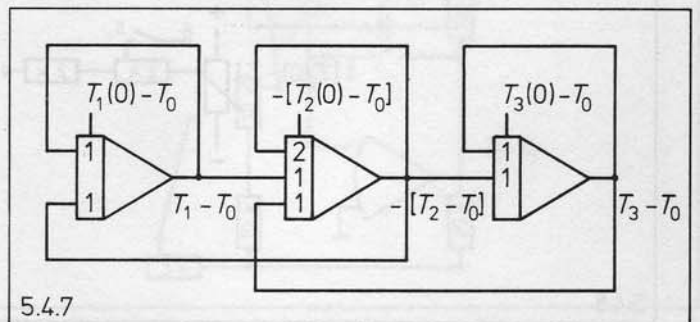
$$-(T_2(t) - T_0) = \frac{\alpha A}{C_w} \int_0^t (T_2(t) - T_1(t)) dt - (T_2(0) - T_0)$$

$$= \frac{1}{C_w} \int_0^t \emptyset(t) dt - (T_2(0) - T_0)$$

Eine mögliche Temperaturabhängigkeit der Wärmekapazität  $C_w$  wird hier vernachlässigt.

### 5.4.7 Temperatúrausgleich in einer Kette von drei Wärmebädern

Werden drei Wärmebäder zu einer linearen Kette angeordnet, so muß man für das mittlere Glied den Wärmeaustausch mit seinen beiden Nachbarn ermöglichen. Sind die drei Wärmekapazitäten  $C_w$ , beide Flächen  $A$  und beide Wärmedurchgangszahlen  $\alpha$  jeweils einander gleich, so braucht man außer der Wärmezufuhr von beiden Nachbarn



mit Zeitkonstante  $RC = C_w/\alpha A$  nur noch die Zeitkonstante in der Rückführung des mittleren Operationsverstärkers zu halbieren (den abgegebenen Wärmestrom verdoppeln).

Bild 5.4.7 zeigt das Programm mit den drei symbolisch dargestellten Integriern ( $RC = 1$  s).

### 5.4.8 Temperatenausgleich in einer Kette von fünf Wärmebädern

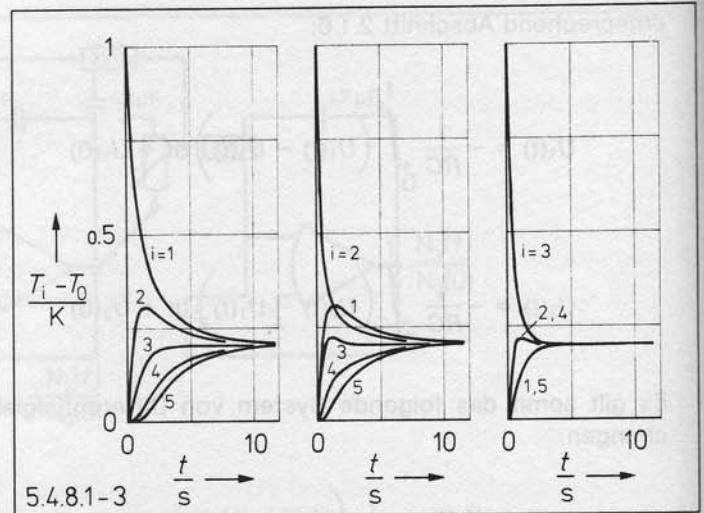
Werden mehr als drei Wärmebäder zu einer linearen Kette angeordnet, so muß man für jedes innere Glied den Wärmeaustausch mit jeweils seinen beiden Nachbarn entsprechend Abschnitt 5.4.7 berücksichtigen.

Der Schaltplan 5.4.8 zeigt eine Kette von fünf Wärmebädern mit gleichen Wärmekapazitäten  $C_w$ , gleichen Kontaktflächen  $A$  und gleichen Wärmedurchgangszahlen  $\alpha$ . Es gilt hier insbesondere  $C_w/\alpha A = 1$  s (Zeitkonstante  $RC$ ).

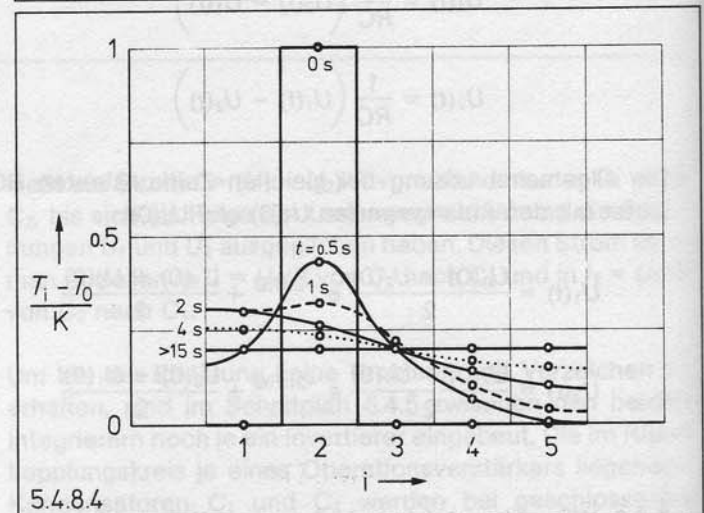
Es werden fünf Schalter benötigt. Steht der programmierbare Schalter (576 07) nicht zur Verfügung, so sind zusätzlich zum Satz Steckelemente (576 03) noch zwei Kippschalter (579 13) erforderlich.

Vor Beginn der Rechnung werden bei geschlossenen Schaltern alle Anfangswerte zu  $T_i(0) - T_0 = 0$  eingestellt bis auf einen, z. B.  $T_n(0) - T_0 \neq 0$ . Dazu ist links unten im Schaltplan 5.4.8 eine Schaltung zum Erzeugen des Anfangswertes  $T_n(0) - T_0$  aufgebaut. Diese wird mit zwei Kabeln an Stelle des Schalters  $S_n$  mit den Buchsen A und B verbunden. Es lassen sich so schnell verschiedene Kombinationen von Anfangswerten erreichen.

Bilder 5.4.8.1 bis 5.4.8.3 zeigen die Temperaturen der fünf Wärmebäder als Funktion der Zeit für verschiedene Anfangswerte. Im Bild 5.4.8.1 ist  $T_1(0) - T_0 = 1$  K, im Bild 5.4.8.2 ist  $T_2(0) - T_0 = 1$  K und im Bild 5.4.8.3 ist  $T_3(0) - T_0 = 1$  K; alle anderen  $T_i(0) - T_0$  sind jeweils gleich Null.

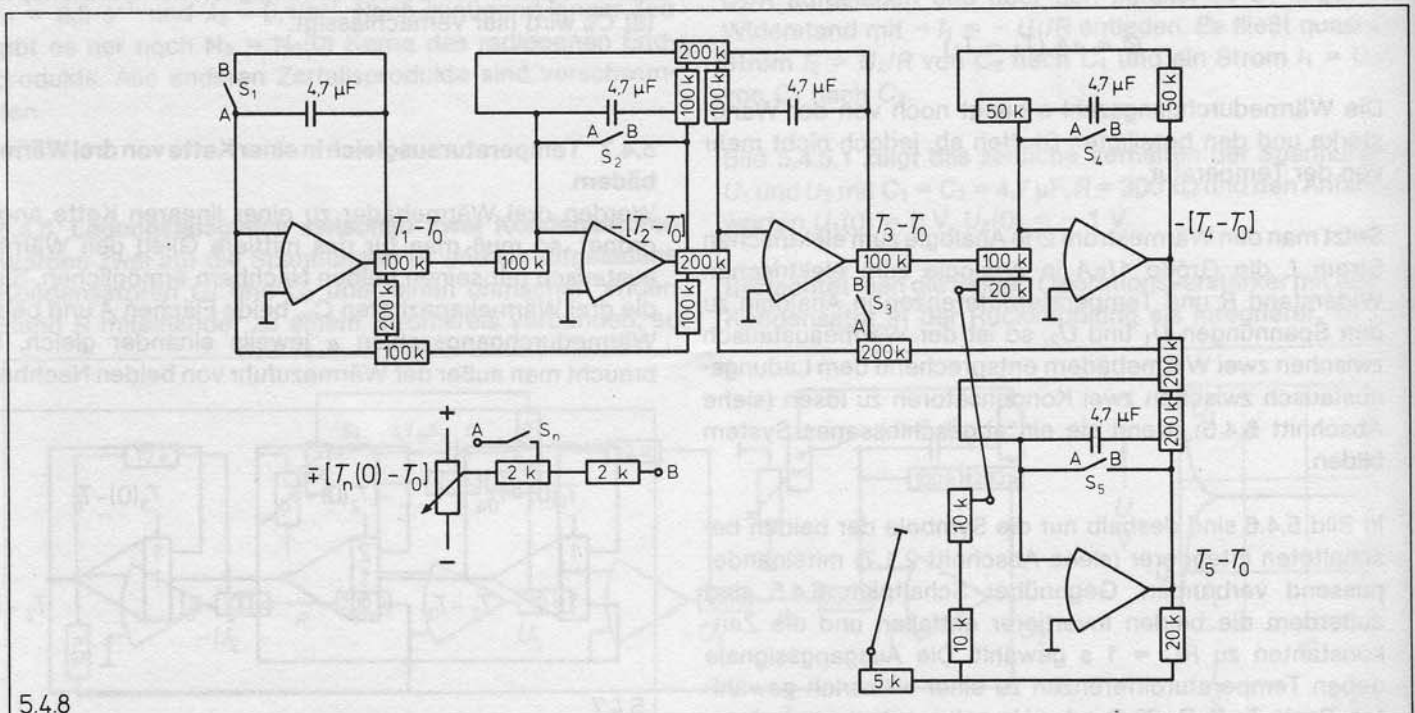


5.4.8.1-3



5.4.8.4

Im Bild 5.4.8.2 fällt insbesondere auf, daß das zweite Wärmebad im Verlauf des Ausgleichvorganges nicht immer die höchste Temperatur der ganzen Kette hat, sondern diese Vorrangstellung nach kurzer Zeit an das erste Wärmebad abtrifft. Da das System der Wärmebäder hier nach außen abgeschlossen ist, kann Bad 1 eine einmal auf-



5.4.8



genommene Wärme nur wieder an Bad 2 abgeben, doch dazu muß  $T_2$  kleiner als  $T_1$  sein.

Bild 5.4.8.4 zeigt noch einmal Meßwerte des Bildes 5.4.8.2. Sie sind jedoch jetzt über dem Ort (dem Index) der Wärmebäder aufgetragen. Temperaturmeßpunkte für gleiche Zeiten sind jeweils miteinander verbunden.

### 5.4.9 Ein Modell zur Wärmeleitung

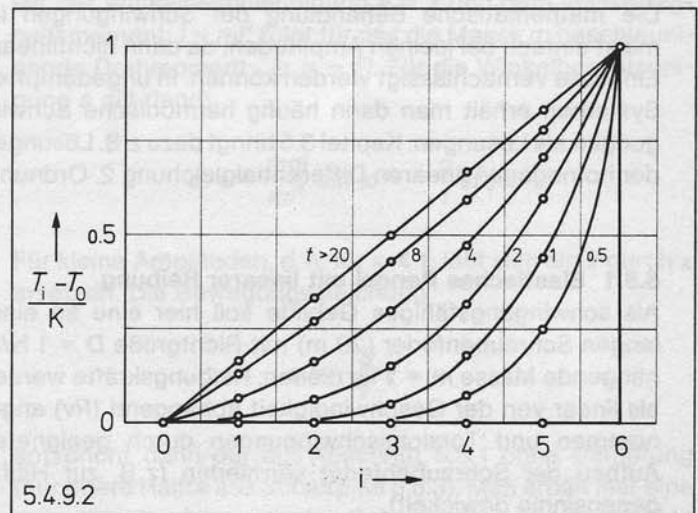
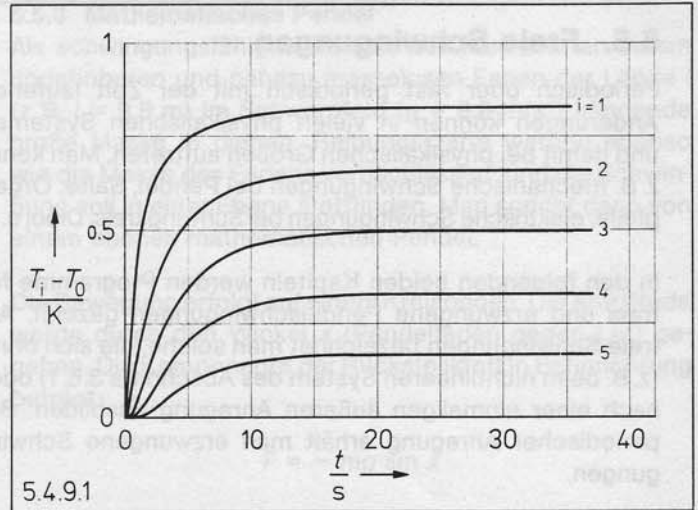
Die lineare Kette der fünf Wärmebäder des Abschnitts 5.4.8 wird zwischen zwei große Wärmebäder  $B_0$  und  $B_6$  mit festen Temperaturen gelegt. Das Wärmebad  $B_0$  hält die Temperatur  $T_0$  und das Bad  $B_6$  die Temperatur  $T_6$  mit  $T_6 - T_0 = 1$  K. Die Kontaktflächen  $A$  und die Wärmedurchgangszahlen  $\alpha$  sind wieder jeweils einander gleich.

Der Schaltplan ist in Bild 5.4.9 wiedergegeben. Jetzt sind auch die Bäder  $B_1$  und  $B_5$  im Sinne von Abschnitt 5.4.7 innere Glieder der Kette, auch sie erhalten nun einen Widerstand von  $100\text{ k}\Omega$  in der Rückkopplung. Für alle Anfangswerte gilt  $T_i(0) - T_0 = 0$ , bzw.  $T_i(0) = T_0$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ .

Es werden wieder fünf Schalter benötigt. Steht der programmierbare Schalter (57607) nicht zur Verfügung, so sind zusätzlich zum Satz Steckelemente (57603) noch zwei Kippschalter (57913) erforderlich.

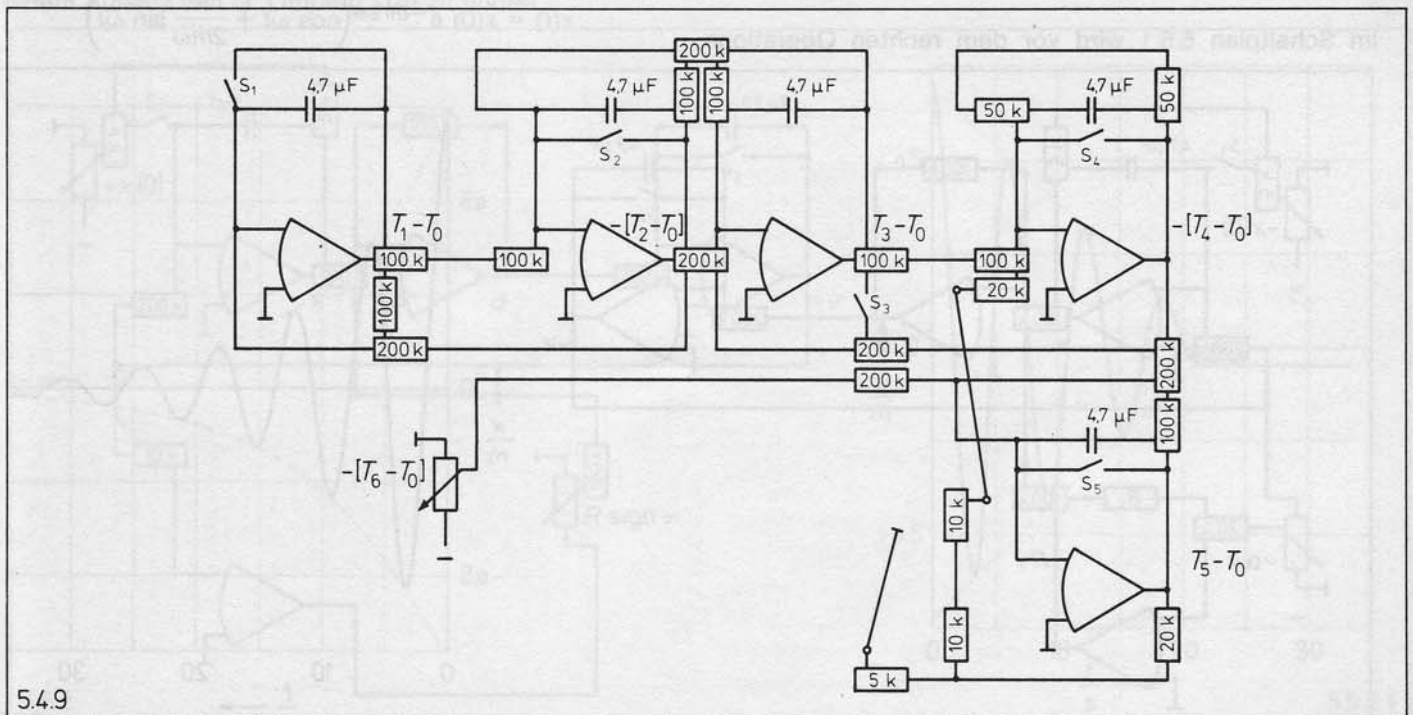
Bild 5.4.9.1 zeigt die Temperaturen der Bäder 1 bis 5 als Funktionen der Zeit, und Bild 5.4.9.2 zeigt den Temperaturverlauf als Funktion des Ortes (Index) der Wärmebäder. Meßpunkte für gleiche Zeiten sind jeweils miteinander verbunden. Es zeigt sich hier, daß nach einer Übergangszeit (z. B. etwa 20 s) das Temperaturgefälle in der Kette linear geworden ist.

Da im stationären Fall die Temperaturdifferenz pro Über-



gang  $(T_6 - T_0)/6$  ist, gilt hier für den Wärmestrom  $\Phi$  von  $B_6$  nach  $B_0$ :

$$\Phi = \alpha A \frac{T_6 - T_0}{6}$$



5.4.9

## 5.5. Freie Schwingungen

Periodisch oder fast periodisch mit der Zeit laufende Änderungen können in vielen physikalischen Systemen und damit bei physikalischen Größen auftreten. Man kennt z. B. mechanische Schwingungen bei Pendel, Saite, Orgelpfeife, elektrische Schwingungen bei Schwingkreis, Dipol u. a.

In den folgenden beiden Kapiteln werden Programme für freie und erzwungene Pendelschwingungen gezeigt. Als freie Schwingungen bezeichnet man solche, die sich ohne (z. B. beim nichtlinearen System des Abschnitts 3.6.1) oder nach einer einmaligen äußeren Anregung ausbilden. Bei periodischer Anregung erhält man erzwungene Schwingungen.

Die mathematische Behandlung der Schwingungen ist meist einfach bei kleinen Amplituden, da dann nichtlineare Einflüsse vernachlässigt werden können. In ungedämpften Systemen erhält man dann häufig harmonische Schwingungen als Lösungen. Kapitel 3.5 bringt dazu z. B. Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung.

### 5.5.1 Elastisches Pendel mit linearer Reibung

Als schwingungsfähiges Gebilde soll hier eine an einer langen Schraubenfeder (20 m) mit Richtgröße  $D = 1 \text{ N/m}$  hängende Masse  $m = 1 \text{ kg}$  dienen. Reibungskräfte werden als linear von der Geschwindigkeit abhängig ( $Rv$ ) angenommen und Torsionsschwingungen durch geeigneten Aufbau der Schraubenfeder vermieden (z. B. zur Hälfte gegensinnig gewickelt).

Mit der Beschleunigung  $a$ , der Geschwindigkeit  $v$  und der Ortskoordinate  $x$  der Masse gilt für die beschleunigende Kraft:

$$ma = -Dx - Rv$$

Im Schaltplan 5.5.1 wird vor dem rechten Operations-

verstärker mit der Beschleunigung  $a$  begonnen. Nach einem Integrierer (Zeitkonstante  $RC = 1 \text{ s}$ ) erhält man entsprechend Abschnitt 5.1.5 die Geschwindigkeit  $-v$  und nach einem zweiten Integrierer links oben (Zeitkonstante  $RC = 1 \text{ s}$ ) den Ort  $x$  entsprechend Abschnitt 5.1.1. Am mittleren Summierer wird durch geeignete Beschaltung wieder die Beschleunigung  $a$  gebildet:

$$a = -\frac{D}{m}x - \frac{R}{m}v$$

Die dazu notwendige Kraft  $Rv$  wird vom unteren Operationsverstärker berechnet. Für den Reibungskoeffizienten  $R$  gilt hier mit dem Widerstand  $R_1$  in der Rückkopplung und der Einstellung  $0 \leq \alpha \leq 1$  des Potentiometers:

$$R = \frac{R_1}{20 \text{ k}\Omega} \alpha \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Die Schaltung entspricht derjenigen aus Abschnitt 3.5.6 zur Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + py' + qy = 0$$

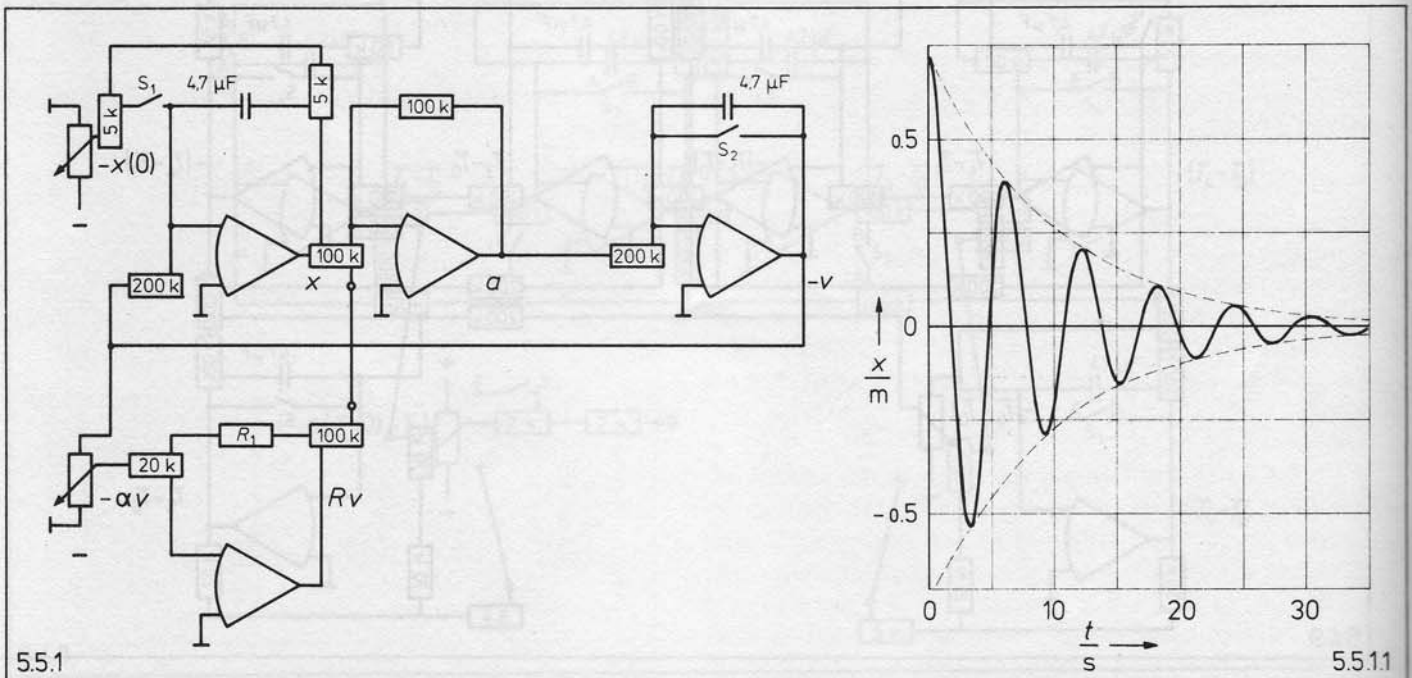
mit  $q > 0, p \geq 0$ .

Vor Beginn der Rechnung werden bei geschlossenen Schaltern  $S_1$  und  $S_2$  die Anfangswerte  $x(0) \neq 0$  und  $v(0) = 0$  vorgegeben und der Reibungskoeffizient  $R$  gewählt. Mit dem Öffnen der beiden Schalter beginnt die Rechnung.

Bild 5.5.1.1 zeigt eine Lösung mit  $x(0) = 0,7 \text{ m}$  und  $R = 0,2 \text{ kg/s}$  (gedämpfte Schwingung).

Die mathematische Behandlung der Lösungen erfolgt im Kapitel 3.5. Für das hier gewählte Pendel und mit  $v(0) = 0$  gilt für  $R < \sqrt{4mD} = 2 \text{ kg/s}$ :

$$x(t) = x(0) e^{-tR/2m} \left( \cos \omega t + \frac{R}{2m\omega} \sin \omega t \right)$$



$$\text{mit } \omega = \sqrt{\frac{D}{m} - \left(\frac{R}{2m}\right)^2}$$

Die Frequenz wird mit zunehmender Reibung kleiner. Für  $R = \sqrt{4mD}$  erreicht man den aperiodischen Grenzfall und für  $R > \sqrt{4mD}$  erhält man dann einen aperiodischen Verlauf (vergleiche Abschnitt 3.5.1).

### 5.5.2 Elastisches Pendel mit Gleitreibung

Wählt man keine der Geschwindigkeit proportionale sondern eine konstante, nur noch von der Richtung der Geschwindigkeit abhängende Reibungskraft  $F = R \text{ sign } v$ , so gilt mit der Beschleunigung  $a$ , der Geschwindigkeit  $v$  und dem Ort  $x$  für die das elastische Pendel des Abschnitts 5.5.1 beschleunigende Kraft:

$$ma = -Dx - R \text{ sign } v$$

Im Schaltplan 5.5.2 wird  $R \text{ sign } v$  links unten durch einen offenen Verstärker (siehe Abschnitt 2.1.1) mit nachfolgendem Potentiometer erzeugt. Die obere Hälfte des Schaltplans ist identisch mit der oberen Hälfte aus Bild 5.5.1. Am mittleren Operationsverstärker wird die Summe für die Beschleunigung  $a$  gebildet:

$$a = -\frac{D}{m}x - \frac{R}{m} \text{ sign } v$$

Vor Beginn der Rechnung werden bei geschlossenen Schaltern  $S_1$  und  $S_2$  die Anfangswerte z. B.  $x(0) = 0,7 \text{ m}$  und  $v(0) = 0$  vorgegeben. Als Lösung (Bild 5.5.2.1) erhält man wieder eine gedämpfte Schwingung, deren Amplitude jedoch jetzt linear mit der Zeit abnimmt. Am Ende verbleibt im allgemeinen eine endliche Amplitude und damit eine endliche Rückstellkraft, die jedoch durch die endliche Reibungskraft kompensiert wird. Die mathematische Behandlung einer Schwingung mit Gleitreibung ist z. B. in einem Aufsatz von G. Limperg [14] zu finden.

### 5.5.3 Mathematisches Pendel

Als schwingungsfähiges Gebilde soll hier eine an einem undehnbaren und nahezu masselosen Faden der Länge  $l$  (z. B.  $l = 9,8 \text{ m}$ ) im Schwerfeld ( $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ ) hängende große Masse  $m$  dienen. Reibungskräfte werden ebenso wie die Masse des Fadens vernachlässigt, und die Schwingung soll in einer Ebene stattfinden. Man spricht dann von einem ebenen mathematischen Pendel.

Die Bewegung erfolgt auf einem Kreisbogen. Die Amplitude werde durch den Winkel  $x$  (Pendelfaden gegen Lot) gegeben. Die Komponente der Rückstellkraft in Bahnrichtung beträgt:

$$F = -mg \sin x$$

Mit der Winkelbeschleunigung  $a = \ddot{x}$  und dem Massenträgheitsmoment  $J = ml^2$  folgt für die Masse  $m$  beschleunigende Drehmoment:  $Ja = -Fl$ . Für die Winkelbeschleunigung  $a$  gilt dann:

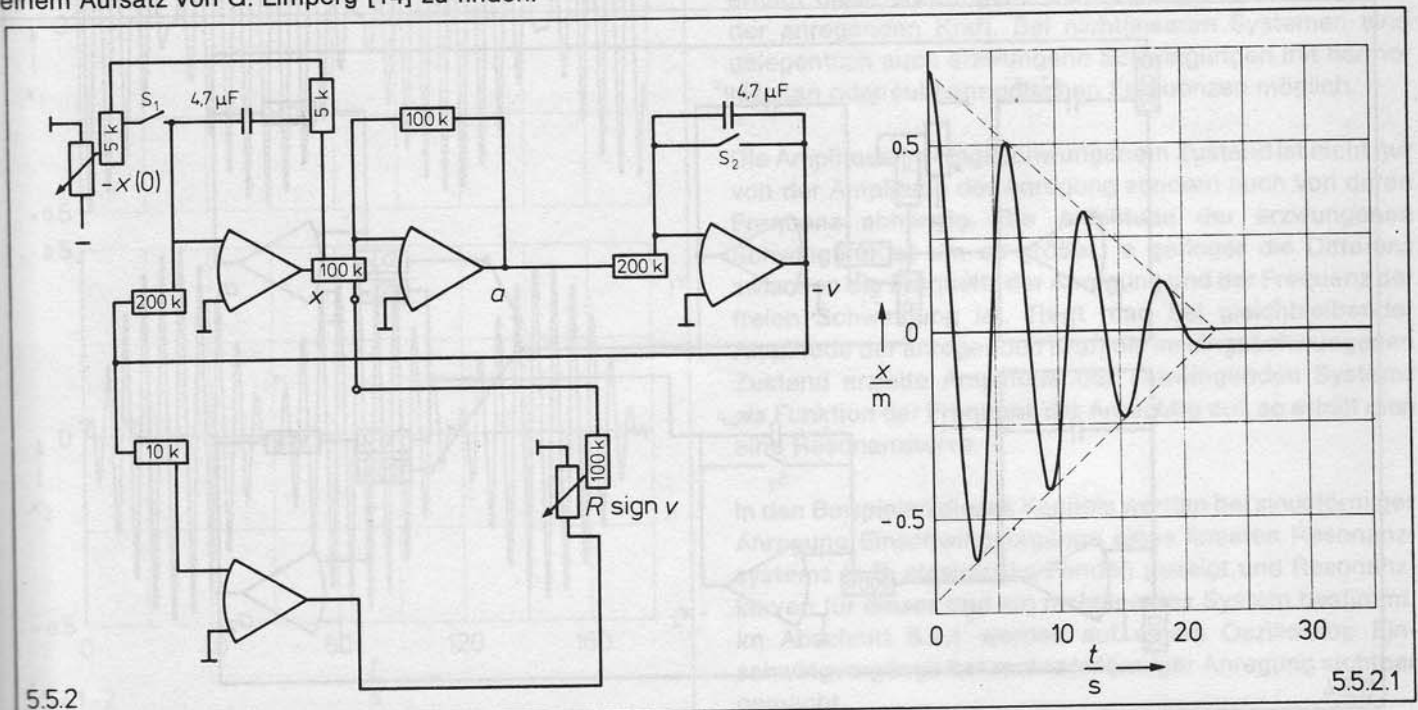
$$a = -\frac{mgl}{ml^2} \sin x = -\frac{g}{l} \sin x$$

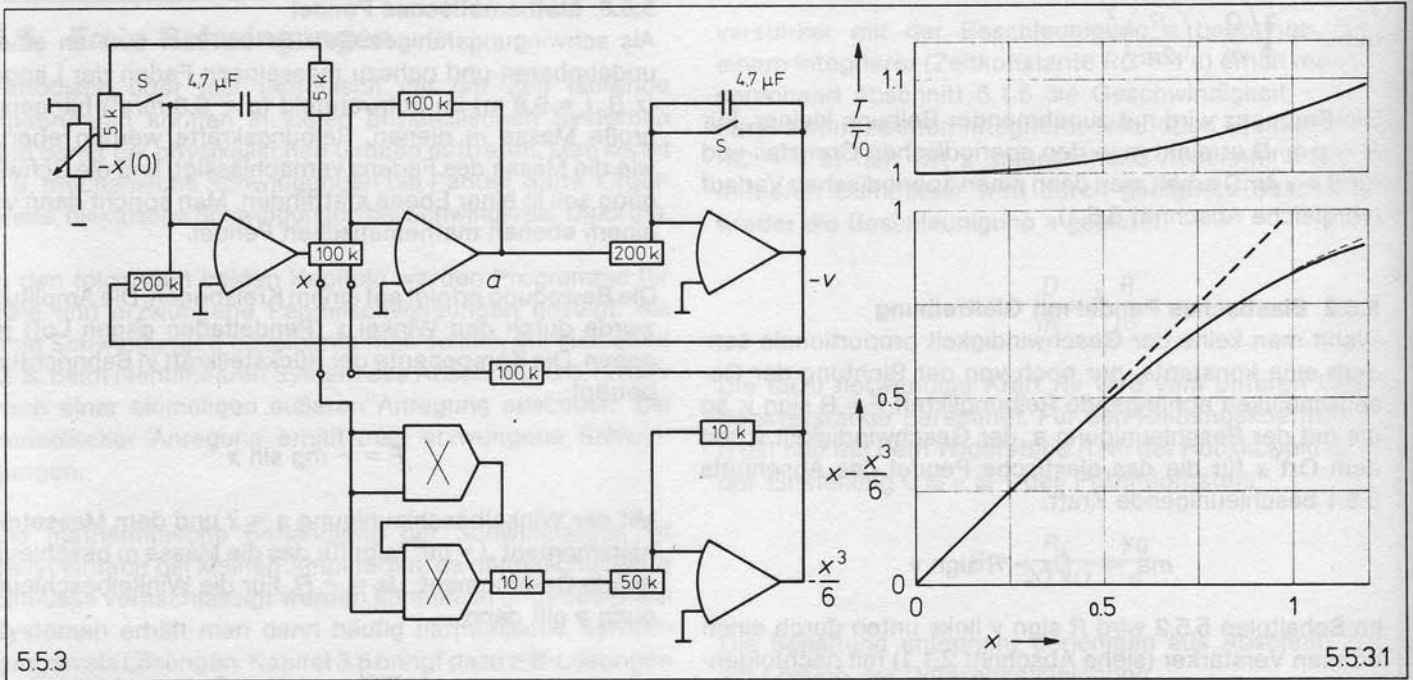
Für kleine Amplituden, d. h. für  $x \ll 1$ , läßt sich  $\sin x$  durch  $x$  ersetzen. Die Bewegungsgleichung

$$a = -\frac{g}{l} x$$

entspricht dann der aus Abschnitt 5.5.1 ohne Dämpfung (nur obere Hälfte aus Schaltplan 5.5.3). Man erhält hier eine ungedämpfte harmonische Schwingung als Lösung. Mit den Anfangswerten  $x(0) \neq 0$  und  $v(0) = 0$  gilt für kleine Amplituden

$$x(t) = x(0) \cos \frac{2\pi}{T} t$$





mit der von Masse und Amplitude unabhängigen Schwingungsdauer  $T = 2\pi \sqrt{l/g}$ .

Für große Amplituden ist die Bewegungsgleichung des mathematischen Pendels im Schaltplan 5.5.3 programmiert mit einer Näherung für  $\sin x$ , die für  $x \leq 1$  gute Ergebnisse bringt:  $\sin x = x - x^3/6$ .

In der unteren Hälfte des Schaltplans wird  $-x^3/6$  erzeugt; die obere Hälfte ist wieder identisch mit der oberen Hälfte des Schaltplans 5.5.1. Der mittlere Operationsverstärker bildet hier die Beschleunigung

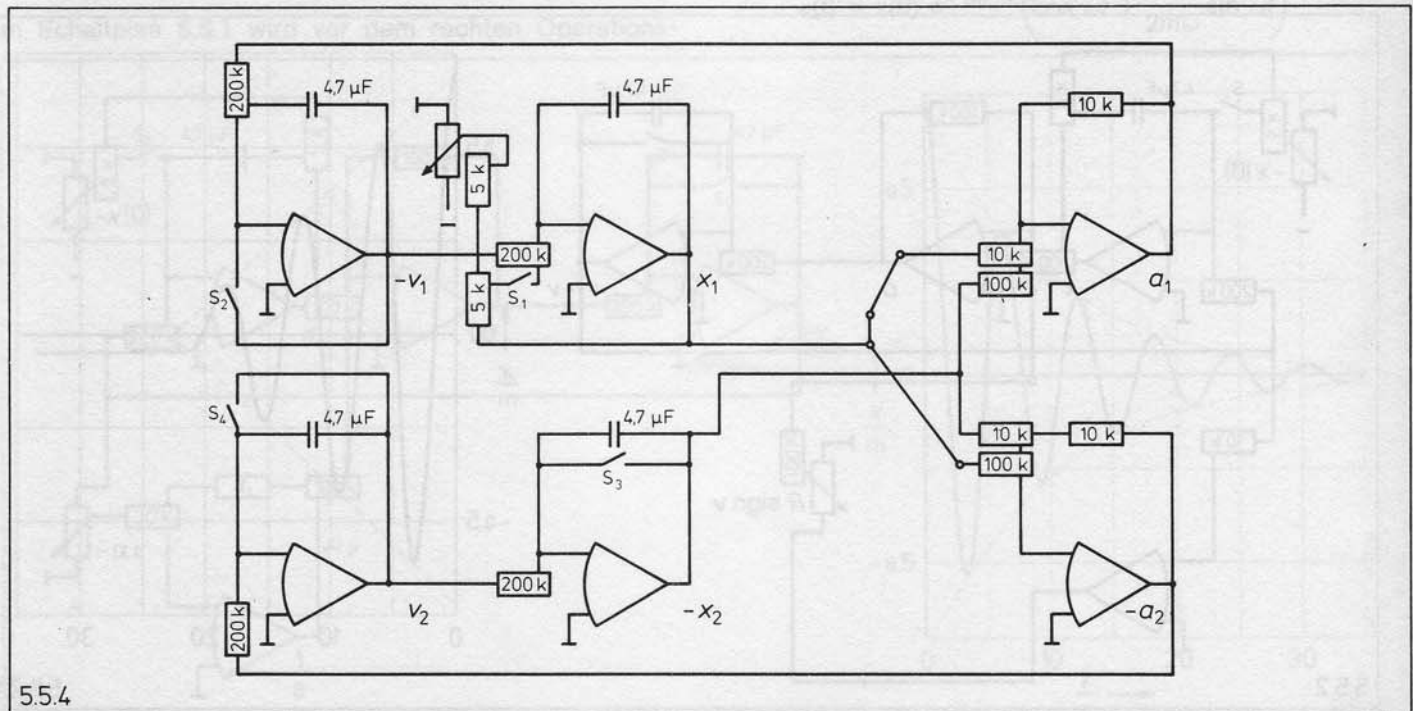
$$a = -\frac{g}{l} \left( x - \frac{x^3}{6} \right)$$

Als Lösungen erhält man bei großen Amplituden keine rein

harmonischen Schwingungen mehr. Die Schwingungsdauer  $T$  nimmt mit der Amplitude zu. Bild 5.5.3.1 zeigt unten die Funktion  $x - x^3/6$ . Für  $x = 1$  ist die Abweichung von  $\sin x$  noch kleiner als 1%. In der oberen Hälfte des Bildes 5.5.3.1 ist das Verhältnis der Schwingungszeit  $T$  bei großer Amplitude zur Schwingungszeit  $T_0 = 2\pi \sqrt{l/g}$  bei kleinen Amplituden als Funktion von  $x$  aufgetragen.

### 5.5.4 Gekoppelte Pendel

Zwei Pendel mit gleicher Richtgröße  $D_0$  und gleicher Masse  $m$  werden durch eine weiche Schraubfeder mit Richtgröße  $D_1 \ll D_0$  verbunden. Es gilt mit den Beschleunigungen  $a_1$  und  $a_2$  und den Auslenkungen  $x_1$  und  $x_2$  der beiden Pendel bei Vernachlässigung von Reibung für die beschleunigten



5.5.4

den Kräfte jeweils:

$$ma_1 = -D_0x_1 - D_1(x_1 - x_2)$$

$$ma_2 = -D_0x_2 - D_1(x_2 - x_1)$$

Diese Bewegungsgleichungen sind im Schaltplan 5.5.4 programmiert. In der oberen Hälfte wird links mit der Beschleunigung  $a_1$  begonnen. Nach zwei Integrierern (Zeitkonstanten  $RC = 1$  s) erhält man entsprechend Abschnitten 5.1.5 und 5.1.1 die Auslenkung  $x_1$ . Unten wird mit der Beschleunigung  $-a_2$  begonnen und man erhält nach zwei Integrierern die Auslenkung  $-x_2$ .

Rechts oben wird mit  $D_0/m = 0,9 \text{ s}^{-2}$  und  $D_1/m = 0,1 \text{ s}^{-2}$  wieder die Beschleunigung  $a_1$  berechnet:

$$a_1 = -\frac{D_0 + D_1}{m}x_1 + \frac{D_1}{m}x_2$$

Rechts unten folgt entsprechend die Beschleunigung:

$$-a_2 = \frac{D_0 + D_1}{m}x_2 - \frac{D_1}{m}x_1$$

Es werden insgesamt vier Schalter benötigt. Steht der programmierbare Schalter (57607) nicht zur Verfügung, so ist zusätzlich zum Satz Steckelemente (57603) noch ein Kippschalter (57913) erforderlich.

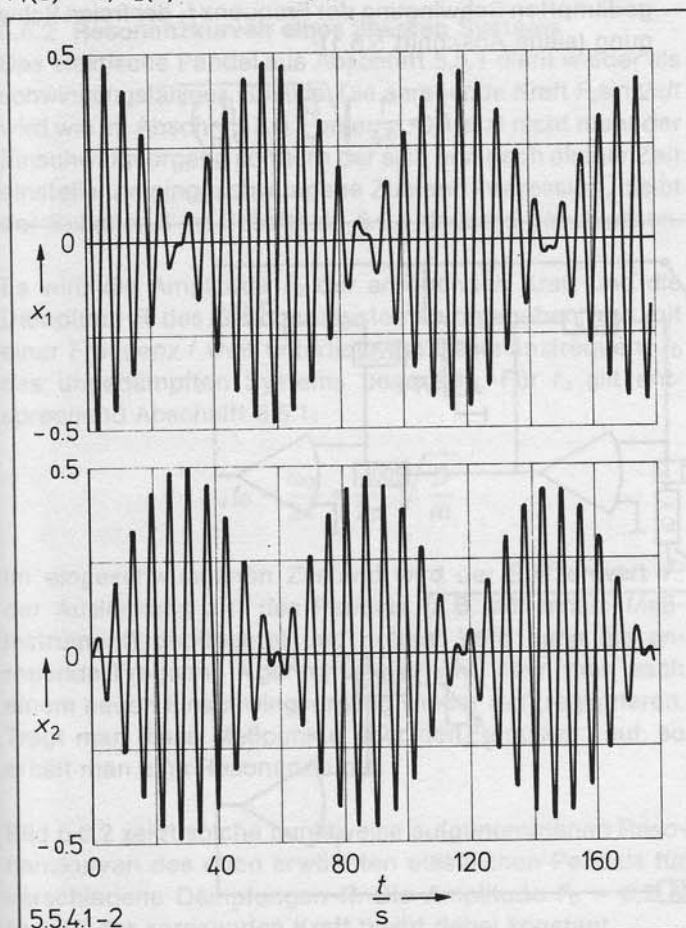
Vor Beginn der Rechnung werden bei geschlossenen Schaltern  $S_1, S_2, S_3$  und  $S_4$  die Anfangswerte  $x_1(0) = 0,5 \text{ m}$ ,  $v_1(0) = 0$ ,  $x_2(0) = 0$  und  $v_2(0) = 0$  vorgegeben. Mit dem Öff-

nen aller Schalter beginnt die Rechnung. Bild 5.5.4.1 zeigt die Lösung für die Auslenkung  $x_1(t)$  des ersten Pendels und Bild 5.5.4.2 die Lösung für die Auslenkung  $x_2(t)$  des zweiten Pendels.

Pendel 2 wird von Pendel 1 zu Schwingungen angeregt; dabei verliert Pendel 1 Energie, kommt (falls beide Pendel gleich sind) zur Ruhe und Pendel 2 erreicht (ohne Dämpfung) die Anfangsamplitude von Pendel 1. Nun werden die Rollen vertauscht. Pendel 2 gibt Energie an Pendel 1 ab, bis dieses wieder mit der Anfangsamplitude schwingt und Pendel 2 zur Ruhe kommt. Jedes der beiden Pendel zeigt typische Schwebungen (vergleiche Abschnitt 3.7.8).

Wird bei den Lösungen nach Schaltplan 5.5.4 eventuell der Zustand der Ruhe nicht erreicht, so sind die frequenzbestimmenden Elemente im Programm für Pendel 1 nicht exakt gleich denen für Pendel 2. Der Austausch eines Kondensators ( $4,7 \mu\text{F} \pm 5\%$ ) kann Abhilfe schaffen.

Neben der in den Bildern 5.5.4.1 und 5.5.4.2 gezeigten Lösung kann das System der gekoppelten Pendel noch zwei Fundamentalschwingungen ausführen, bei denen keine Schwebungen auftreten. Beide Pendel schwingen dann entweder mit gleicher Amplitude und gleicher Phase (d. h.  $x_1(0) = x_2(0)$  und  $v_1(0) = v_2(0) = 0$ ) oder genau gegenphasig (d. h.  $x_1(0) = -x_2(0)$  und  $v_1(0) = 0, v_2(0) = 0$ ).



## 5.6. Erzwungene Schwingungen

Ein physikalisches System kann durch eine periodisch wirkende äußere Kraft in Schwingungen versetzt werden. Nach einem mehr oder weniger langen Einschwingvorgang erfolgt diese erzwungene Schwingung mit der Frequenz der anregenden Kraft. Bei nichtlinearen Systemen sind gelegentlich auch erzwungene Schwingungen mit harmonischen oder subharmonischen Frequenzen möglich.

Die Amplitude im eingeschwungenem Zustand ist nicht nur von der Amplitude der Anregung sondern auch von deren Frequenz abhängig. Die Amplitude der erzwungenen Schwingung ist um so größer, je geringer die Differenz zwischen der Frequenz der Anregung und der Frequenz der freien Schwingung ist. Trägt man bei gleichbleibender Amplitude der anregenden Kraft die im eingeschwungenen Zustand erzielte Amplitude des schwingenden Systems als Funktion der Frequenz der Anregung auf, so erhält man eine Resonanzkurve.

In den Beispielen dieses Kapitels werden bei sinusförmiger Anregung Einschwingvorgänge eines linearen Resonanzsystems (z. B. elastisches Pendel) gezeigt und Resonanzkurven für dieses und ein nichtlineares System bestimmt. Im Abschnitt 6.2.1 werden auf einem Oszilloskop Einschwingvorgänge bei rechteckförmiger Anregung sichtbar gemacht.

### 5.6.1 Einschwingvorgänge bei linearem Resonanzsystem

Als schwingungsfähiges Gebilde soll hier wieder wie im Abschnitt 5.5.1 eine an einer langen Schraubenfeder (20 m) mit Richtgröße  $D = 1 \text{ N/m}$  hängende Masse  $m = 1 \text{ kg}$  dienen. Reibungskräfte werden als linear von der Geschwindigkeit abhängig angenommen. Für die anregende Kraft soll gelten:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ F_0 \sin 2\pi ft & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

Mit der Beschleunigung  $a$ , der Geschwindigkeit  $v$  und der Auslenkung  $x$  der Masse gilt für die beschleunigende Kraft ( $t \geq 0$ ):

$$ma = -Dx - Rv + F_0 \sin 2\pi ft$$

Im Schaltplan 5.6.1 wird oben vor dem rechten Operationsverstärker mit der Beschleunigung  $a$  begonnen. Nach einem Integrierer (Zeitkonstante  $RC = 1 \text{ s}$ ) erhält man entsprechend Abschnitt 5.1.5 die Geschwindigkeit  $-v$  und nach einem zweiten Integrierer (Zeitkonstante  $RC = 1 \text{ s}$ ) entsprechend Abschnitt 5.1.1 die Auslenkung  $x$  des Pendels. Der nachfolgende Operationsverstärker liefert mit  $D = 1 \text{ N/m}$  die Summe der Kräfte  $-Dx + F_0 \sin 2\pi ft$ . Am Potentiometer rechts oben wird die Reibungskraft  $-Rv$  gebildet, so daß mit  $m = 1 \text{ kg}$  im Eingang des rechten Integrierers wieder die Beschleunigung  $a$  zur Verfügung steht:

$$a = -\frac{D}{m}x - \frac{R}{m}v - \frac{F_0}{m} \sin 2\pi ft$$

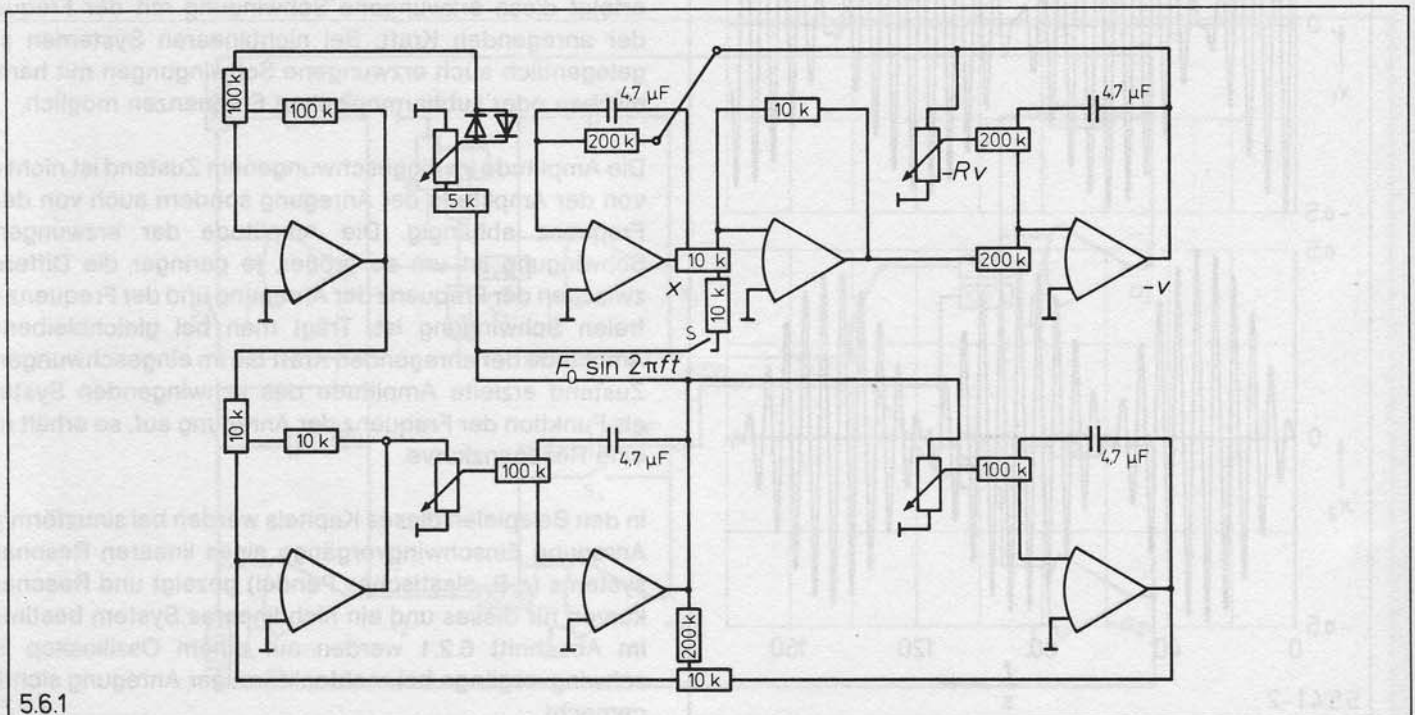
Die Kraft  $F_0 \sin 2\pi ft$  wird mit einer Kombination von vier Operationsverstärkern (links oben und unten) gebildet, die als ein amplitudenstabilisierter Sinusgenerator mit einstellbarer Frequenz geschaltet sind (vergleiche Abschnitt 2.7.6). Mit den beiden jeweils auf gleichen Faktor eingestellten Potentiometern in der unteren Hälfte des Schaltplans 5.6.1 läßt sich hier die Frequenz etwa variieren von  $f = 0,06 \text{ Hz}$  (Faktor 0,2) bis  $f = 0,33 \text{ Hz}$  (Faktor 1).

Die Amplitude  $F_0$  der anregenden Kraft läßt sich je nach Faktor am Potentiometer links oben vor den als tote Zone geschalteten Dioden begrenzen, z. B. auf  $F_0 = 0,1 \text{ N}$  (Faktor etwa 1),  $F_0 = 0,2 \text{ N}$  (Faktor etwa 0,65) oder  $F_0 = 0,3 \text{ N}$  (Faktor etwa 0,5). Ohne Begrenzung (Faktor 0) entsteht eine leicht angefachte Schwingung. Nach sehr plötzlichen Änderungen an den Potentiometern für Amplitude oder Frequenz muß einige Schwingungen gewartet werden, bis sich wieder eine stabile Amplitude einstellt.

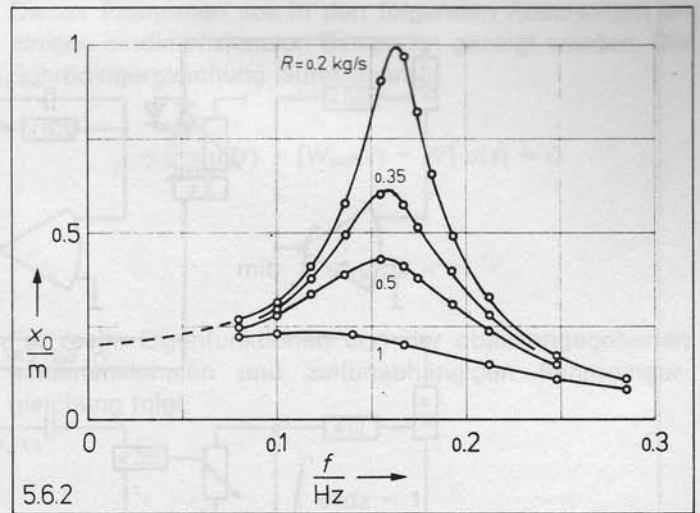
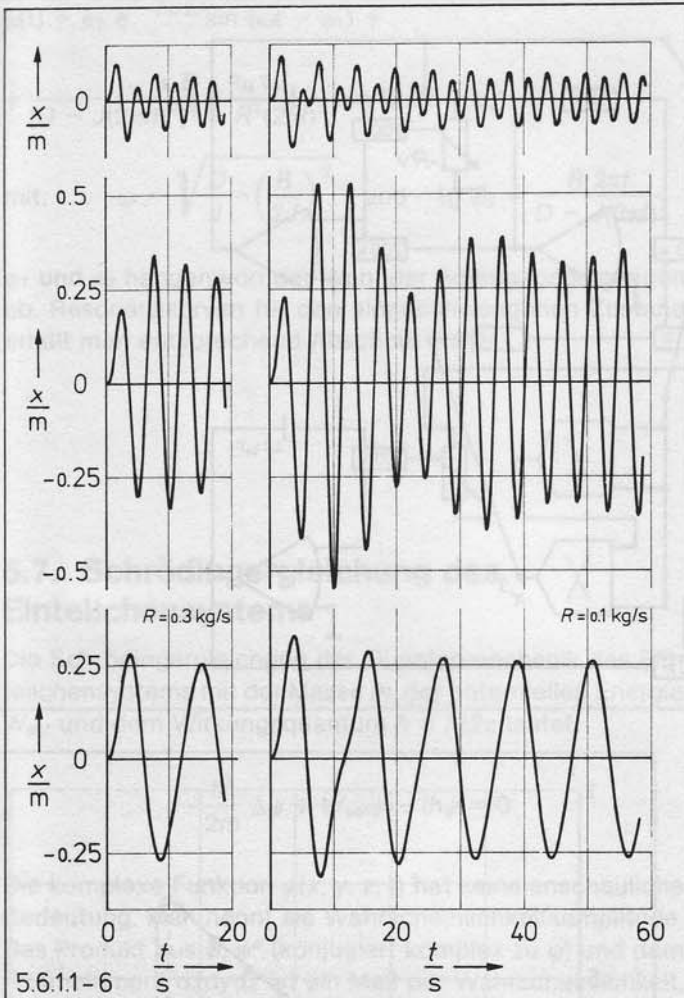
Um Einschwingvorgänge des Resonanzsystems registrieren zu können, wird zunächst bei geöffnetem Schalter  $S$  die Amplitude  $F_0$  und die Frequenz  $f$  der anregenden Kraft und die Dämpfung  $R$  des Resonanzsystems gewählt. Der zeitliche Verlauf der Schwingung  $-F_0 \sin 2\pi ft$  wird auf einem Meßinstrument verfolgt und bei gewünschter Phasenlage (z. B. negativer Nulldurchgang) die Rechnung durch Schließen des Schalters gestartet.

Die Bilder 5.6.1.1 bis 5.6.1.6 zeigen bei gleicher Anregungsamplitude  $F_0$  Ergebnisse für verschiedene Frequenzen  $f$  und Dämpfungen  $R$ . Links ist  $R = 0,3 \text{ kg/s}$  und rechts  $R = 0,1 \text{ kg/s}$ . Die Frequenz  $f$  der Anregung ist oben etwa doppelt so groß und unten halb so groß wie die Frequenz  $f_1$  der freien Schwingung. In der Mitte weichen beide Frequenzen etwa 20% voneinander ab. Der Einschwingvorgang ist eine Überlagerung von einer harmonischen Schwingung der Frequenz  $f$  der anregenden Kraft mit einer gedämpften Schwingung der Frequenz  $f_1$  der freien Schwingung (siehe Abschnitt 5.5.1):

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{m} - \left(\frac{R}{2m}\right)^2}$$



5.6.1



Die mathematische Lösung für den eingeschwungenen Zustand des elastischen Pendels lautet:

$$x(t) = \frac{F_0}{\sqrt{[D - m(2\pi f)^2]^2 + R^2(2\pi f)^2}} \sin(2\pi f t - \alpha)$$

mit  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{R \cdot 2\pi f}{D - m(2\pi f)^2}$

Mit zwei Meßinstrumenten kann auch die frequenzabhängige Phasenverschiebung  $\alpha$  beobachtet werden.

Im Abschnitt 6.4.1 werden Resonanzkurven des elastischen Pendels automatisch mit einem TY-Schreiber registriert. Der Spitzenwert der Auslenkung wird mit einem Gleichrichter gewonnen. Die sinusförmige Anregung kommt dann aus einem Funktionsgenerator (522 55), dessen Frequenz vom Analogrechner kontinuierlich mit der Zeit wachsend gesteuert wird.

### 5.6.2 Resonanzkurven eines linearen Systems

Das elastische Pendel aus Abschnitt 5.5.1 dient wieder als schwingungsfähiges Gebilde. Die anregende Kraft  $F_0 \sin 2\pi f t$  wird wie im Abschnitt 5.6.1 erzeugt. Da jetzt nicht mehr der Einschwingvorgang sondern der sich erst nach einiger Zeit einstellende eingeschwungene Zustand interessiert, bleibt der Schalter S im Schaltplan 5.6.1 dauernd geschlossen.

Es wird die Amplitude  $F_0$  der anregenden Kraft und die Dämpfung  $R$  des Resonanzsystems vorgegeben und mit einer Frequenz  $f$  weit unterhalb der Resonanzfrequenz  $f_0$  des ungedämpften Systems begonnen. Für  $f_0$  gilt entsprechend Abschnitt 5.5.1:

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{m}}$$

Im eingeschwungenen Zustand wird der Spitzenwert  $x_0$  der Auslenkung  $x(t)$  des Pendels (z. B. auf einem Meßinstrument) beobachtet und notiert. Wird dann die anregende Frequenz  $f$  geringfügig erhöht, kann man nach einem neuen Einschwingvorgang wieder  $x_0(f)$  registrieren. Trägt man diese Meßpunkte über der Frequenz  $f$  auf, so erhält man eine Resonanzkurve.

Bild 5.6.2 zeigt solche punktweise aufgenommenen Resonanzkurven des oben erwähnten elastischen Pendels für verschiedene Dämpfungen  $R$ . Die Amplitude  $F_0 = 0,2 \text{ N}$  ( $\approx 2 \text{ V}$ ) der anregenden Kraft bleibt dabei konstant.

### 5.6.3 Resonanzkurven eines nichtlinearen Systems

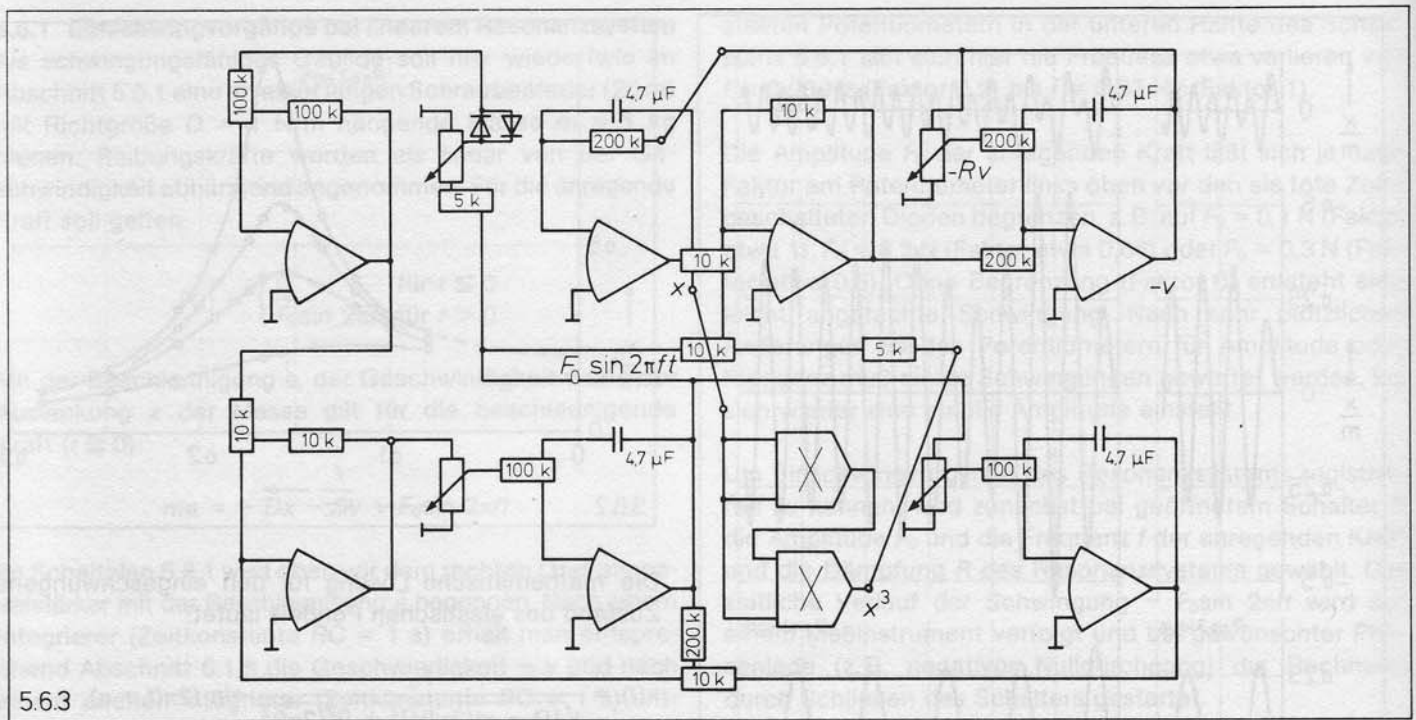
Beim elastischen Pendel der Abschnitte 5.5.1, 5.5.2, 5.6.1 und 5.6.2 wird mit einem linearen Kraftgesetz gearbeitet. Beim mathematischen Pendel des Abschnitts 5.5.3 zeigt sich bei großen Auslenkungen ein nichtlineares Verhalten. Im vorliegenden Abschnitt soll nun für die Rückstellkraft  $F_D$  gelten:

$$F_D = -D_1 x - D_3 x^3$$

mit  $D_1 = 1 \text{ N/m}$  und  $D_3 = 2 \text{ N/m}^3$ . Damit folgt mit der Beschleunigung  $a$ , der Geschwindigkeit  $v$ , der Auslenkung  $x$  der Masse  $m = 1 \text{ kg}$  und mit der äußeren Anregung  $F_0 \sin 2\pi f t$  für die beschleunigende Kraft:

$$m a = -R v - D_1 x - D_3 x^3 + F_0 \sin 2\pi f t$$

Ergänzt man den Schaltplan 5.6.1 durch die Bildung von  $x^3$  und führt dieses dem Summierer für die Beschleunigung zu, so erhält man den Schaltplan 5.6.3. Es wird vor dem Integrierer rechts oben wieder mit der Beschleunigung  $a$



5.6.3

begonnen; durch zweimalige Integration (Zeitkonstanten  $RC = 1$  s) erhält man die Auslenkung  $x$  und dann die Summe:

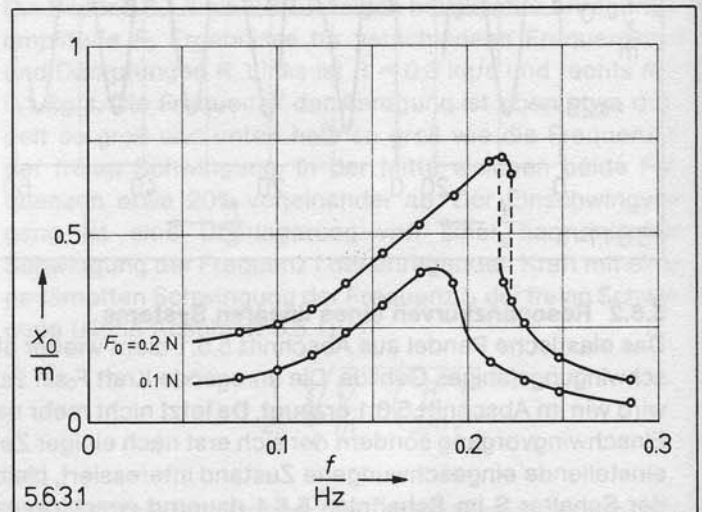
$$a = -\frac{R}{m} \dot{v} - \frac{D_1}{m} x - \frac{D_3}{m} x^3 + F_0 \sin 2\pi ft$$

Die Kraft  $F_0 \sin 2\pi ft$  wird wie im Abschnitt 5.6.1 gebildet. Die Resonanzkurven werden entsprechend Abschnitt 5.6.2 punktweise aufgenommen.

Bild 5.6.3.1 zeigt solche punktweise aufgenommenen Resonanzkurven bei fester Dämpfung  $R = 0,2$  kg/s für zwei verschiedene Anregungsamplituden  $F_0$ . Je größer die Auslenkung  $x$  ist, desto mehr macht sich der nichtlineare Einfluß bemerkbar. Die erzwungene Resonanz verschiebt sich zu höheren Frequenzen, bis die Resonanzkurve sogar überhängt. Die Frequenz der freien Schwingung nimmt ebenfalls mit der Amplitude zu, wie im Abschnitt 3.6.2 bei einer fast identischen Differentialgleichung gezeigt wird.

Hängt eine Resonanzkurve über, so existieren in einem gewissen Frequenzbereich zwei stabile Lösungen einer erzwungenen Schwingungsform unterschiedlicher Amplitude, die je nach Vorgeschichte eingenommen werden. Von kleiner Frequenz kommend wird die größere Amplitude und von großer Frequenz kommend die kleinere Amplitude angenommen. Zwischen den beiden stabilen Lösungen für eine Frequenz gibt es noch eine instabile Lösung der Differentialgleichung.

Im Abschnitt 6.4.2 werden Resonanzkurven des nichtlinearen Systems automatisch mit einem TY-Schreiber registriert. Der Spitzenwert der Auslenkung wird mit einem Gleichrichter gewonnen. Die sinusförmige Anregung kommt dann aus einem Funktionsgenerator (522 55), dessen Frequenz vom Analogrechner kontinuierlich mit der Zeit wachsend gesteuert wird.



5.6.3.1

#### 5.6.4 Erzwungene Schwingungen am Drehpendel

Eine drehbar gelagerte Masse mit Trägheitsmoment  $J$  wird hier über eine coaxial angeordnete Spiralfeder mit Winkelrichtgröße  $D$  an einen Erreger gekoppelt, der z.B. von einem Motor getrieben ebenfalls coaxial einen sinusförmigen Drehwinkel  $\alpha_1 \sin 2\pi ft$  vorgibt. Für das die Masse beschleunigende Drehmoment gilt mit der Auslenkung  $\alpha$  und einem linearen Reibungsgesetz:

$$\begin{aligned} J\ddot{\alpha} &= -R\dot{\alpha} - D(\alpha - \alpha_1 \sin 2\pi ft) \\ &= -R\dot{\alpha} - D\alpha + D\alpha_1 \sin 2\pi ft \end{aligned}$$

Diese Bewegungsgleichung ist analog der des elastischen Pendels und kann mit Schaltplan 5.6.1 gelöst werden. Die allgemeine Lösung folgt wie im Abschnitt 5.6.1 für kleine Dämpfung ( $R < \sqrt{4JD}$ ):



$$\alpha(t) = \alpha_2 e^{-Rt/2J} \sin(\omega t - \varphi_1) + \frac{\alpha_1 D}{[D - J(2\pi f)^2]^2 + R^2(2\pi f)^2} \sin(2\pi f t - \varphi_2)$$

$$\text{mit: } \omega = \sqrt{\frac{D}{J} - \left(\frac{R}{2J}\right)^2} \quad \text{und} \quad \text{tg } \varphi_2 = \frac{R \cdot 2\pi f}{D - J(2\pi f)^2}$$

$\varphi_1$  und  $\alpha_2$  hängen von der Wahl der Anfangsbedingungen ab. Resonanzkurven für den eingeschwungenen Zustand erhält man entsprechend Abschnitt 5.6.2.

## 5.7. Schrödingergleichung des Einteilchensystems

Die Schrödingergleichung der Quantenmechanik des Einteilchensystems mit der Masse  $m$ , der potentiellen Energie  $W_{\text{pot}}$  und dem Wirkungsquantum  $\hbar = h/2\pi$  lautet:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + W_{\text{pot}} \psi - i\hbar \dot{\psi} = 0$$

Die komplexe Funktion  $\psi(x, y, z, t)$  hat keine anschauliche Bedeutung. Man nennt sie Wahrscheinlichkeitsamplitude. Das Produkt aus  $\psi$ ,  $\psi^*$  (konjugiert komplex zu  $\psi$ ) und dem Raumelement  $dx dy dz$  ist ein Maß der Wahrscheinlichkeit, mit der das Teilchen sich zur Zeit  $t$  im Raumelement  $dx dy dz$  befindet. Für ein Teilchen über den ganzen Raum integriert muß folgen:

$$\iiint \psi \psi^* dx dy dz = 1$$

Sucht man nach Zuständen konstanter Energie  $W$ , so erhält man mit dem Ansatz einer periodischen Lösung

$$\psi = e^{-iWt/\hbar} u(x, y, z) \\ \text{mit } i\hbar \dot{\psi} = W\psi$$

die zeitunabhängige Schrödingergleichung zu

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta u + (W_{\text{pot}} - W)u = 0$$

Diese zeitfreie Gleichung liefert oft nur für diskrete Energiewerte  $W$  Lösungen  $u(x, y, z)$ , die im Unendlichen gut genug verschwinden, d. h. die sich normieren lassen, so daß gilt:

$$\iiint u^* u dx dy dz = 1$$

Es treten also gegebenenfalls für das Einteilchensystem nur Zustände mit diskreten Energien  $W$  auf. Solche Lösungen  $u$  nennt man Eigenfunktionen mit den Eigenwerten  $W$ .

Dieses Phänomen soll in den folgenden Abschnitten an einigen eindimensionalen Beispielen gezeigt werden. Die Schrödingergleichung lautet dann:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} u''(x) + [W_{\text{pot}}(x) - W] u(x) = 0$$

$$\text{mit } \int u^* u dx = 1$$

Für reelle Eigenfunktionen  $u(x)$  der oben angegebenen eindimensionalen und zeitunabhängigen Schrödingergleichung folgt:

$$\int u^2 dx = 1$$

Durch zweimalige Integration läßt sich in der Differentialgleichung

$$u''(x) = \frac{2m}{\hbar^2} [W_{\text{pot}}(x) - W] u(x)$$

die Funktion  $u(x)$  ersetzen durch

$$u(x) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^x u''(x) dx dx \\ = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^x \frac{2m}{\hbar^2} [W_{\text{pot}}(x) - W] u(x) dx dx$$

$$\text{mit } u(-\infty) = 0 \quad \text{und} \quad u'(-\infty) = 0$$

Die experimentelle Integration muß bei einem endlichen Wert von  $x$ , z. B. bei  $x = 0$  beginnen. Es gilt dann mit geeigneten Anfangswerten  $u(0)$  und  $u'(0)$

$$u(x) = \int_0^x \left( \int_0^x \frac{2m}{\hbar^2} [W_{\text{pot}}(x) - W] dx + u'(0) \right) dx + u(0)$$

Der Analogrechner bildet Integrale nach der Zeit und kennt zunächst nur elektrische Potentiale als Ein- und Ausgangssignale. Es ist deshalb entsprechend den Abschnitten 1.3.2 und 1.3.3 eine Amplituden- und Zeitskalierung vorzunehmen. Es gilt hier  $\beta_u = 10 \text{ V m}^{1/2}$ ,  $\beta_{u'} = 10 \text{ V m}^{3/2}$  und  $\beta_{u''} = 10 \text{ V m}^{5/2}$ . Für das Verhältnis  $l$  der Faktoren  $\beta$  vor und nach einem Integrierer (nach Ort  $x$ ) gilt  $l = \beta_{\text{vor}}/\beta_{\text{nach}} = 1 \text{ m}$ .

Die Zeit  $t$  wird ersetzt durch  $x = t/\alpha$  mit  $\alpha = t_0/x_0$ . Der interessierende Ortsbereich der Breite  $x_0$  soll dabei einer gut darstellbaren Zeitspanne  $t_0$  entsprechen. In den Beispielen der Abschnitte 5.7.1 bis 5.7.3 wird  $t_0 = 10 \text{ s}$  gewählt und die Lösungen  $u$  werden mit einem TY-Schreiber registriert. Im Programm 6.3.2 ist  $t_0 = 10 \text{ ms}$  und die Lösungen können auf einem Oszilloskop dargestellt werden.

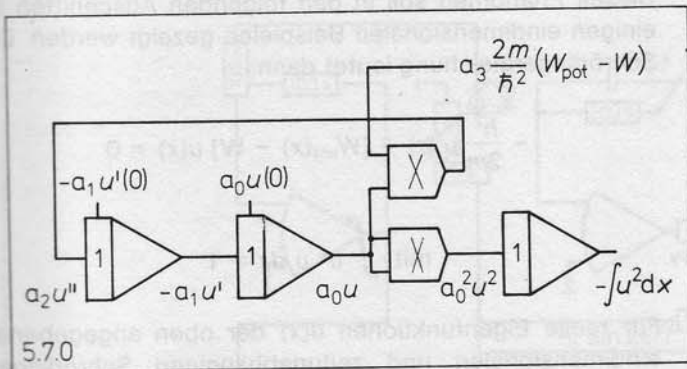


Bild 5.7.0 zeigt den Prinzipschaltplan zur Lösung der oben angegebenen Integralgleichung. Mit  $a_2 u''$  am Eingang des ersten Integrierers erscheint an dessen Ausgang (Zeitkonstante  $RC$ ):

$$-a_1 u'(x) = -\frac{\alpha l}{RC} \int_0^x a_2 u''(x) dx - a_1 u'(0)$$

mit  $a_1 = a_2 \alpha l / RC$ .

Der zweite Integrierer (Zeitkonstante  $RC$ ) liefert dann:

$$a_0 u(x) = \frac{\alpha l}{RC} \int_0^x a_1 u'(x) dx + a_0 u(0)$$

mit  $a_0 = a_1 \alpha l / RC$ .

Der rechts folgende Quadrierer ergibt  $a_0^2 u^2$  und der nachfolgende Integrierer (Zeitkonstante  $RC$ ):

$$-\int_0^x u(x)^2 dx = -\frac{\alpha l}{RC} \int_0^x a_0^2 u^2 dx \quad \text{mit } a_0^2 = RC / \alpha l.$$

Der obere Multiplizierer bildet wieder  $a_2 u''(x)$

$$a_2 u''(x) = a_0 u(x) a_3 \frac{2m}{\hbar^2} [W_{\text{pot}}(x) - W] \quad \text{mit } a_3 = a_2 / a_0.$$

Der Wert der Skalierungsfaktoren  $a_i$  hängt von der Wahl von  $\alpha$  und  $RC$  ab:

$$a_0 = \left(\frac{RC}{\alpha l}\right)^{1/2}, \quad a_1 = \left(\frac{RC}{\alpha l}\right)^{3/2}, \quad a_2 = \left(\frac{RC}{\alpha l}\right)^{5/2},$$

$$a_3 = \left(\frac{RC}{\alpha l}\right)^2$$

Mit  $RC / \alpha l = 1$  wären zwar alle  $a_i = 1$ . Die daraus mit  $t_0 = 10$  s und  $RC = 1$  s entstehenden Folgerungen (Ort  $x$  in der Größenordnung von 10 m und Energie  $W$  für ein Elektron in der Größenordnung von  $10^{-39}$  J) sind jedoch wirklichkeitsfremd. In den Beispielen der Abschnitte 5.7.1 bis 5.7.3 wird deshalb  $RC / \alpha l = 10^{-11}$  gewählt.

Die Anfangswerte  $u(0)$  und  $u'(0)$  müssen geeignet vorgegeben werden. Dazu wird die potentielle Energie  $W_{\text{pot}}(x)$  für  $x \leq 0$  konstant und größer  $W$  angenommen. Es gilt dann für  $x \leq 0$  als Lösung:

$$u(x) = u(0) e^{\lambda x}$$

$$u'(x) = \lambda u(x)$$

$$u''(x) = \lambda^2 u(x)$$

mit 
$$\lambda = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} [W_{\text{pot}} - W]}$$

Die Anfangswerte  $u(0)$  und damit  $u'(0) = \lambda u(0)$  werden experimentell gesucht und so gewählt, das gilt:

$$\int u(x)^2 dx = 1$$

Zur Einstellung der Anfangswerte und Steuerung des Programmablaufs werden insgesamt vier (im Abschnitt 5.7.1) oder fünf Schalter (in Abschnitten 5.7.2 und 5.7.3) benötigt. Steht der programmierbare Schalter (576 07) nicht zur Verfügung, so sind zusätzlich zum Satz Steckelemente (576 03) noch ein oder zwei Kippschalter (579 13) erforderlich.

### 5.7.1 Potentialtopf endlicher Tiefe

Zur Lösung der eindimensionalen zeitunabhängigen Schrödingergleichung eines Einteilchensystems mit stückweise konstantem Potential  $W_{\text{pot}}(x)$  dient das Programm im Schaltplan 5.7.1. Gegenüber Bild 5.7.0 ist die Erzeugung von  $W_{\text{pot}} - W$  zugefügt. Am Potentiometer  $P_4$  wird die Energie  $a_4 W$  und am Potentiometer  $P_3$  das Potential  $-a_4 W_{\text{pot}}(x)$  mit  $x = t / \alpha$  und geeignetem  $\alpha$  vorgegeben. Der nachfolgende Operationsverstärker bildet die Summe multipliziert mit  $2m / \hbar^2$ :

$$a_3 \frac{2m}{\hbar^2} [W_{\text{pot}}(x) - W]$$

Für die Skalierungsfaktoren  $a_3$  und  $a_4$  gilt:

$$a_4 = a_3 \frac{2m J^2 s^2}{\hbar^2 \text{ kg}}$$

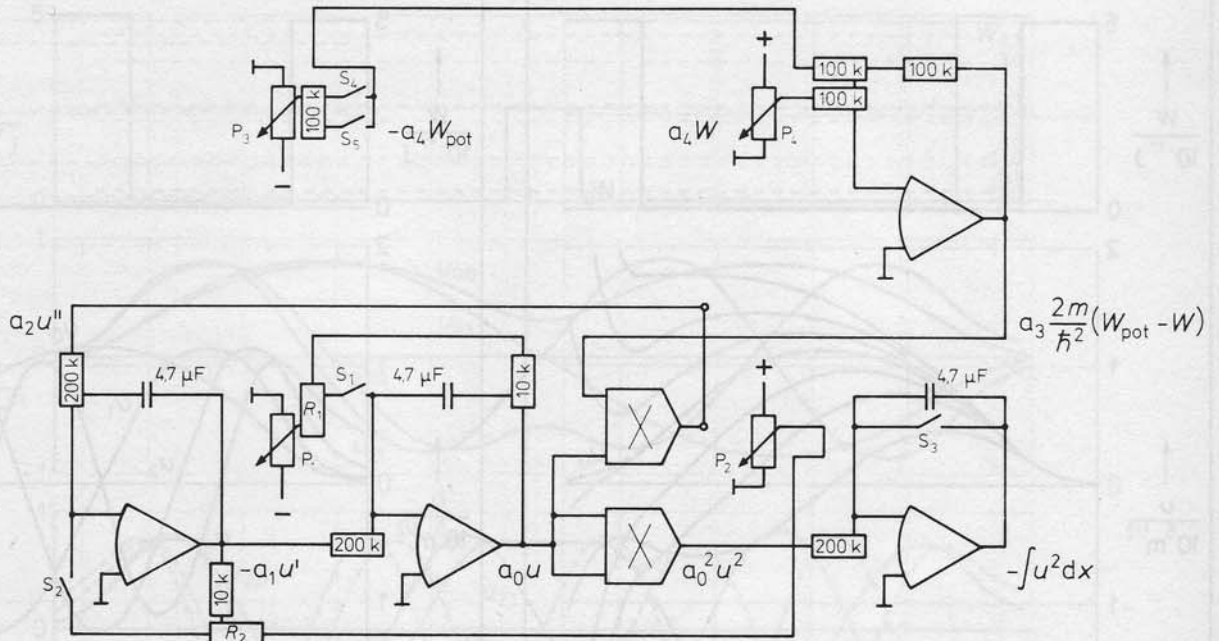
Die eindimensionale zeitunabhängige Schrödingergleichung soll nun für ein Teilchen der Masse  $m = 10^{-30}$  kg (Elektron) im Potential

$$W_{\text{pot}}(x) = \begin{cases} 5 \cdot 10^{-17} \text{ J} & \text{für } x < 0,2 \cdot 10^{-10} \text{ m} \\ 0 & \text{für } 0,2 \cdot 10^{-10} \text{ m} < x < 1,2 \cdot 10^{-10} \text{ m} \\ 5 \cdot 10^{-17} \text{ J} & \text{für } x > 1,2 \cdot 10^{-10} \text{ m} \end{cases}$$

gelöst werden. Die Breite  $x_0 = 10^{-10}$  m (doppelter Bohrscher Radius) des Potentialtopfs soll dabei einer Zeitspanne  $t_0 = 10$  s entsprechen, d. h. es gilt:

$$\alpha = t_0 / x_0 = 10^{11} \text{ s/m}$$

5.7.1



Mit den Zeitkonstanten  $RC = 1$  s der Integrierer folgt dann entsprechend Vorbemerkungen zu Kapitel 5.7 für die Skalierungsfaktoren:

$$a_0 = 10^{-5.5}, a_1 = 10^{-16.5}, a_2 = 10^{-27.5}, a_3 = 10^{-22}.$$

Für den Skalierungsfaktor  $a_4$  folgt mit dem Wirkungsquantum  $\hbar = h/2\pi = 10^{-34}$  Js ferner:  $a_4 = 2 \cdot 10^{16}$ .

Mit  $x = t/\alpha$  wird aus dem oben angegebenen Potential  $W_{\text{pot}}(x)$  auf dem Analogrechner eine Funktion der Zeit:

$$a_4 W_{\text{pot}}(t) = \begin{cases} 1 \text{ J } (\cong 10 \text{ V}) & \text{für } t < 2 \text{ s} \\ 0 & \text{für } 2 \text{ s} < t < 12 \text{ s} \\ 1 \text{ J} & \text{für } t > 12 \text{ s} \end{cases}$$

Der Rechenablauf wird also wie folgt gesteuert. Zur Zeit  $t = 0$  werden die Schalter  $S_1, S_2$  und  $S_3$  geöffnet (Energiewert  $W$  und Anfangswerte vorher einstellen). Genau 2 s später wird dann Schalter  $S_4$  geöffnet ( $W_{\text{pot}} = 0$ ) und zur Zeit  $t = 12$  s wieder geschlossen. Schalter  $S_5$  ist immer geöffnet; er wird erst im Abschnitt 5.7.2 benötigt.

Nur solche Funktionen  $u$ , die für große  $x$  (bzw.  $t$ ) verschwinden, sind physikalisch sinnvolle Lösungen, nur sie lassen sich normieren. Die Anfangswerte  $u(0)$  und  $u'(0) = \lambda u(0)$  mit  $\lambda = \sqrt{2m[W_{\text{pot}}(0) - W]/\hbar^2}$  (siehe Vorbemerkung zu Kapitel 5.7) müssen dabei so gewählt werden, daß gilt:

$$\int u^2 dx = 1$$

Am Ausgang des Operationsverstärkers rechts oben im Schaltplan 5.7.1 steht zwar  $a_3 \lambda^2$  zur Verfügung, da jedoch der Radizierer des Analogrechners bereits belegt ist, kann  $u'(0)$  nicht automatisch aus  $u(0)$  berechnet werden. Der

Faktor  $\sqrt{a_3} \lambda$  wird vielmehr für jedes  $W$  durch ein geeignetes Widerstandsverhältnis  $R_1/R_2$  gewählt. Mit gleichen Faktoren  $0 < \gamma \leq 1$  an den beiden Potentiometern  $P_1$  und  $P_2$  können dann die Anfangswerte geeignet eingestellt werden:

$$a_0 u(0) = \frac{10 \text{ k}\Omega}{R_1} \gamma$$

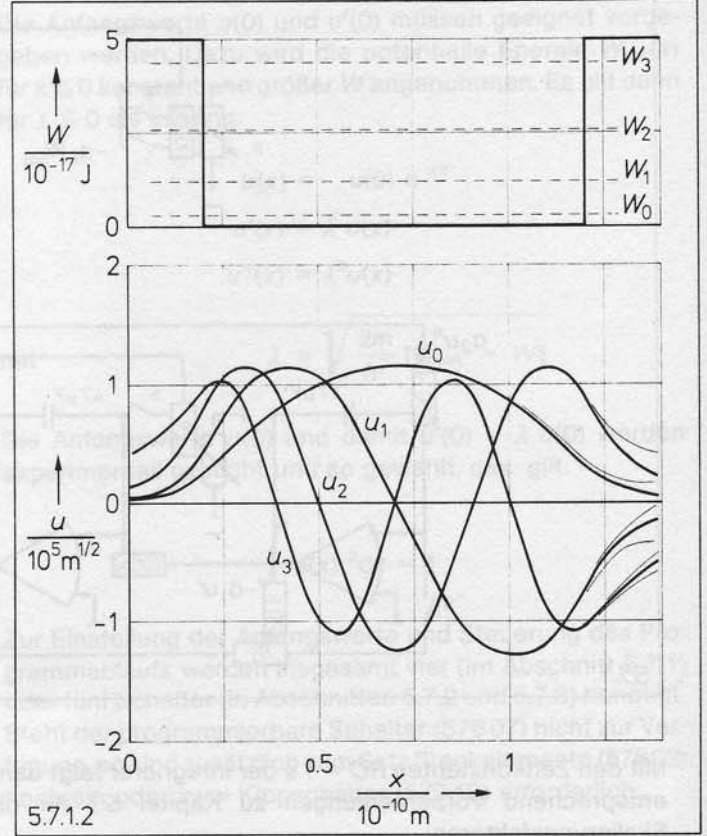
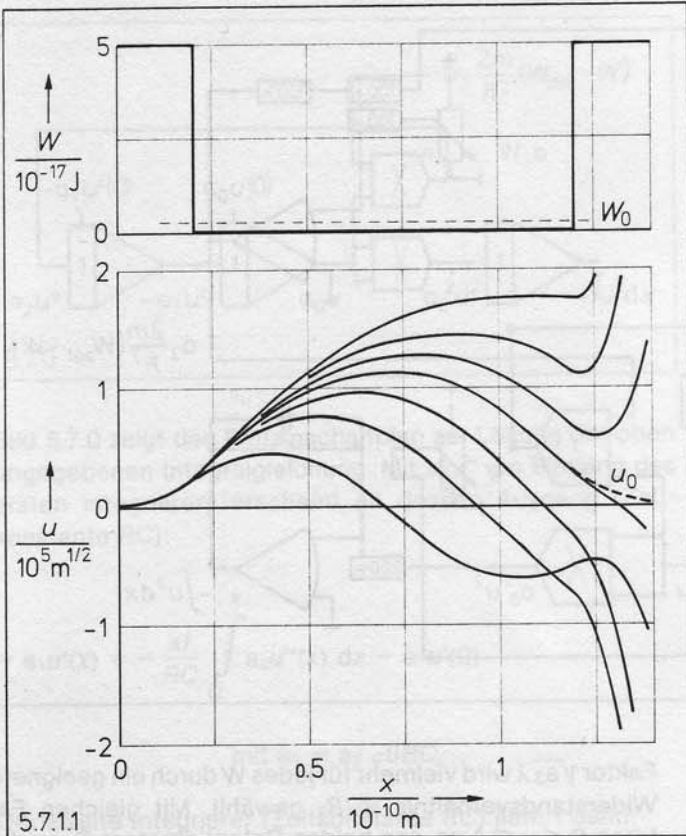
$$a_1 u'(0) = a_0 \sqrt{a_3} \lambda u(0) = \frac{10 \text{ k}\Omega}{R_2} \gamma$$

Um die Suche nach dem zur Normierung notwendigen Faktor  $\gamma$  zu erleichtern, ist auch er größenordnungsmäßig zusammen mit den Widerständen  $R_1$  und  $R_2$  in der folgenden Tabelle für einige Energien  $W$  und den dazu gehörenden Spannungen  $U$  am Potentiometer  $P_4$  angegeben.

$W \cdot 10^{17}$	$U_{P_4}$	$\sqrt{a_3} \lambda$	$R_1$	$R_2$	$\gamma$
0,25 J	0,5 V	0,97 m <sup>-1</sup>	200 kΩ	205 kΩ	0,2
1,15 J	2,3 V	0,88 m <sup>-1</sup>	200 kΩ	230 kΩ	0,5
2,55 J	5,1 V	0,70 m <sup>-1</sup>	100 kΩ	140 kΩ	0,55
4,35 J	8,7 V	0,36 m <sup>-1</sup>	50 kΩ	140 kΩ	0,7

Bild 5.7.1.1 zeigt oben das Potential  $W_{\text{pot}}(x)$  und unten bei festem  $R_1 = 200 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 205 \text{ k}\Omega$  und festem  $\gamma$  Lösungen  $u(x)$  mit Energien etwa zwischen  $W = 10^{-18} \text{ J}$  (obere Kurve) und  $W = 10^{-17} \text{ J}$  (untere Kurve). Von diesen Lösungen geht jedoch nur eine für große  $x$  gegen Null. Das ist die Eigenfunktion  $u_0(x)$  mit dem Eigenwert etwa bei  $W_0 = 0,25 \cdot 10^{-17} \text{ J}$ . Der genaue Wert hängt noch von der Güte des Abgleichs von Multiplizierer und Operationsverstärker ab.

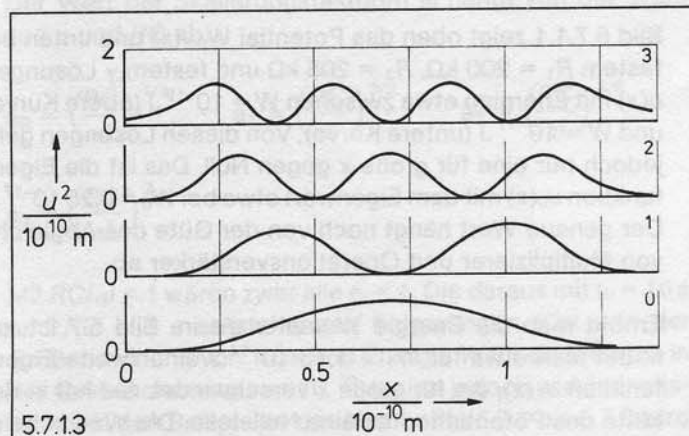
Erhöht man die Energie  $W$  weiter als im Bild 5.7.1.1, so findet man etwa für  $W_1 = 1,15 \cdot 10^{-17} \text{ J}$  eine zweite Eigenfunktion  $u_1(x)$ , die für große  $x$  verschwindet. Sie hat in der Mitte des Potentialtopfes eine Nullstelle. Die Wahrschein-



lichkeit dafür, daß sich das Teilchen mit der Energie  $W_1$  in der Mitte aufhält, ist somit gleich Null.

Bild 5.7.1.2 zeigt außer den Eigenfunktionen  $u_0(x)$  und  $u_1(x)$  für das angenommene Potential noch zwei weitere normierbare Lösungen  $u_2(x)$  und  $u_3(x)$ . Die zugehörigen Eigenwerte liegen etwa bei  $W_2 = 2,55 \cdot 10^{-17} \text{ J}$  und  $W_3 = 4,35 \cdot 10^{-17} \text{ J}$ .

Der Ort des Elektrons mit der Energie  $W_n$  ist nicht definiert; es läßt sich lediglich eine Wahrscheinlichkeit angeben, mit der es sich am Ort  $x$  aufhält. Bild 5.7.1.3 zeigt dazu  $u^2$  als Funktion von  $x$  für die vier Eigenwerte aus Bild 5.7.1.2. Es ergibt sich mit höheren Eigenwerten eine zunehmende Zahl der Nullstellen und eine zunehmende Wahrscheinlichkeit, daß das Elektron außerhalb des Potentialtopfes zu finden ist.



## 5.7.2 Gekoppelte Potentiale

Fragt man nach Eigenfunktionen und Eigenwerten eines Elektrons in zwei miteinander gekoppelten Potentialen, so braucht man z. B. im Schaltplan 5.7.1 wieder mit  $\alpha = t/x = 10^{11} \text{ s/m}$  für das Potential nur folgende Zeitfunktion zu wählen:

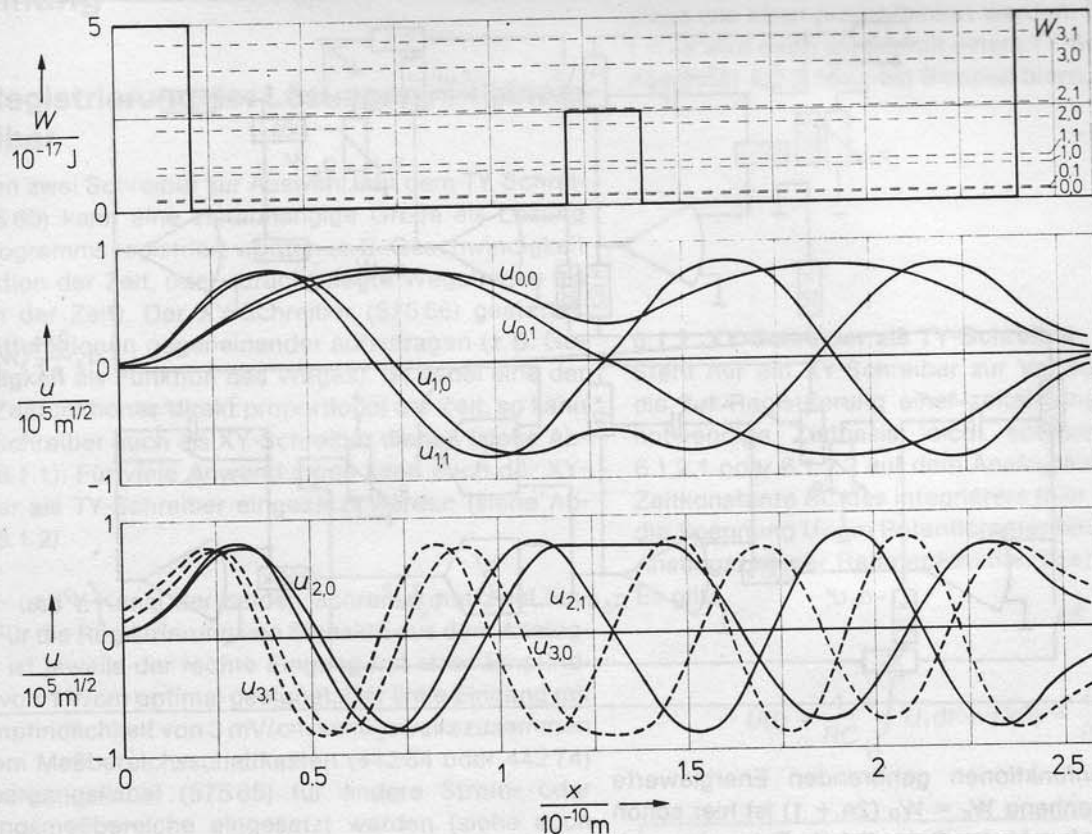
$$a_4 W_{\text{pot}}(t) = \begin{cases} 1 \text{ J} (\cong 10 \text{ V}) & \text{für } t < 2 \text{ s} \\ 0 & \text{für } 2 \text{ s} < t < 12 \text{ s} \\ 0,5 \text{ J} & \text{für } 12 \text{ s} < t < 14 \text{ s} \\ 0 & \text{für } 14 \text{ s} < t < 24 \text{ s} \\ 1 \text{ J} & \text{für } t > 24 \text{ s} \end{cases}$$

Der Rechenablauf wird wie folgt gesteuert. Zur Zeit  $t = 0$  werden die Schalter  $S_1, S_2$  und  $S_3$  geöffnet (Energiewert  $W$  und Anfangswerte vorher einstellen). Genau 2 s später wird Schalter  $S_4$  geöffnet ( $W_{\text{pot}} = 0$ ). Zur Zeit  $t = 12 \text{ s}$  wird Schalter  $S_5$  geschlossen (Potentialwall) und 2 s später wieder geöffnet ( $W_{\text{pot}} = 0$ ). Zur Zeit  $t = 24 \text{ s}$  wird schließlich wieder Schalter  $S_4$  geschlossen. Bild 5.7.2 zeigt oben das sich so ergebende Potential  $W_{\text{pot}}(x)$ .

Die folgende Tabelle erleichtert wie im Abschnitt 5.7.1 die passende Wahl der Anfangswerte:

$$a_0 u(0) = \frac{10 \text{ k}\Omega}{R_1} \gamma \quad \text{und} \quad a_1 u'(0) = \frac{10 \text{ k}\Omega}{R_2} \gamma$$

Es werden wieder die Widerstände  $R_1$  und  $R_2$  und größenordnungsmäßig der zur Normierung notwendige Faktor  $\gamma$  für beide Potentiometer  $P_1$  und  $P_2$  bei einigen Energien angegeben.



5.7.2

$W \cdot 10^{17}$	$U_{P4}$	$\sqrt{a_3} \lambda$	$R_1$	$R_2$	$\gamma$
0,25 J	0,5 V	$0,97 \text{ m}^{-1}$	200 k $\Omega$	205 k $\Omega$	0,2
0,3 J					
0,95 J					
1,15 J	2,3 V	$0,88 \text{ m}^{-1}$	200 k $\Omega$	230 k $\Omega$	0,35
2,15 J	4,3 V	$0,75 \text{ m}^{-1}$	100 k $\Omega$	130 k $\Omega$	0,3
2,6 J	5,2 V	$0,69 \text{ m}^{-1}$	100 k $\Omega$	140 k $\Omega$	0,4
3,75 J	7,5 V	$0,50 \text{ m}^{-1}$	50 k $\Omega$	100 k $\Omega$	0,4
4,45 J	8,9 V	$0,33 \text{ m}^{-1}$	50 k $\Omega$	150 k $\Omega$	0,55

Bild 5.7.2 zeigt in der Mitte die ersten vier und unten weitere vier Eigenfunktionen  $u(x)$ . Die Lösungen aus Abschnitt 5.7.1 spalten auf. Es gibt jetzt jeweils eine zur Mitte der beiden Potentiale symmetrische und eine unsymmetrische Lösung. Solange der Eigenwert  $W$  noch kleiner ist als der Wall zwischen den beiden Potentialen, ist die Aufspaltung des Eigenwertes klein.

Abschnitt 6.3.2 zeigt den Einsatz des programmierbaren Schalters (576 07). Nach Änderung der Zeitkonstanten  $RC$  der Integrierer werden die Lösungen dort auf einem Oszilloskop dargestellt.

### 5.7.3 Harmonischer Oszillator

Ein Einteilchensystem mit parabolischem Potentialtopf nennt man einen harmonischen Oszillator. Die Eigenwerte liegen äquidistant und es gilt (falls in der Mitte  $W_{\text{pot}} = 0$ ):

$$W_n = W_0 (2n + 1) \quad \text{für } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Im Schaltplan 5.7.3 wird die Parabel durch zwei geeignet beschaltete Integrierer erzeugt (vergleiche Abschnitt 3.3.1). Es gilt wieder  $\alpha = t/x = 10^{11} \text{ s/m}$ . Für  $x < 0,08 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ , bzw.  $t < 0,8 \text{ s}$  soll  $a_4 W_{\text{pot}} = 1 \text{ J}$  sein. Das wird mit geschlossenen Schaltern  $S_4$  und  $S_5$  erreicht. Wählt man am Potentiometer  $P_3$  eine Spannung  $U_3 = 3,0 \text{ V}$  und öffnet die Schalter  $S_4$  und  $S_5$ , so erhält man oben am Ausgang des mittleren Operationsverstärkers eine Parabel, die im Minimum etwa Null erreicht. Die Spannung  $U_3$  ist solange zu korrigieren, bis im Minimum genau Null erreicht wird. Damit ist  $a_4 W_{\text{pot}}(x)$  vorgegeben.

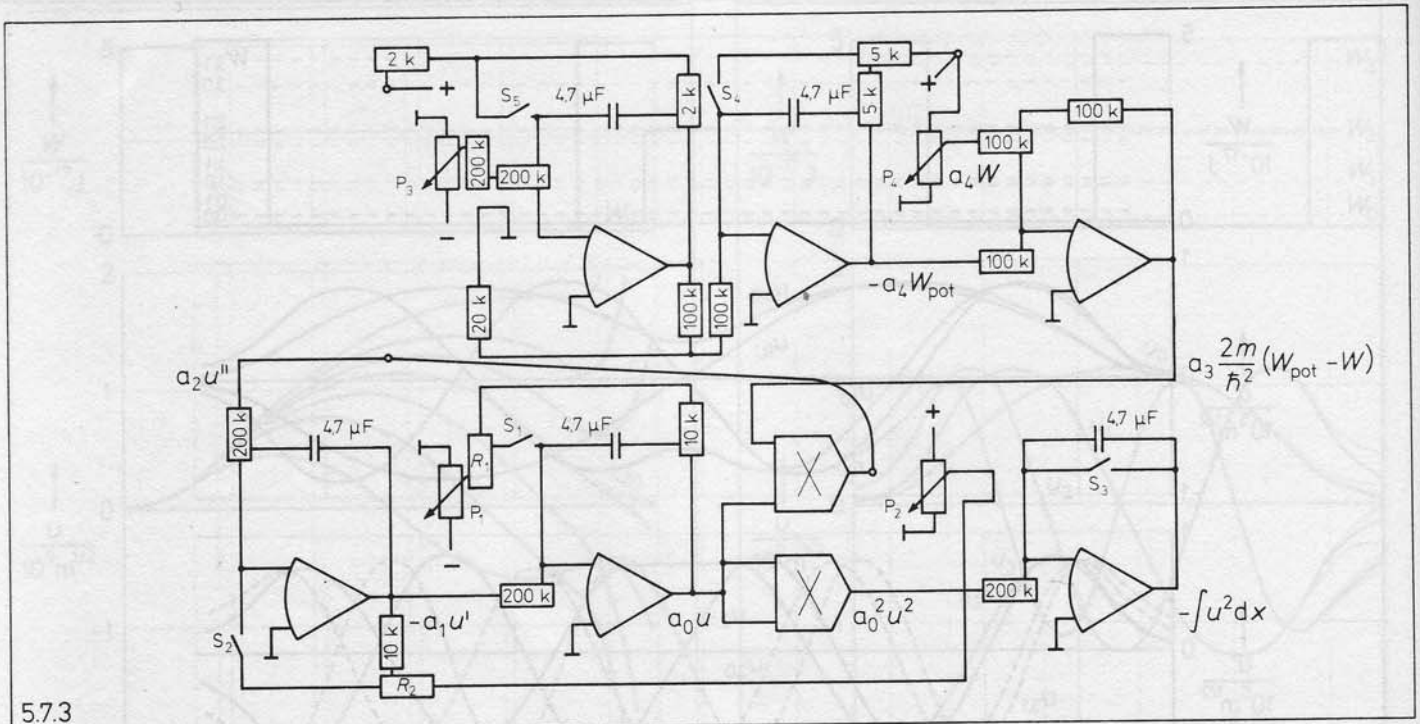
Zur Wahl der Anfangswerte dient wieder die folgende Tabelle für die Widerstände  $R_1$ ,  $R_2$  und den zur Normierung notwendigen Faktor  $\gamma$  an den beiden Potentiometern  $P_1$  und  $P_2$  (siehe Abschnitt 5.7.1).

$W \cdot 10^{17}$	$U_{P4}$	$\sqrt{a_3} \lambda$	$R_1$	$R_2$	$\gamma$
0,70 J	1,4 V	$0,93 \text{ m}^{-1}$	200 k $\Omega$	220 k $\Omega$	0,3
2,10 J	4,2 V	$0,76 \text{ m}^{-1}$	100 k $\Omega$	130 k $\Omega$	0,5
3,55 J	7,1 V	$0,54 \text{ m}^{-1}$	50 k $\Omega$	90 k $\Omega$	0,65
4,85 J	9,7 V	$0,17 \text{ m}^{-1}$	10 k $\Omega$	60 k $\Omega$	0,35

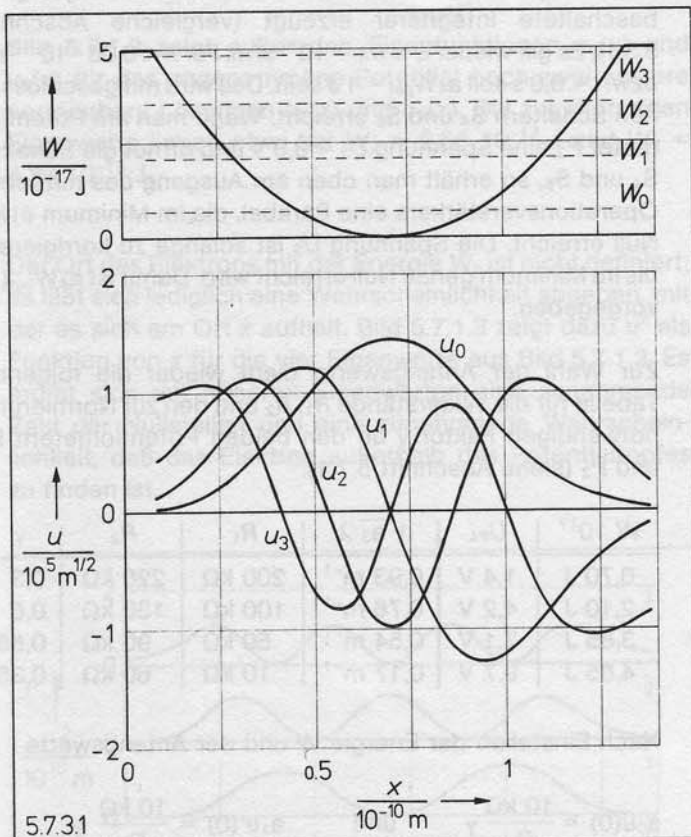
Nach Einstellen der Energie  $W$  und der Anfangswerte

$$a_0 u(0) = \frac{10 \text{ k}\Omega}{R_1} \gamma \quad \text{und} \quad a_1 u'(0) = \frac{10 \text{ k}\Omega}{R_2} \gamma$$

werden zu Beginn (hier  $x = 0,08 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ ) der Rechnung alle Schalter gleichzeitig geöffnet. Bild 5.7.3.1 zeigt oben das Potential  $W_{\text{pot}}(x)$  und die vier zu den unten wieder-



gegebenen Eigenfunktionen gehörenden Energiewerte  $W_n$ . Der Zusammenhang  $W_n = W_0 (2n + 1)$  ist hier schon recht gut erfüllt, obwohl das Potential als Folge des endlichen Rechenbereichs der Operationsverstärker für kleine  $x$  und für große  $x$  begrenzt ist.



## 6. Anhang

### 6.1. Registrierung der Lösungen mit einem Schreiber

Es stehen zwei Schreiber zur Auswahl. Mit dem TY-Schreiber (575 60) kann eine zeitabhängige Größe als Lösung eines Programms registriert werden (z. B. Geschwindigkeit als Funktion der Zeit, oder zurückgelegte Wegstrecke als Funktion der Zeit). Der XY-Schreiber (575 66) gestattet, zwei Zeitfunktionen gegeneinander aufzutragen (z. B. Geschwindigkeit als Funktion des Weges). Ist dabei eine der beiden Zeitfunktionen direkt proportional der Zeit, so kann der TY-Schreiber auch als XY-Schreiber dienen (siehe Abschnitt 6.1.1). Für viele Anwendungen kann auch der XY-Schreiber als TY-Schreiber eingesetzt werden (siehe Abschnitt 6.1.2).

Jeder X- und Y-Kanal der beiden Schreiber hat zwei Eingänge. Für die Registrierung von Signalen aus dem Analogrechner ist jeweils der rechte Eingang mit einer Empfindlichkeit von 1 V/cm optimal geeignet. Der linke Eingang mit einer Empfindlichkeit von 3 mV/cm kann jeweils zusammen mit einem Meßbereichsschaltkasten (442 84 oder 442 74) und Übergangskabel (575 65) für andere Strom- oder Spannungsmeßbereiche eingesetzt werden (siehe auch Gebrauchsanweisungen zu den Schreibern 575 60 und 575 66).

Beim TY-Schreiber stehen für den Papiervorschub 12 Geschwindigkeiten von 2,5 cm/h bis 20 cm/min zur Verfügung. Im allgemeinen wird man bei der Registrierung von Lösungen des Analogrechners mit einem Papiervorschub von 20 cm/min arbeiten. Die so gewonnenen Aufzeichnungen sind in den Bildern der Programmbeispiele meist im Maßstab 1 : 2 wiedergegeben.

#### 6.1.1 TY-Schreiber als XY-Schreiber

Bei vielen mathematischen oder physikalischen Problemen will man eine abhängige Veränderliche  $y$  nicht als Funktion der Zeit sondern als Funktion einer anderen mathematischen oder physikalischen Größe  $x$  (z. B. einer Ortskoordinate) berechnen und auftragen. Ist eine Gleichung zur Bestimmung von  $y(x)$  gegeben, so kann man entsprechend Abschnitt 1.3.3 eine Zeitskalierung mit  $x = t/\alpha$  vornehmen. Auf dem Schreiber wird dann  $y(t)$  registriert mit  $t = \alpha x$ . Zahlreiche Beispiele hierzu finden sich in den Kapiteln 3.2 bis 3.7 und in Kapitel 5.7.

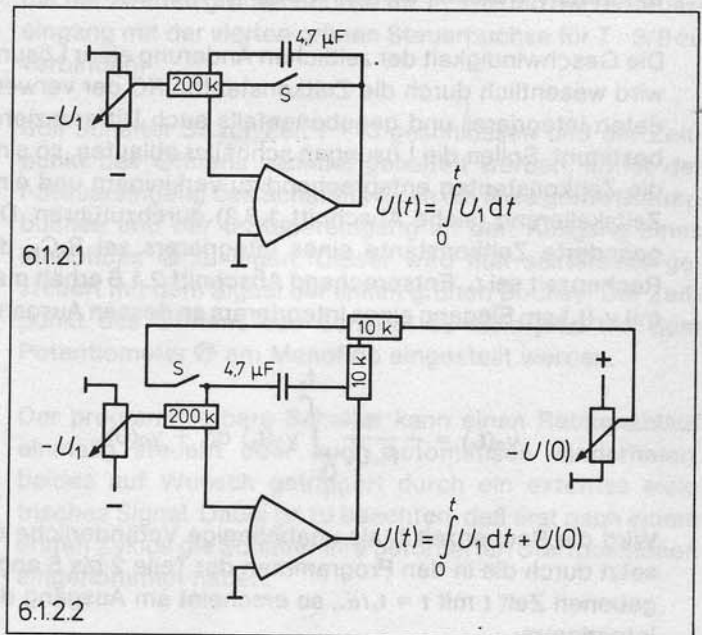
Ist dagegen  $y(x)$  in einer Parameterdarstellung gegeben, z. B.  $y(t)$  und  $x(t)$ , so können entweder beide Zeitfunktionen programmiert und dann mit einem XY-Schreiber gegeneinander aufgetragen werden. Beispiele hierzu sind in den Abschnitten 5.2.4 bis 5.2.6 enthalten. Hat eine der beiden Größen einen einfachen funktionalen Zusammenhang mit der Zeit, z. B.  $x = vt$ , so kann aus der Parameterdarstellung

leicht eine Bestimmungsgleichung für  $y(x)$  berechnet und diese wie oben programmiert werden. Die Lösung  $y(t)$  mit  $t = \alpha x$  wird dann wieder mit einem TY-Schreiber registriert. Abschnitt 5.2.3 zeigt ein Beispiel hierzu.

#### 6.1.2 XY-Schreiber als TY-Schreiber

Steht nur ein XY-Schreiber zur Verfügung, so kann man die zur Registrierung einer zeitabhängigen Funktion  $y(t)$  notwendige Zeitbasis leicht entsprechend Schaltplan 6.1.2.1 oder 6.1.2.2 auf dem Analogrechner aufbauen. Die Zeitkonstante  $RC$  des Integrierers (hier etwa  $RC = 1$  s) und die Spannung  $U_1$  am Potentiometer bestimmen jeweils die Anstiegszeit der Rampenfunktion (siehe Abschnitt 2.1.7). Es gilt:

$$U(t) = \frac{1}{RC} \int_0^t U_1 dt + U(0) = \frac{U_1}{RC} t + U(0)$$



Zu Beginn wird der Schalter  $S$  gegebenenfalls gleichzeitig mit dem Start des ganzen Programms geöffnet. Mit Schaltplan 6.1.2.1 erhält man einen Hub von insgesamt 10 V ( $\cong 10$  cm auf der X-Koordinate des Schreibers) in z. B. 10 s (für  $U_1 = 1$  V). Wird bei der Registrierung ein größerer Hub, z. B. 20 V ( $\cong 20$  cm) verlangt, so muß im Schaltplan 6.1.2.2 als Anfangswert  $U(0) = -10$  V vorgegeben und am Schreiber der Nullpunkt für  $x$  entsprechend in die Mitte verschoben werden.

Will man eine als Zeitfunktion entstehende Lösung einer Differentialgleichung für verschiedene Anfangswerte nacheinander mehrmals registrieren, so kann man sie mit einem XY-Schreiber immer über derselben Zeitbasis auftragen.

Man braucht im Schaltbild 6.1.2.1 bzw. 6.1.2.2 den Schalter S nach dem ersten Lauf nur wieder zu schließen, die gewünschten neuen Anfangswerte im Schaltplan der Differentialgleichung einzustellen und das ganze Programm neu zu starten. Eine zusätzliche Verschiebung des Nullpunktes für  $y$  am XY-Schreiber wird in manchen Fällen von Vorteil sein. Steht der programmierbare Schalter (57607) zur Verfügung, kann die Wiederholung der Registrierung sogar automatisch erfolgen (siehe Abschnitt 6.3.1).

## 6.2. Registrierung der Lösungen auf einem Oszilloskop

Die Programme der Teile 2 bis 5 und des Kapitels 6.6 sind so gewählt, daß zeitabhängige Lösungen sich so langsam ändern, daß sie mit einem Meßinstrument oder Schreiber registriert werden können. Soll dagegen eine Lösung auf einem Oszilloskop dargestellt werden, muß sie im allgemeinen schneller ablaufen und dann auch automatisch wiederholt werden, um ein stehendes Bild zu erhalten.

Die Geschwindigkeit der zeitlichen Änderung einer Lösung wird wesentlich durch die Zeitkonstanten  $RC$  der verwendeten Integrierer und gegebenenfalls auch Differenzierer bestimmt. Sollen die Lösungen schneller ablaufen, so sind die Zeitkonstanten entsprechend zu verkleinern und eine Zeitskalierung (siehe Abschnitt 1.3.3) durchzuführen. Die geänderte Zeitkonstante eines Integrierers sei  $R_x C_x$ , die Rechenzeit sei  $t_x$ . Entsprechend Abschnitt 2.1.6 erhält man mit  $y_1(t_x)$  am Eingang eines Integrierers an dessen Ausgang:

$$y_0(t_x) = -\frac{1}{R_x C_x} \int_0^{t_x} y_1(t_x) dt_x + y_0(0)$$

Wird die Rechenzeit  $t_x$  als unabhängige Veränderliche ersetzt durch die in den Programmen der Teile 2 bis 5 angegebene Zeit  $t$  mit  $t = t_x/\alpha_x$ , so erscheint am Ausgang des Integrierers:

$$y_0(t) = -\frac{\alpha_x}{R_x C_x} \int_0^t y_1(t) dt + y_0(0)$$

Mit der Zeitkonstante  $RC$  eines Integrierers gilt jedoch in den langsam laufenden Programmen:

$$y_0(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t y_1(t) dt + y_0(0)$$

Somit folgt für die neue Zeitkonstante:  $R_x C_x = \alpha_x RC$ .

Mit  $y_1(t_x)$  am Eingang eines Differenzierers erhält man entsprechend Abschnitt 2.1.8 an dessen Ausgang:

$$y_0(t_x) = -R_x C_x \frac{dy_1(t_x)}{dt_x}$$

Wird wieder  $t_x$  ersetzt durch  $t = t_x/\alpha_x$ , so folgt:

$$y_0(t) = -\frac{R_x C_x}{\alpha_x} \frac{dy_1(t)}{dt}$$

Auch hier folgt:  $R_x C_x = \alpha_x RC$ .

Alle Zeitkonstanten eines Programms sind also mit  $\alpha_x$  zu multiplizieren, damit die erforderliche Zeitskalierung erfüllt wird. Der Skalierungsfaktor  $\alpha_x$  wird so gewählt, daß der interessierende Bereich der Zeit  $t$  in den Programmen der Teile 2 bis 5 oder des Kapitels 6.6 (dort meist 10 s bis 30 s) einer auf einem Oszilloskop gut darstellbaren Zeit  $t_x$  entspricht (z. B. 10 ms bis 30 ms, d. h.  $\alpha_x = 10^{-3}$ ). Im Ergänzungssatz Steckelemente (57604) sind kleine Kondensatoren und Widerstände (siehe Abschnitt 1.1.2) enthalten, um Zeitkonstanten etwa von 0,02 ms bis 44 ms realisieren zu können.

Die periodische Wiederholung der Rechnung wird im allgemeinen vom programmierbaren Schalter (57607) gesteuert (siehe Abschnitt 6.3.1). Mit ihm lassen sich nach einem Rechenablauf die Anfangswerte wieder herstellen, das Oszilloskop triggern und das Programm erneut starten.

Das folgende Programm zeigt, daß man auch auf den programmierbaren Schalter verzichten kann, wenn Lösungen einer Differentialgleichung mit einem sich periodisch änderndem Parameter gesucht werden.

### 6.2.1 Beispiel: Einschwingvorgänge bei einem linearen Resonanzsystem

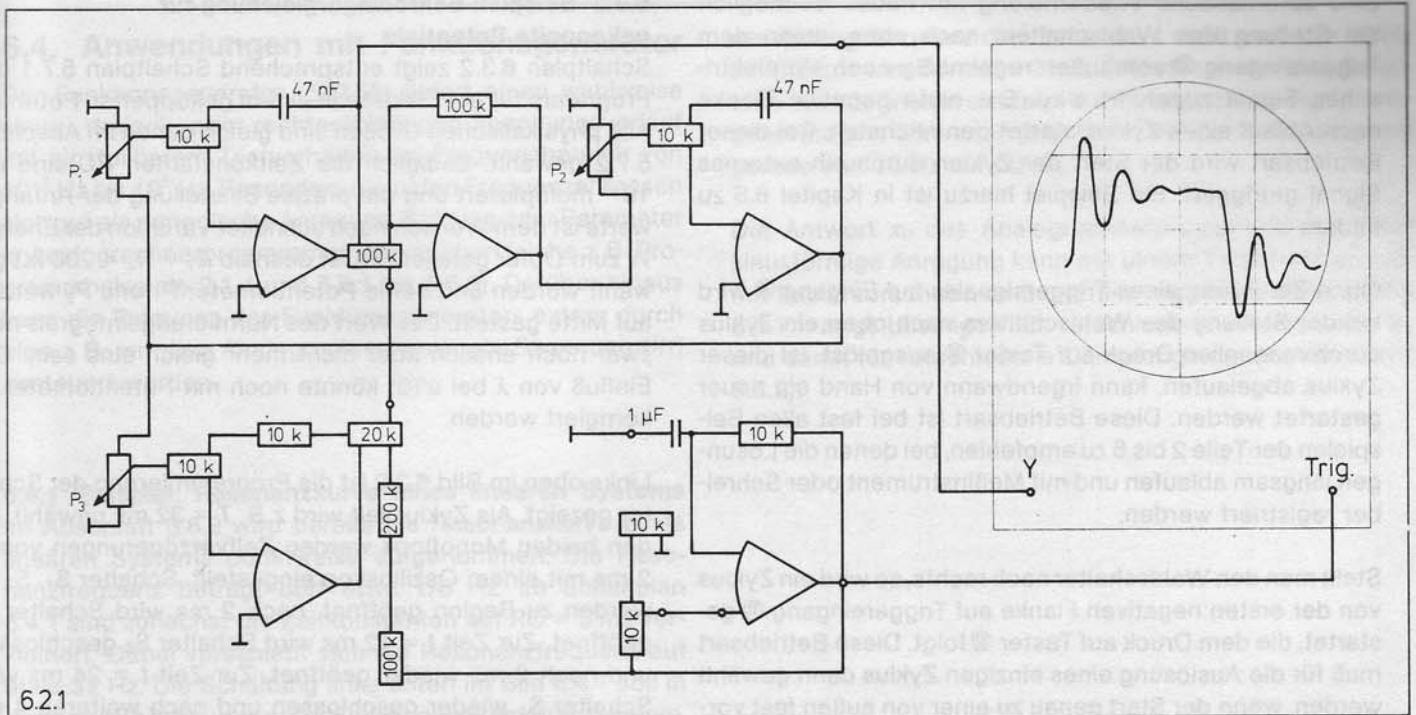
Zur Lösung der Differentialgleichung des elastischen Pendels mit äußerer Anregung

$$m\ddot{y} + R\dot{y} + Dy = F$$

ist der Schaltplan im Bild 6.2.1 analog zum Programm 5.5.1 aufgebaut. Rechts unten ist lediglich ein Rechteckgenerator (siehe Abschnitt 2.7.1) zugefügt, der die sich periodisch ändernde Kraft  $F$  erzeugt. Diese Rechteckfunktion der Frequenz  $f_R$  dient auch als Triggersignal für das Oszilloskop.

Als Lösungen für  $y(t)$  erscheinen je nach Stellung des Potentiometers  $P_3$  mehr oder weniger gedämpfte Schwingungen. Die Frequenz  $f$  der freien Schwingung läßt sich mit den beiden Potentiometern  $P_1$  und  $P_2$  variieren (jeweils auf gleiche Faktoren stellen). Die rechts im Bild 6.2.1 eingezeichnete Kurve ist z. B. eine Lösung etwa für  $f = 10 f_R$ . Der Einfluß der Änderung von  $R$  oder  $f$  wird dabei auf dem Oszilloskop sofort sichtbar.





6.2.1

### 6.3. Steuerung mit programmierbarem Schalter

Der programmierbare Schalter (57607) ist bereits in den Abschnitten 1.1.3 und 1.2.2 beschrieben und abgebildet. Er enthält fünf elektronische Schalter, die zu vorgebbaren Zeiten innerhalb eines Zyklus einzeln ein- und ausgeschaltet werden und die in den Programmplänen eingezeichneten mechanischen Schalter ersetzen können.

Mit Umschalter ⑩ und Abschwächer ⑪ (siehe Bild 1.2.2 auf Seite 13) werden Zykluszeiten  $T$  zwischen 20 s und 30 s (für langsam ablaufende Programme, deren Lösungen mit einem Schreiber registriert werden) oder zwischen 20 ms und 30 ms eingestellt (für schnell ablaufende Programme, deren Lösungen auf einem Oszilloskop dargestellt werden). Diese Zykluszeit steht achtfach unterteilt an den rechts folgenden grünen Buchsen ⑫ als Steuersignale für die Schalter zur Verfügung. Diese Signale können entweder direkt oder noch verzögert über einen Monoflop den Steuereingängen der einzelnen Schalter über kurze Kabel (z. B. aus 574 21 oder 574 22) zugeführt werden.

Sollen vor Beginn einer Rechnung z. B. die Anfangswerte einer Integration durch Schließen der Schalter  $S_1$  und  $S_2$  vorgegeben werden, so sind die I-Eingänge der Schaltersteuerungen ⑬ der beiden Schalter mit dem vorletzten der grünen Ausgänge ⑫ und die 0-Eingänge mit dem ersten (links) oder dem letzten Ausgang (rechts) zu verbinden. Kurz vor Ende des ersten Zyklus werden dann die Schalter  $S_1$  und  $S_2$  automatisch geschlossen und zu Beginn eines neuen Zyklus wieder geöffnet. Die Rechnung beginnt. Nach  $T \cdot 7/8$  schließen die Schalter wieder und die Anfangswerte werden erneut eingestellt.

Soll Schalter  $S_3$  zur Zeit  $t = 3$  s geschlossen und dann nach 6 s wieder geöffnet werden, so ist als Zyklusdauer z. B.

$T = 24$  s zu wählen, der I-Steuereingang des Schalters  $S_3$  mit der zweiten grünen Buchse für  $T \cdot 1/8$  und der 0-Steuereingang mit der vierten grünen Steuereingangsbuchse für  $T \cdot 3/8$  zu verbinden.

Soll Schalter  $S_4$  zur Zeit  $t = 0$  geschlossen und der Zeitpunkt des Öffnens variabel gehalten werden, so ist der I-Steuereingang des Schalters  $S_4$  an die linke grüne Steuereingangsbuchse und der 0-Steuereingang an den Ausgang eines Monoflops ⑭ zu legen. Dieser wird nun seinerseits gesteuert mit dem Signal der linken grünen Buchse. Der Zeitpunkt des Öffnens von Schalter  $S_4$  kann jetzt mit dem Potentiometer ⑮ am Monoflop eingestellt werden.

Der programmierbare Schalter kann einen Rechenablauf einmalig steuern oder auch automatisch wiederholen, beides auf Wunsch getriggert durch ein externes elektrisches Signal. Dabei ist zu beachten, daß erst nach einem ersten Zyklus die Schalter ihre geforderten Startpositionen eingenommen haben.

#### 6.3.1 Betriebsarten des programmierbaren Schalters

Die Betriebsart wird durch Stellung des Wahlschalters ⑯ und die Belegung des Triggereingangs ⑰ bestimmt. Es werden vier Betriebsarten unterschieden.

Eine automatische Wiederholung der Zyklen ohne Pause erreicht man durch Stellung des Wahlschalters nach links. Durch diesen repetierenden Betrieb des Analogrechners kann man die Lösung eines Programms als stehendes Bild auf einem Oszilloskop erhalten. Dieses muß dazu im allgemeinen noch mit dem Signal aus Triggerausgang ⑰ oder aus einer der grünen Ausgänge ⑫ für Steuersignale getriggert werden.

Eine automatische Wiederholung mit Pause ist möglich bei Stellung des Wahlschalters nach oben, wenn dem Triggereingang ⑩ von außen regelmäßig noch ein elektrisches Signal zugeführt wird. Die erste negative Flanke nach Ablauf eines Zyklus startet den nächsten. Bei dieser Betriebsart wird der Start der Zyklen durch ein externes Signal getriggert. Ein Beispiel hierzu ist in Kapitel 6.5 zu finden.

Ohne Zuführung eines Triggersignales auf Eingang ⑩ wird bei der Stellung des Wahlschalters nach oben ein Zyklus durch manuellen Druck auf Taster ⑩ ausgelöst. Ist dieser Zyklus abgelaufen, kann irgendwann von Hand ein neuer gestartet werden. Diese Betriebsart ist bei fast allen Beispielen der Teile 2 bis 5 zu empfehlen, bei denen die Lösungen langsam ablaufen und mit Meßinstrument oder Schreiber registriert werden.

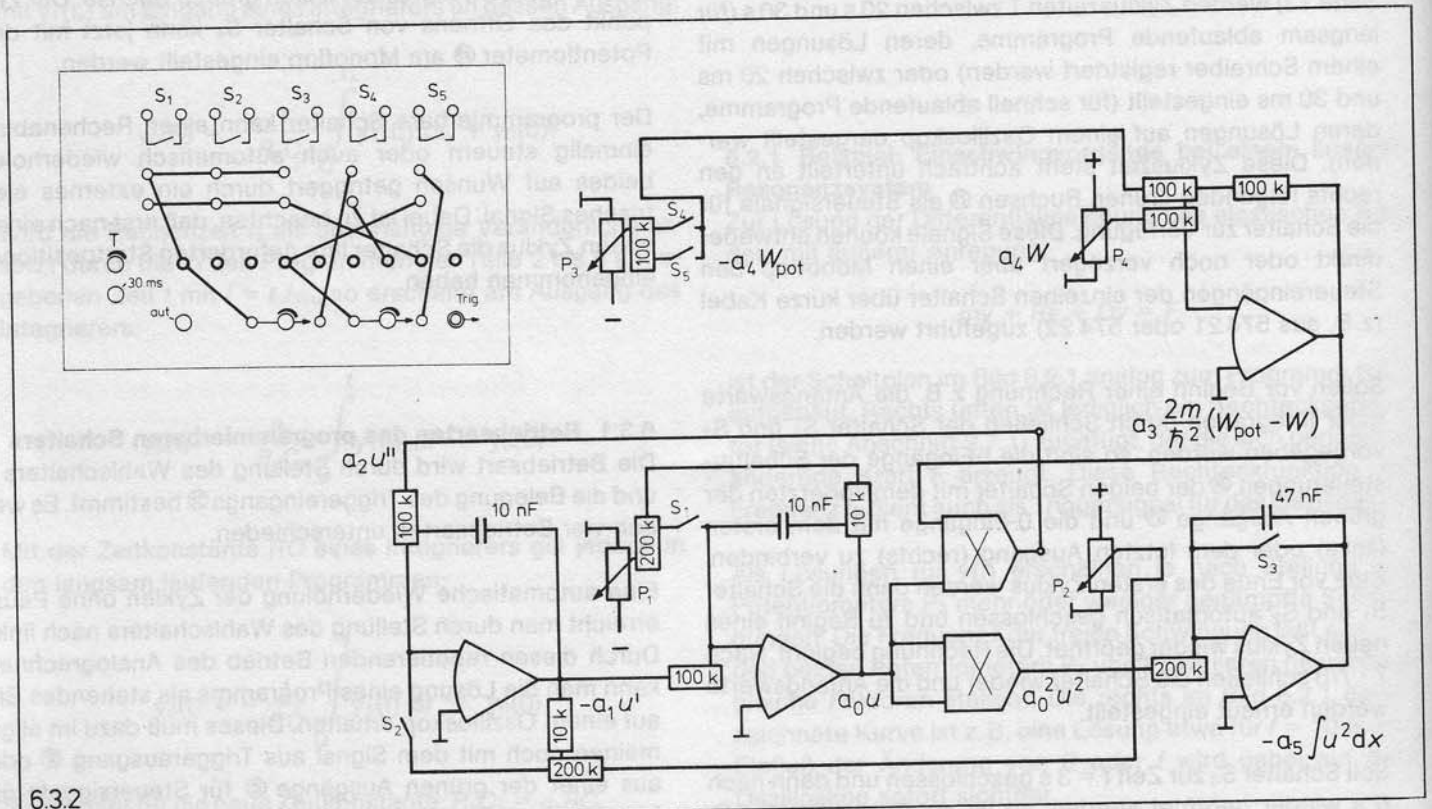
Stellt man den Wahlschalter nach rechts, so wird ein Zyklus von der ersten negativen Flanke auf Triggereingang ⑩ gestartet, die dem Druck auf Taster ⑩ folgt. Diese Betriebsart muß für die Auslösung eines einzigen Zyklus dann gewählt werden, wenn der Start genau zu einer von außen fest vorgegebenen Phase z. B. einer periodischen Störung erfolgen soll (siehe Programm im Kapitel 6.5).

### 6.3.2 Beispiel: Schrödingergleichung für gekoppelte Potentiale

Schaltplan 6.3.2 zeigt entsprechend Schaltplan 5.7.1 das Programm für ein Elektron in einem gekoppelten Potential. Alle physikalischen Größen sind gleich denen im Abschnitt 5.7.2 gewählt. Lediglich die Zeitkonstanten  $RC$  sind mit  $10^{-3}$  multipliziert und die präzise Einstellung der Anfangswerte ist dem Wunsch nach schneller Variation der Energie  $W$  zum Opfer gefallen. Es ist deshalb  $R_1 = R_2 = 200 \text{ k}\Omega$  gewählt worden und beide Potentiometer  $P_1$  und  $P_2$  werden auf Mitte gestellt. Der Wert des Normierungsintegrals muß zwar noch endlich aber nicht mehr gleich eins sein. Der Einfluß von  $\lambda$  bei  $u'(0)$  könnte noch mit Potentiometer  $P_2$  korrigiert werden.

Links oben im Bild 6.3.2 ist die Programmierung der Schalter gezeigt. Als Zykluszeit wird z. B.  $T = 32 \text{ ms}$  gewählt. An den beiden Monoflops werden Zeitverzögerungen von je 2 ms mit einem Oszilloskop eingestellt. Schalter  $S_1, S_2, S_3$  werden zu Beginn geöffnet, nach 2 ms wird Schalter  $S_4$  geöffnet. Zur Zeit  $t = 12 \text{ ms}$  wird Schalter  $S_5$  geschlossen und nach 2 ms wieder geöffnet. Zur Zeit  $t = 24 \text{ ms}$  wird Schalter  $S_4$  wieder geschlossen und nach weiteren 4 ms die Schalter  $S_1, S_2$  und  $S_3$ . Die Zyklen werden automatisch ohne Pause wiederholt.

Auf dem Oszilloskop ist die Abhängigkeit der Funktion  $u(x)$  von der Energie  $W$  gut zu sehen. Man merkt recht deutlich, daß nur für einige diskrete Energiewerte die Wahrscheinlichkeitsamplitude für große  $x$  verschwindet. Die Lösungen sind im Abschnitt 5.7.2 ausführlich diskutiert.



6.3.2

## 6.4. Anwendungen mit Funktionsgenerator

Der Funktionsgenerator (522 55) liefert einen wahlweise sinus-, dreieck- oder rechteckförmigen Spannungsverlauf mit einstellbarem Tastverhältnis im Frequenzbereich von  $10^{-3}$  Hz bis  $10^5$  Hz. Besonders die tiefen Frequenzen lassen sich gut als periodische Anregung, Störung oder Parameter in Analogrechnerprogrammen gebrauchen (siehe z. B. Programmbeispiele 2.1.4 und 5.6.1 bis 5.6.3). Darüber hinaus kann die Frequenz des Funktionsgenerators extern durch eine z. B. mit dem Analogrechner erzeugte Spannung  $U(t)$  gesteuert werden.

### 6.4.1 Beispiel: Resonanzkurve eines linearen Systems

Im Abschnitt 5.6.2 wird bereits die Resonanzkurve eines linearen Systems punktweise aufgenommen. Die Resonanzfrequenz beträgt dort etwa 1/6 Hz. Im Schaltplan 6.4.1 sind zunächst die Zeitkonstanten auf  $RC = 5$  ms verkleinert. Dabei verschiebt sich die Resonanzfrequenz auf etwa 32 Hz. Die Schaltung links unten im Bild 6.4.1 soll in etwa den Spitzenwert  $x_0$  der Schwingungsamplitude liefern.

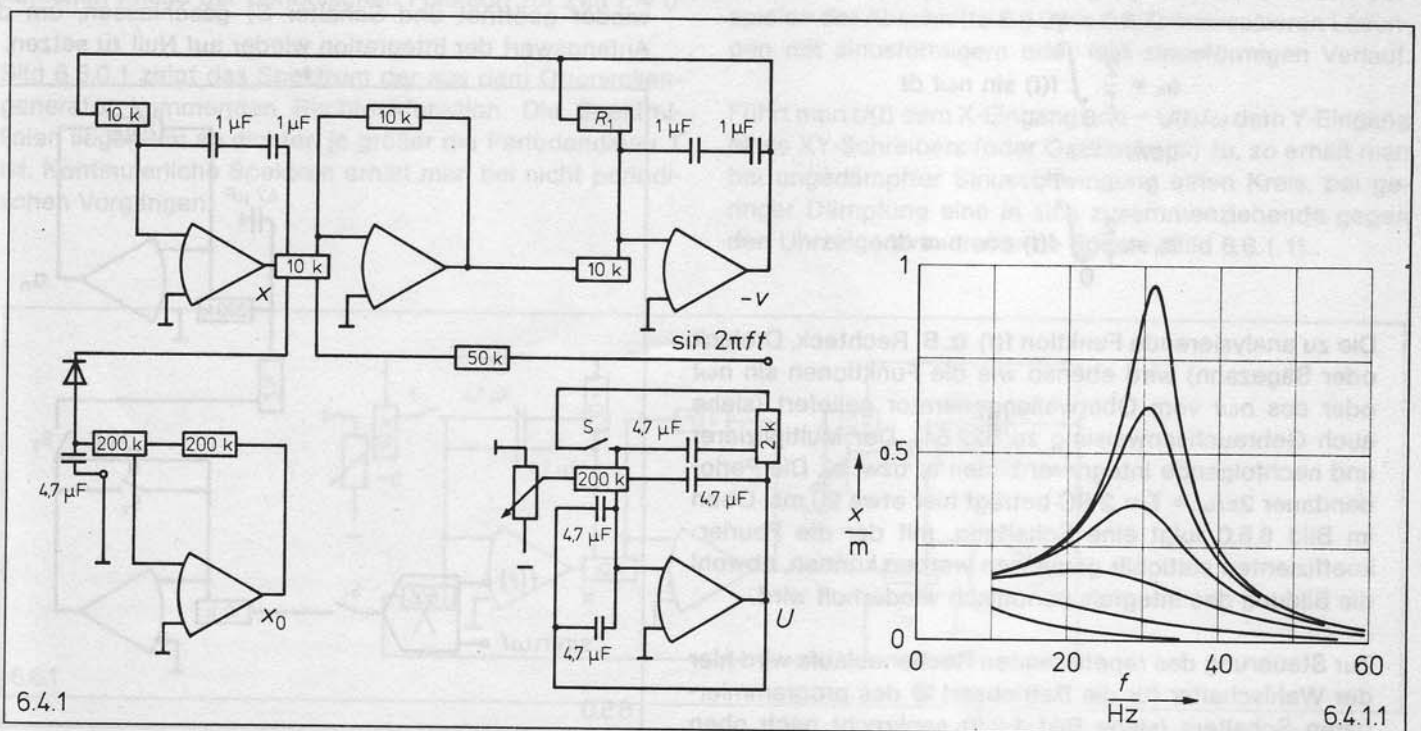
Die äußere Anregung  $\sin 2\pi ft$  für Frequenzen  $f$  zwischen etwa 10 Hz und 60 Hz kommt vom Funktionsgenerator, dessen Frequenz linear mit der Zeit steigend vom Operationsverstärker rechts unten im Programm gesteuert wird. Dieser ist als Integrierer mit Anfangswert Null geschaltet. Die Spannung am Potentiometer wird z. B. gerade so gewählt, daß die Ausgangsspannung  $U(t)$  in 2 Minuten von 0 bis 5 V ansteigt. Mit diesem Signal geht man in den Steuerungseingang des Funktionsgenerators (Umschalter nach rechts auf linearen Frequenzantrieb schalten, siehe auch Gebrauchsanweisung zu 522 55).

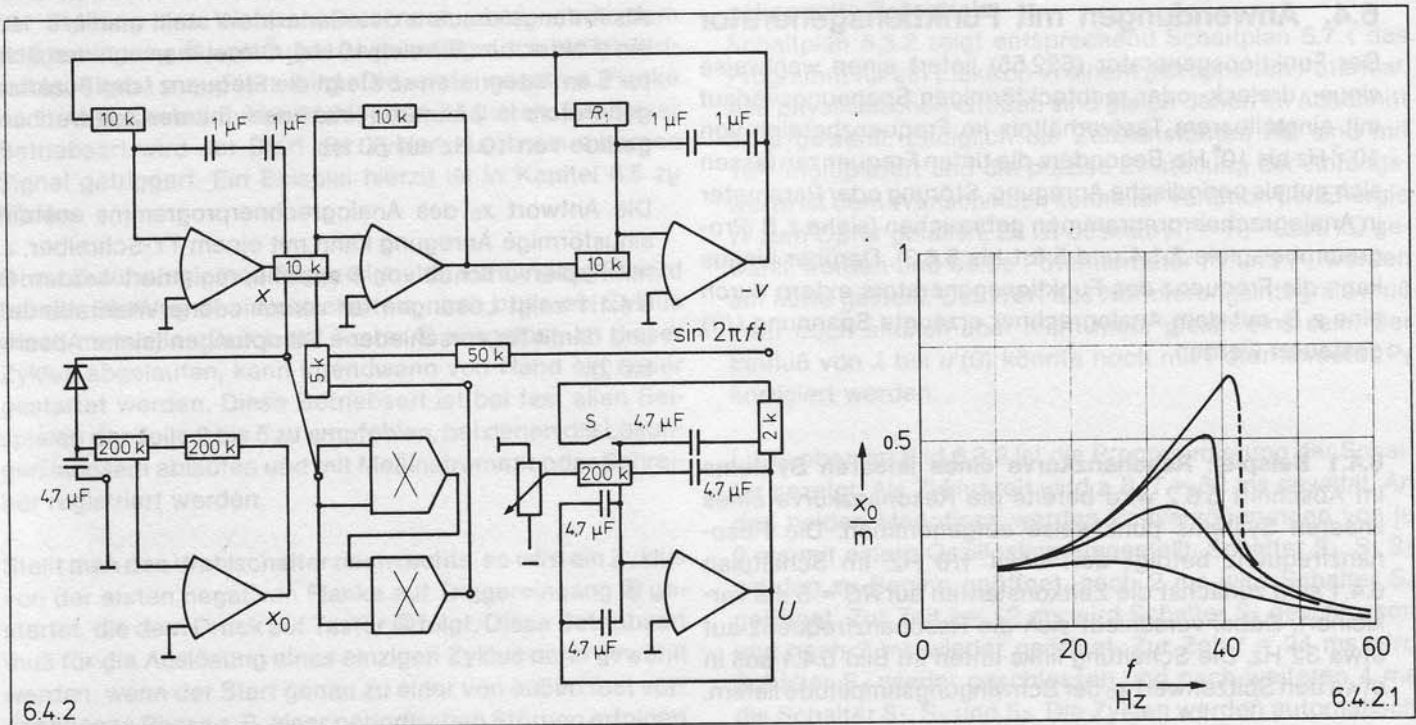
Als Anfangsfrequenz des Generators stellt man  $f_0 = 10$  Hz ein (Faktor 1 im Bereich 10 Hz). Öffnet man nun den Schalter S am Integrierer, so steigt die Frequenz  $f$  des Funktionsgenerators in 2 Minuten jetzt linear mit der Zeit wachsend gerade von 10 Hz auf 60 Hz.

Die Antwort  $x_0$  des Analogrechnerprogramms auf diese sinusförmige Anregung kann mit einem TY-Schreiber, z. B. mit Papiervorschub von 5 cm/min, registriert werden. Bild 6.4.1.1 zeigt Lösungen für verschiedene Widerstände  $R_1$  und damit für verschiedene Dämpfungen (siehe Abschnitt 5.6.2).

### 6.4.2 Beispiel: Resonanzkurve eines nichtlinearen Systems

Der Schaltplan 6.4.2 zeigt eine Erweiterung von Bild 6.4.1 auf das nichtlineare System aus Abschnitt 5.6.3. Bild 6.4.2.1 zeigt Lösungen für verschiedene Dämpfungen. Die Steuerung des Programms erfolgt wie im Abschnitt 6.4.1.





### 6.5. Fourieranalyse mit Oberwellengenerator

Im Kapitel 3.8 ist bereits das Prinzipschaltbild zur Berechnung der Fourierkoeffizienten einer periodischen Funktion (Periodendauer  $T$ ) angegeben. Mit dem Oberwellengenerator (522 54) stehen nun die notwendigerweise phasenstarr gekoppelten exakten Vielfachen einer Grundfrequenz von etwa 50 Hz zur Verfügung. Der programmierbare Schalter (576 07) gestattet eine genaue Vorgabe der notwendigen Schaltzeiten.

Bild 6.5.0 zeigt jetzt das komplette Schaltbild zur Lösung von

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t dt$$

bzw.

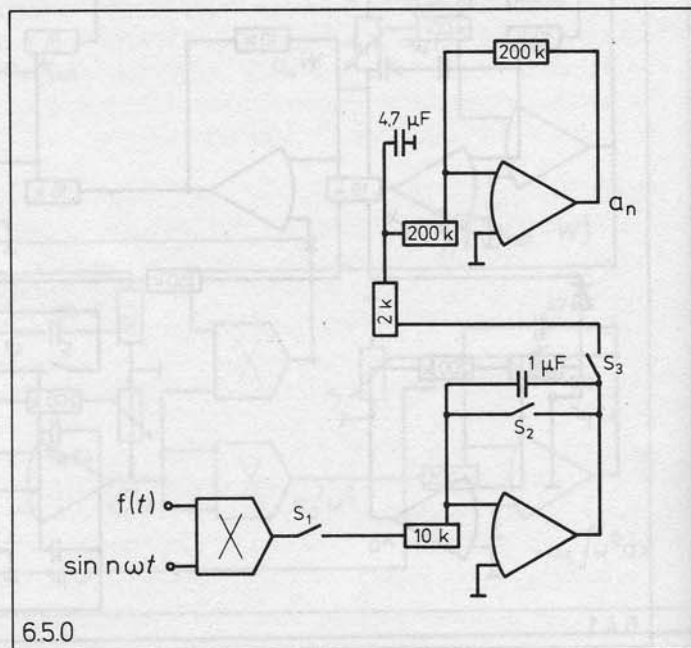
$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t dt$$

Die zu analysierende Funktion  $f(t)$  (z. B. Rechteck, Dreieck oder Sägezahn) wird ebenso wie die Funktionen  $\sin n\omega t$  oder  $\cos n\omega t$  vom Oberwellengenerator geliefert (siehe auch Gebrauchsanweisung zu 522 54). Der Multiplizierer und nachfolgende Integrierer bilden  $a_n$  bzw.  $b_n$ . Die Periodendauer  $2\pi/\omega = T = 2 RC$  beträgt hier etwa 20 ms. Oben im Bild 6.5.0 folgt eine Schaltung, mit der die Fourierkoeffizienten stationär gemessen werden können, obwohl die Bildung des Integrals periodisch wiederholt wird.

Zur Steuerung des repetierenden Rechenablaufs wird hier der Wahlschalter für die Betriebsart ③ des programmierbaren Schalters (siehe Bild 1.2.2) senkrecht nach oben

gestellt, damit einzelne Zyklen durch ein Steuersignal (z. B. Rechteck vom Oberwellengenerator) am Triggereingang ① ausgelöst werden. Die Zyklusdauer  $T_s$  des programmierbaren Schalters wird etwas größer als  $T$  gewählt, so daß gilt  $T = T_s \cdot 6/8$ .

Nach Ablauf eines Zyklus am Schalter wird mit der nächsten negativen Flanke des Rechtecks ein neuer Zyklus ausgelöst. Die drei Schalter sind so zu programmieren (siehe Kapitel 6.3), daß mit Beginn eines Zyklus Schalter  $S_2$  geöffnet und Schalter  $S_1$  geschlossen werden. Nach der Zeit  $T = T_s \cdot 6/8$  werden Schalter  $S_1$  wieder geöffnet und Schalter  $S_3$  geschlossen. Der Wert  $-a_n$  oder  $-b_n$  liegt am Ausgang des Integrierers und am Eingang des oberen Operationsverstärkers. Zur Zeit  $T_s \cdot 7/8$  werden Schalter  $S_3$  wieder geöffnet und Schalter  $S_2$  geschlossen, um den Anfangswert der Integration wieder auf Null zu setzen.



6.5.0

Mit der nächsten negativen Flanke des Rechtecks wird der Vorgang wiederholt. Man kann auf einem Oszilloskop die Funktionen  $f(t)$ ,  $\sin \omega t$  und die zeitliche Entwicklung der  $a_n$  verfolgen und mit einem Meßinstrument die Fourierkoeffizienten  $a_n$  oder  $b_n$  am Ausgang des oberen Operationsverstärkers bestimmen.

Für die Rechteckfunktion des Oberwellengenerators mit der hier gewählten Phasenlage (negative Flanke zur Zeit  $t = 0$ ) erhält man als Fourierkoeffizienten etwa  $a_1 = -1$  ( $\hat{=} -10$  V),  $a_3 = -0,33$ ,  $a_5 = -0,2$ ,  $a_7 = -0,14$  und  $a_9 = -0,11$ . Die Fourierkoeffizienten  $b_n$  sind für dieses Beispiel alle gleich Null.

Invertiert man vor dem Triggereingang des programmierbaren Schalters das Rechtecksignal mit einem geeignet beschalteten Operationsverstärker, so werden die Fourierkoeffizienten  $a_n$  positiv, da dann mit der positiven Flanke des Rechtecks zur Zeit  $t = 0$  begonnen wird.

$$f(t) = \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \frac{1}{7} \sin 7\omega t + \dots$$

ergibt wieder eine Rechteckfunktion mit positiver Flanke zur Zeit  $t = 0$  mit

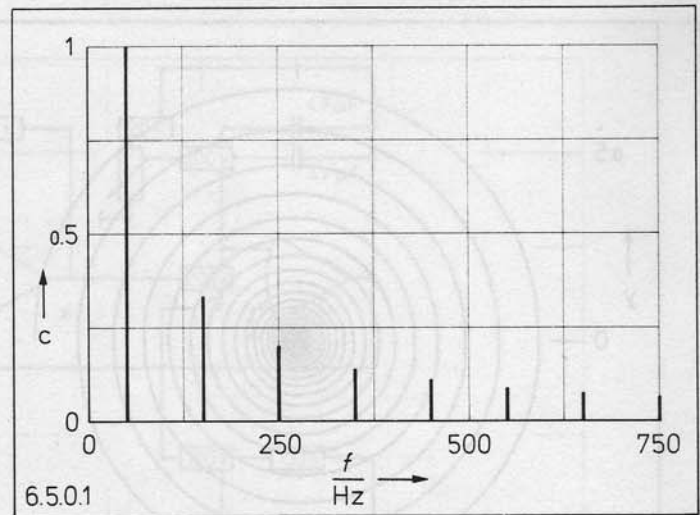
$$f(t) = \begin{cases} +\pi/4 & \text{für } 0 \leq t < T/2 = \pi/\omega \\ -\pi/4 & \text{für } T/2 \leq t < T = 2\pi/\omega \end{cases}$$

und  $f(t + T) = f(t)$ .

Häufig wird zu periodischen Vorgängen das Spektrum angegeben. Es gibt die Information, mit welcher Amplitude  $c_n$  die einzelnen Frequenzen  $f_n$  enthalten sind. Es gilt für jedes  $n$ :  $c_n^2 = a_n^2 + b_n^2$ .

Das Spektrum macht dabei keinerlei Aussage über die Phasenlage der einzelnen harmonischen Schwingungen zueinander; es ist somit auch unabhängig von der ja willkürlichen Phase der periodischen Funktion zur Zeit  $t = 0$ .

Bild 6.5.0.1 zeigt das Spektrum der aus dem Oberwellengenerator kommenden Rechteckfunktion. Die Spektrallinien liegen um so dichter, je größer die Periodendauer  $T$  ist. Kontinuierliche Spektren erhält man bei nicht periodischen Vorgängen.



## 6.6. Computer-Grafiken

Ein Analogrechner muß nicht unbedingt nur dazu dienen, mathematische oder physikalische Probleme zu lösen. Er kann als Werkzeug in der Hand eines „Künstlers“ auch zur Erstellung schöner Grafiken dienen. Im folgenden werden als Beispiele sieben Programme und einige ihrer mit einem XY-Schreiber (575 66) registrierten Lösungen wiedergegeben. Eine ästhetische Wertung soll hier jedoch nicht erfolgen.

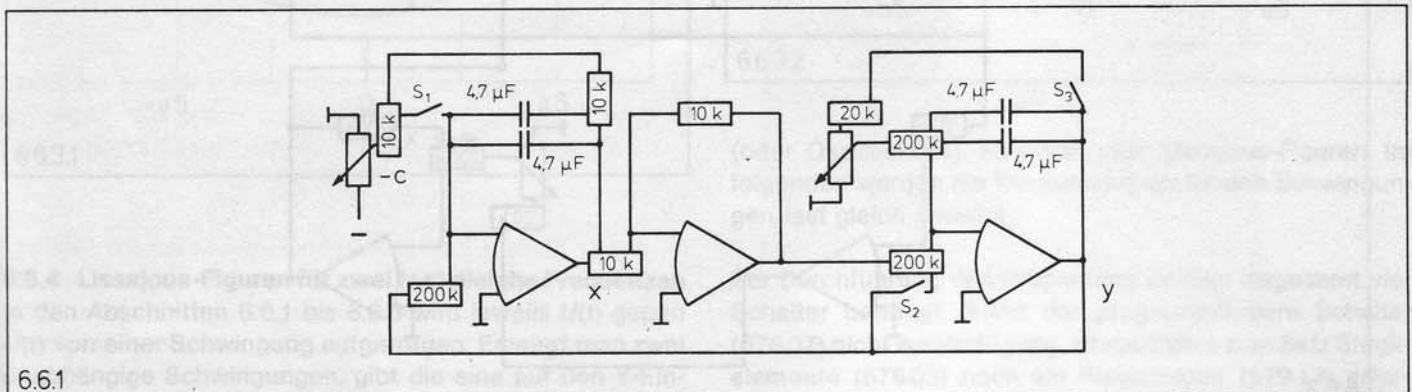
### 6.6.1 Endlose Spirale

Bei der entsprechend Kapitel 3.5 programmierten Differentialgleichung 2. Ordnung

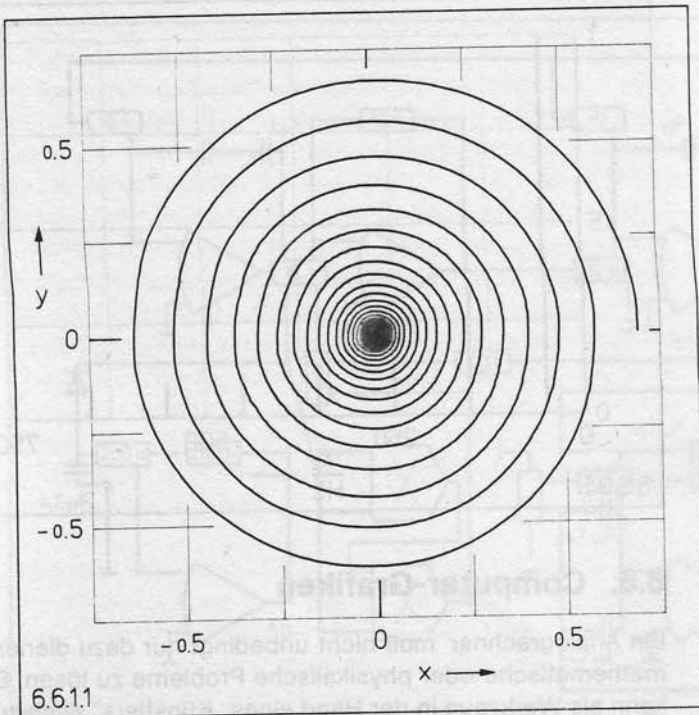
$$\ddot{U}(t) + R \dot{U}(t) + \omega^2 U(t) = 0$$

stehen  $U(t)$  und  $\dot{U}(t)$  gleichzeitig als zeitabhängige elektrische Spannungen zur Verfügung. Hier (und in den Beispielen der Abschnitte 6.6.2 bis 6.6.7) interessieren Lösungen mit sinusförmigem oder fast sinusförmigen Verlauf.

Führt man  $U(t)$  dem X-Eingang und  $-\dot{U}(t)/\omega$  dem Y-Eingang eines XY-Schreibers (oder Oszilloskops) zu, so erhält man bei ungedämpfter Sinusschwingung einen Kreis, bei geringer Dämpfung eine in sich zusammenziehende gegen den Uhrzeigersinn drehende Spirale (Bild 6.6.1.1).

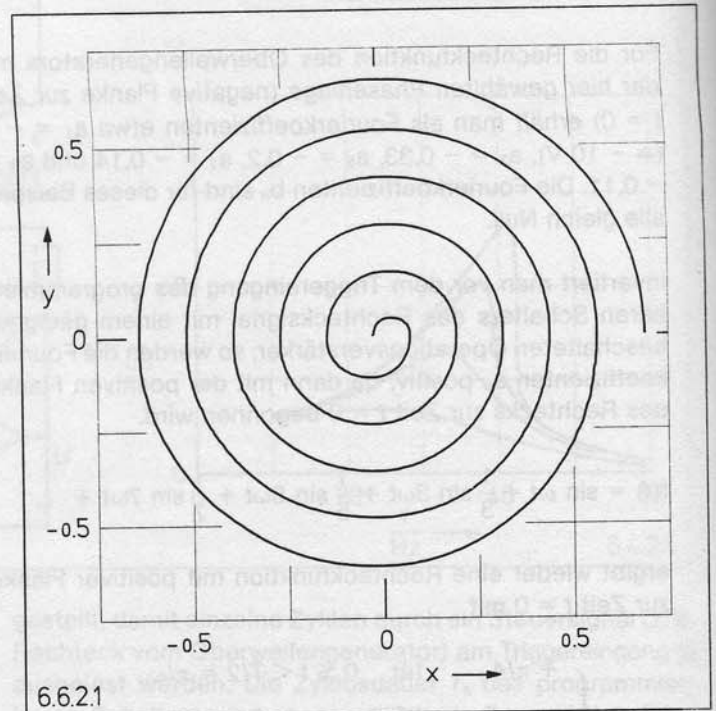


6.6.1



Vor Beginn der Rechnung werden bei geschlossenen Schaltern  $S_1$  und  $S_2$  die Anfangswerte  $x(0) = c$  und  $y(0) = 0$  eingestellt und mit dem Potentiometer am rechten Operationsverstärker eine geeignete Dämpfung  $R$  gewählt. Die Registrierung beginnt mit Öffnen der Schalter  $S_1$  und  $S_2$ .

Wird wieder  $U(t)$  dem X-Eingang und  $-\dot{U}(t)/\omega$  dem Y-Eingang des XY-Schreibers zugeführt, so erhält man nach dem Öffnen der Schalter  $S_1$  und  $S_2$  eine wie in Bild 6.6.2.1 dargestellte Schnecke. Die Anfangswerte  $x(0) = c$  und  $y(0) = 0$  werden vorher eingestellt.



### 6.6.2 Schnecke

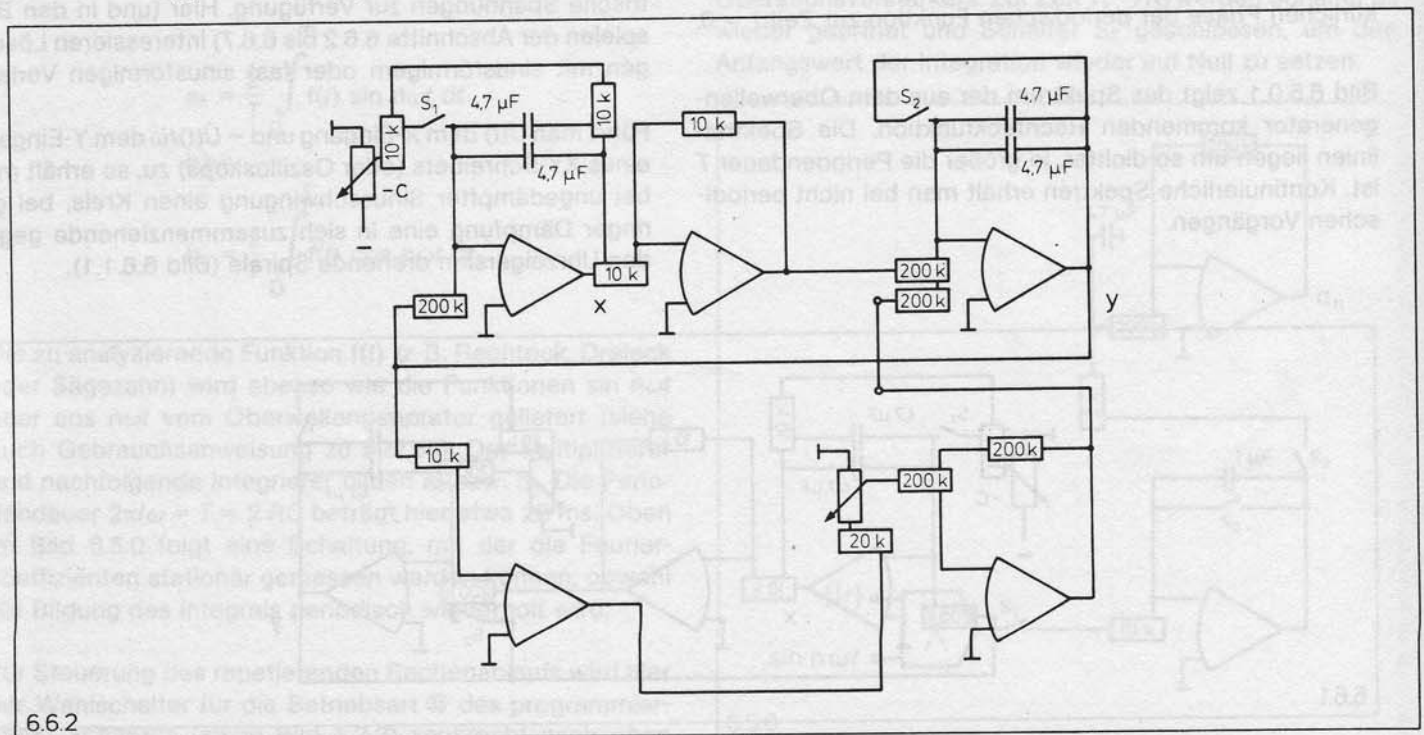
Ersetzt man im Abschnitt 6.6.1 die  $\dot{U}(t)$  proportionale Reibung durch einen nur vom Vorzeichen von  $\dot{U}(t)$  abhängenden Wert (Gleitreibung, siehe Abschnitt 5.5.2), so erhält man den Schaltplan 6.6.2. Der gewünschte Reibungskoeffizient  $R$  kann mit dem Potentiometer rechts unten eingestellt werden. Als Differentialgleichung erhält man:

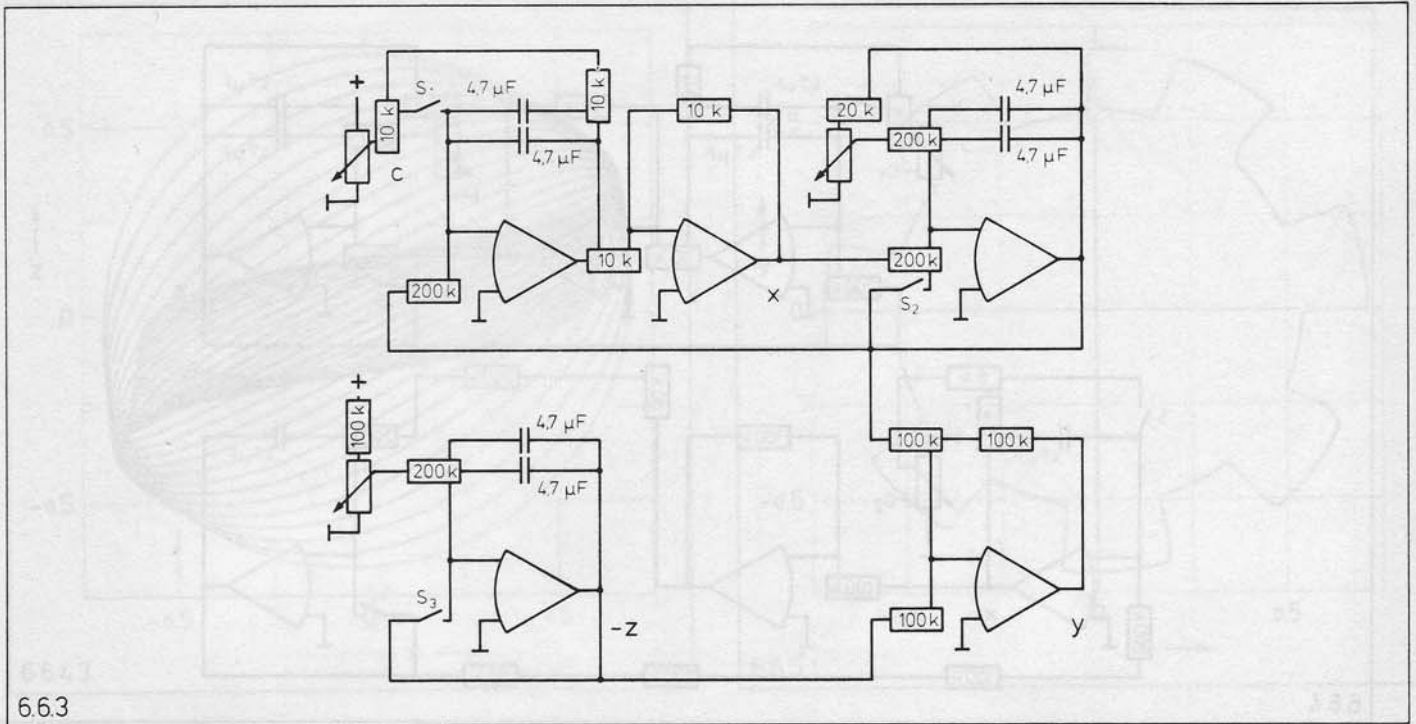
$$\ddot{U}(t) + R \text{sign } \dot{U}(t) + \omega^2 U(t) = 0$$

### 6.6.3 Spirale mit bewegtem Zentrum

Addiert man im Abschnitt 6.6.1 zu  $-\dot{U}(t)/\omega$  noch eine konstant mit der Zeit anwachsende Größe  $z$ , so erhält man Schaltplan 6.6.3. Es wird  $-U(t)$  dem X-Eingang und  $\dot{U}(t)/\omega + z$  dem Y-Eingang des Schreibers zugeführt.

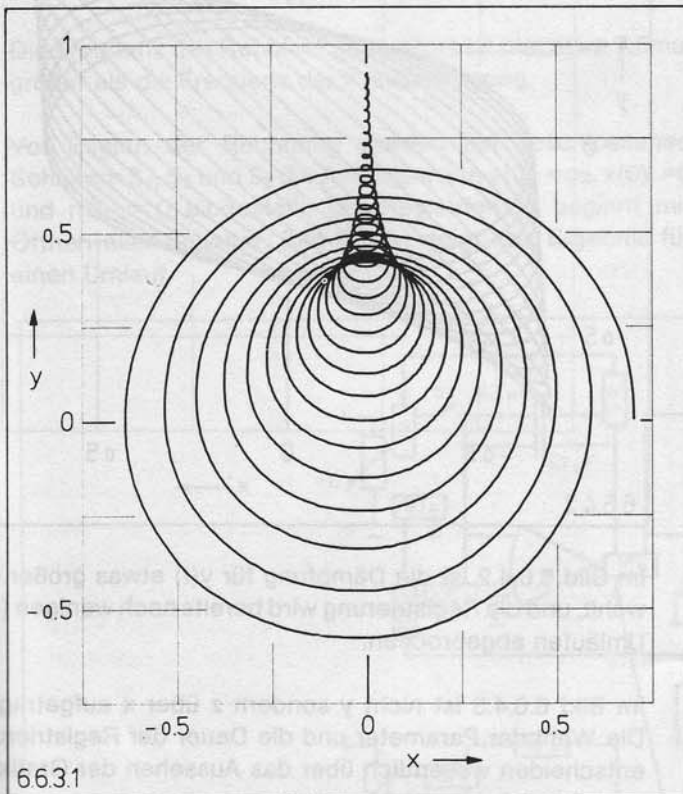
Vor Beginn der Rechnung werden bei geschlossenen Schaltern  $S_1$ ,  $S_2$  und  $S_3$  die Anfangswerte  $x(0) = c$ ,  $y(0) = 0$  und  $z(0) = 0$  eingestellt, mit dem Potentiometer links unten



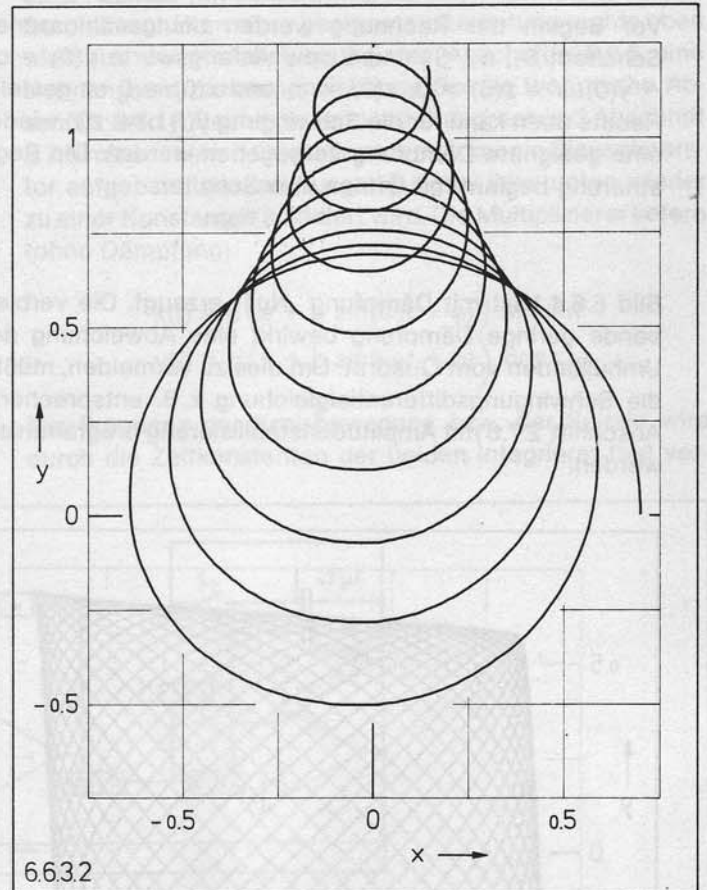


6.6.3

wird die gewünschte Steigung von z und am Potentiometer rechts oben eine geeignete Dämpfung gewählt. Die Registrierung beginnt mit Öffnen der drei Schalter. Die beiden hier gezeigten Bilder 6.6.3.1 und 6.6.3.2 unterscheiden sich nur in der Steigung von z.



6.6.3.1



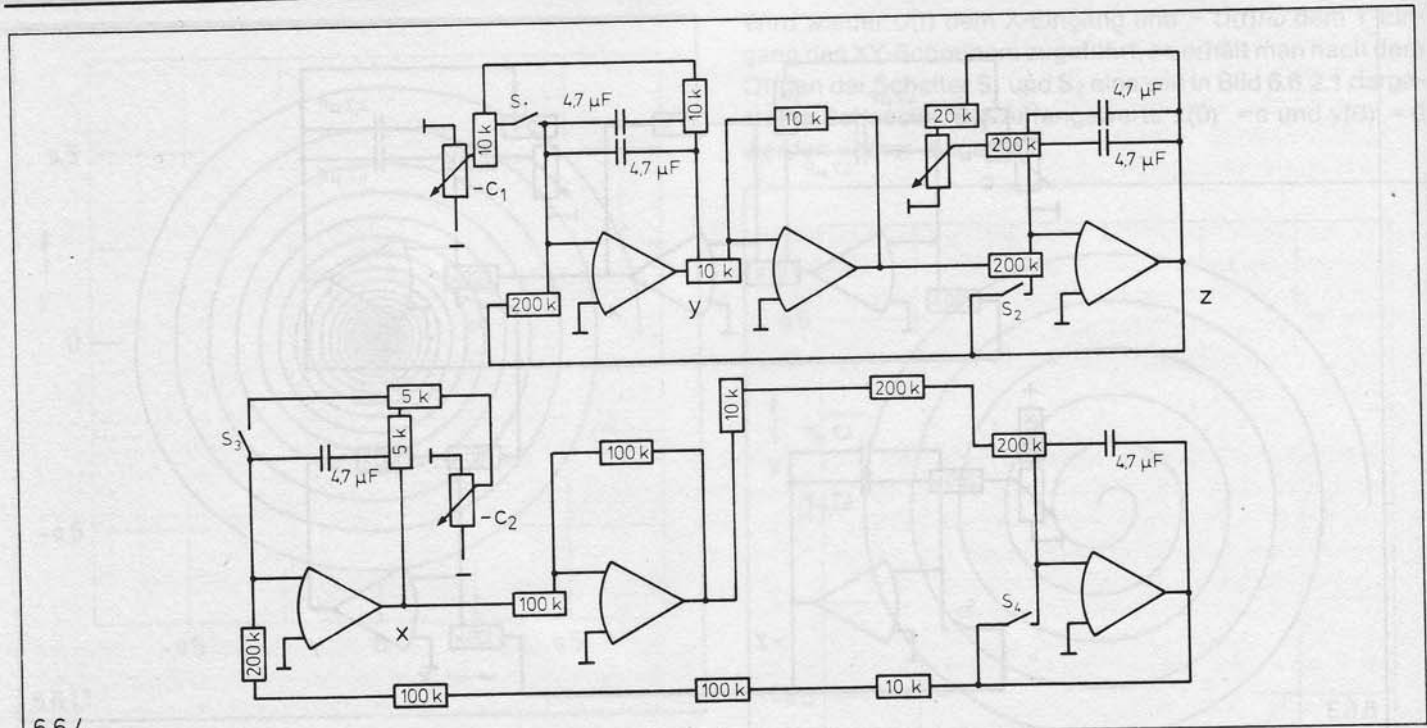
6.6.3.2

(oder Oszilloskops), so erhält man Lissajous-Figuren. Im folgenden werden die Frequenzen der beiden Schwingungen fast gleich gewählt.

#### 6.6.4 Lissajous-Figuren für zwei fast gleiche Frequenzen

In den Abschnitten 6.6.1 bis 6.6.3 wird jeweils  $U(t)$  gegen  $\dot{U}(t)$  von einer Schwingung aufgetragen. Erzeugt man zwei unabhängige Schwingungen, gibt die eine auf den Y-Eingang und die andere auf den X-Eingang eines Schreibers

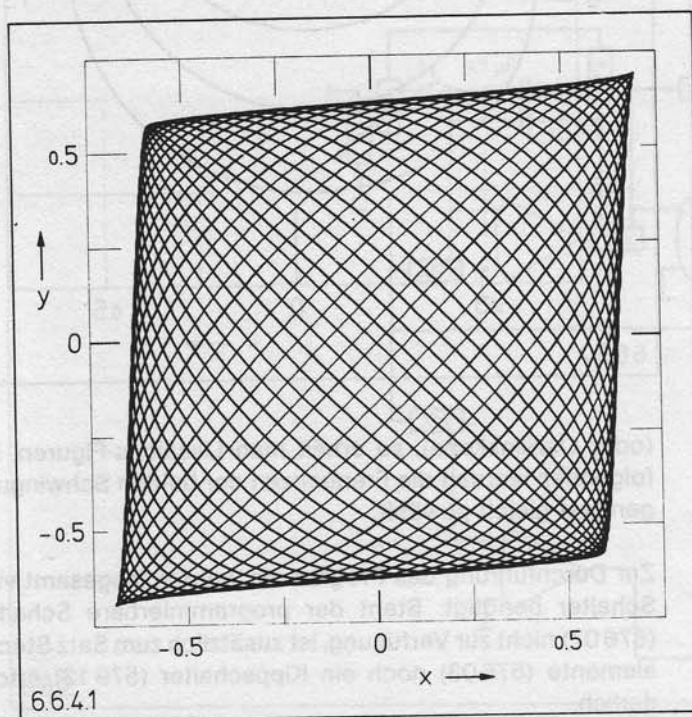
Zur Durchführung des Programms werden insgesamt vier Schalter benötigt. Steht der programmierbare Schalter (57607) nicht zur Verfügung, ist zusätzlich zum Satz Steckelemente (57603) noch ein Kippschalter (57913) erforderlich.



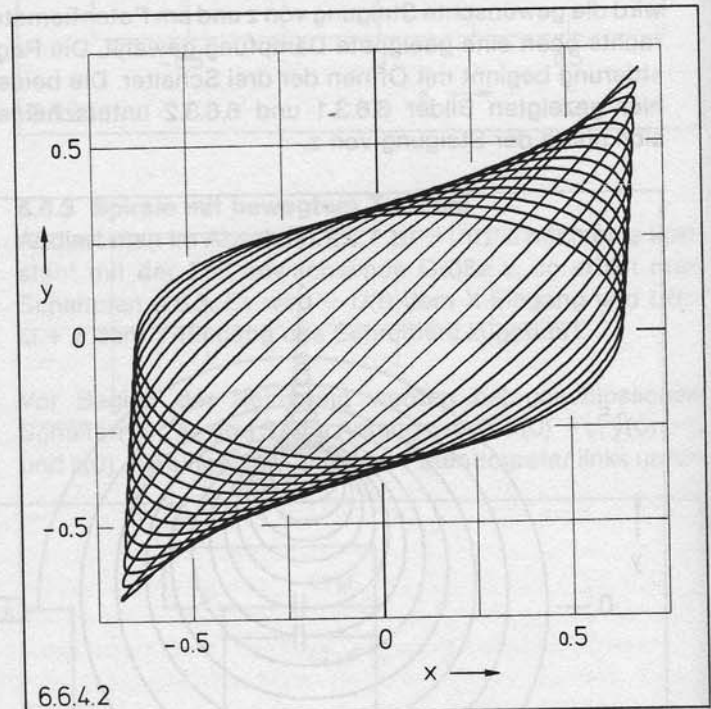
6.6.4

Vor Beginn der Rechnung werden bei geschlossenen Schaltern  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  und  $S_4$  die Anfangswerte  $y(0) = c_1$ ,  $-\dot{y}(0)/\omega = z(0) = 0$ ,  $x(0) = c_2$  und  $\dot{x}(0) = 0$  eingestellt. Rechts oben kann für die Schwingung  $\dot{y}(t)$  bzw.  $z(t)$  wieder eine geeignete Dämpfung vorgegeben werden. Die Registrierung beginnt mit Öffnen aller Schalter.

Bild 6.6.4.1 ist mit Dämpfung „Null“ erzeugt. Die verbleibende geringe Dämpfung bewirkt eine Abweichung der Umhüllenden vom Quadrat. Um dies zu vermeiden, müßte die Schwingungsdifferentialgleichung z.B. entsprechend Abschnitt 2.7.6 mit Amplitudenstabilisierung programmiert werden.



6.6.4.1



6.6.4.2

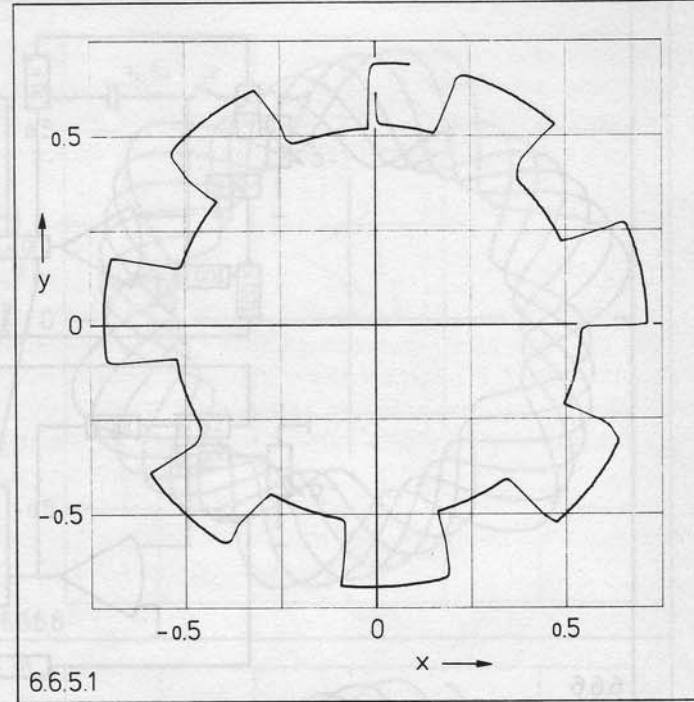
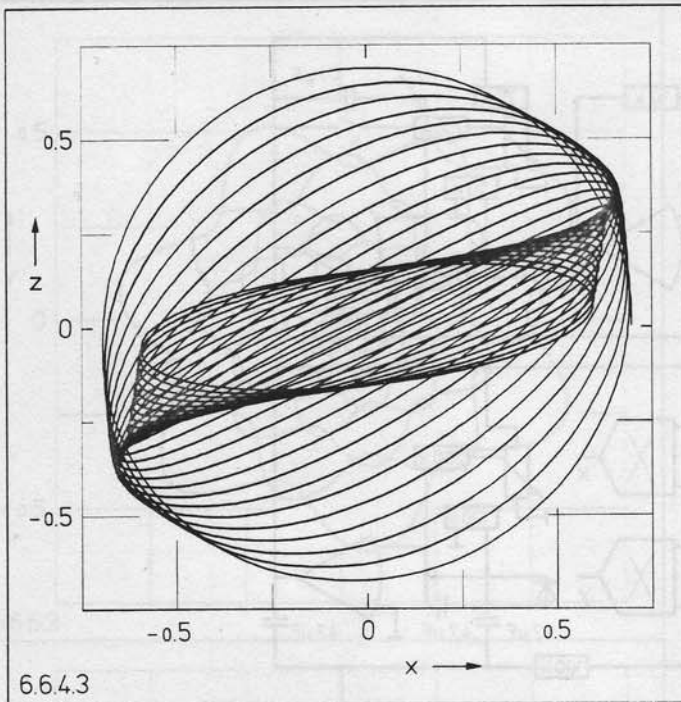
Im Bild 6.6.4.2 ist die Dämpfung für  $y(t)$  etwas größer gewählt, und die Registrierung wird bereits nach wenigen (13) Umläufen abgebrochen.

Im Bild 6.6.4.3 ist nicht  $y$  sondern  $z$  über  $x$  aufgetragen. Die Wahl der Parameter und die Dauer der Registrierung entscheiden wesentlich über das Aussehen der Grafiken.

### 6.6.5 Kreis mit rechteckförmig moduliertem Radius

Im oberen Teil des Schaltplanes 6.6.5 wird der Kreis wieder wie im Abschnitt 6.6.1 aus dem Programm einer Differentialgleichung 2. Ordnung gewonnen. Am Ausgang des linken Operationsverstärkers erscheint  $c \cos \omega t$ , am Ausgang des rechten Verstärkers  $c \sin \omega t$ . Die Rechtecksignale





$r(t)$  des Operationsverstärkers rechts unten (vergleiche Abschnitt 2.7.1) werden links unten zu einer Konstanten  $a$  addiert. Die nachfolgenden Multiplizierer bilden dann:

$$x(t) = c \left( a + r(t) \right) \sin \omega t$$

$$y(t) = c \left( a + r(t) \right) \cos \omega t$$

Die Frequenz des Rechteckgenerators ist hier etwa 7,5mal größer als die Frequenz der Kreisbewegung.

Vor Beginn der Rechnung werden bei geschlossenen Schaltern  $S_1$ ,  $S_2$  und  $S_3$  die Anfangswerte  $y(0) = ca$ ,  $x(0) = 0$  und  $r(0) = 0$  eingestellt. Die Registrierung beginnt mit Öffnen aller Schalter. Bild 6.6.5.1 zeigt das Ergebnis für einen Umlauf.

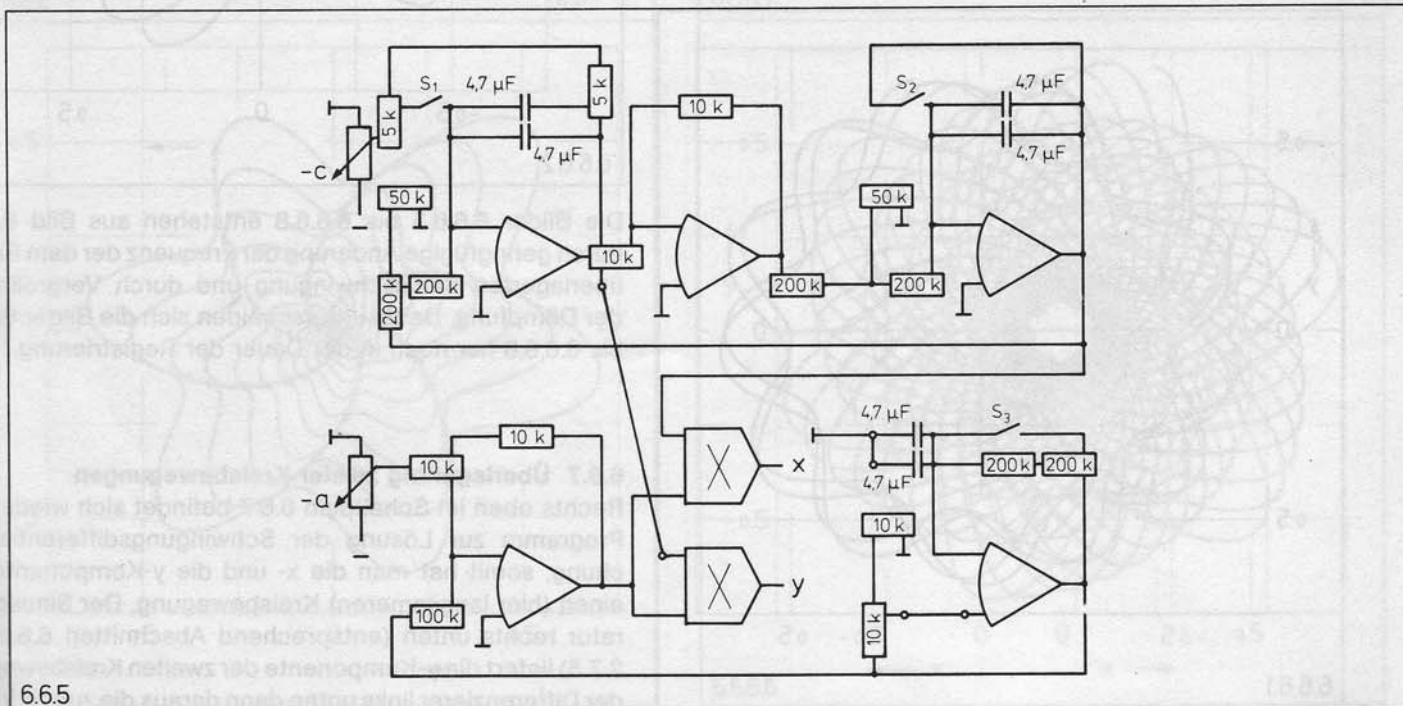
### 6.6.6 Spirale mit sinusförmig moduliertem Radius

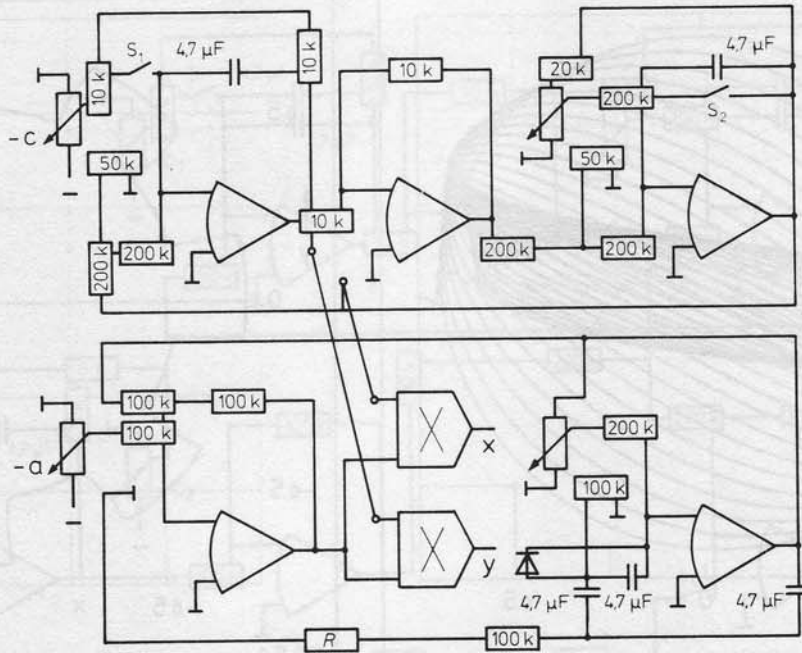
Durch Zuschalten einer geeigneten Dämpfung rechts oben wird aus der Kreisbewegung des Abschnitts 6.6.5 eine sich langsam zusammenziehende Spirale (vergleiche Abschnitt 6.6.1). Rechts unten wird entsprechend Abschnitt 2.7.5 mit nur einem Operationsverstärker ein Sinusgenerator aufgebaut, dessen Ausgangssignal links unten wieder zu einer Konstanten  $a$  addiert wird. Die Multiplizierer liefern (ohne Dämpfung):

$$x(t) = c \left( a + b \sin(\omega_2 t + \varphi) \right) \sin \omega_1 t$$

$$y(t) = c \left( a + b \sin(\omega_2 t + \varphi) \right) \cos \omega_1 t$$

Die Frequenz der Kreisbewegung bzw. der Spirale wird durch die Zeitkonstanten der beiden Integrierer fest vor-

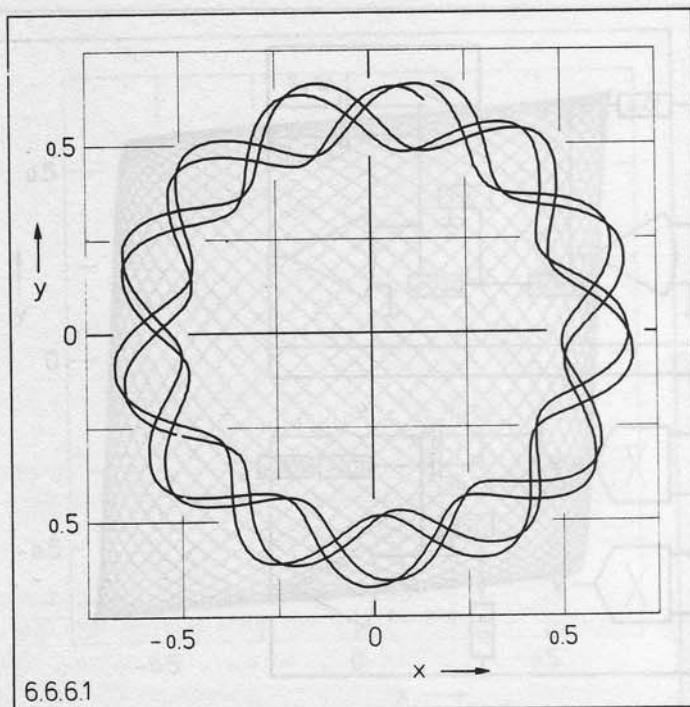




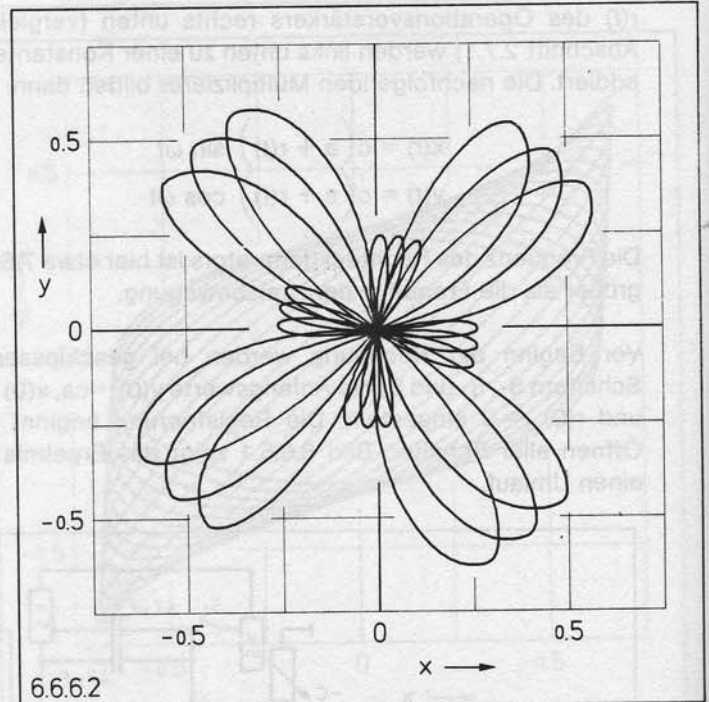
6.6.6

gegeben. Die Frequenz und die Amplitude des Sinusgenerators rechts unten wird durch die Stellung des Potentiometers in der Rückkopplung mitbestimmt. Die Einstellung ist kritisch, man muß insbesondere jeweils den eingewungenen Zustand abwarten. Die Frequenz kann geringfügig auch durch verschiedene  $R$  (z. B.  $5\text{ k}\Omega$ ) geändert werden. Hier wird  $\omega_2$  etwa 4- bis 6mal größer als  $\omega_1$  gewählt. Die Phase  $\varphi$  des Sinusgenerators zur Kreisbewegung ist unbestimmt.

Die Registrierung beginnt mit Öffnen der Schalter  $S_1$  und  $S_2$ . Dabei sind die Anfangswerte  $x(0) = 0$  und  $y(0) = c(a + b \sin \varphi)$  vorher einzustellen. Die Bilder 6.6.6.1 und 6.6.6.2 zeigen zwei Lösungsbilder für unterschiedliche Amplituden und Frequenzverhältnisse. Bei Bild 6.6.6.1 ist insbesondere  $b < a$ , bei Bild 6.6.6.2 ist  $b > a$ .



6.6.6.1

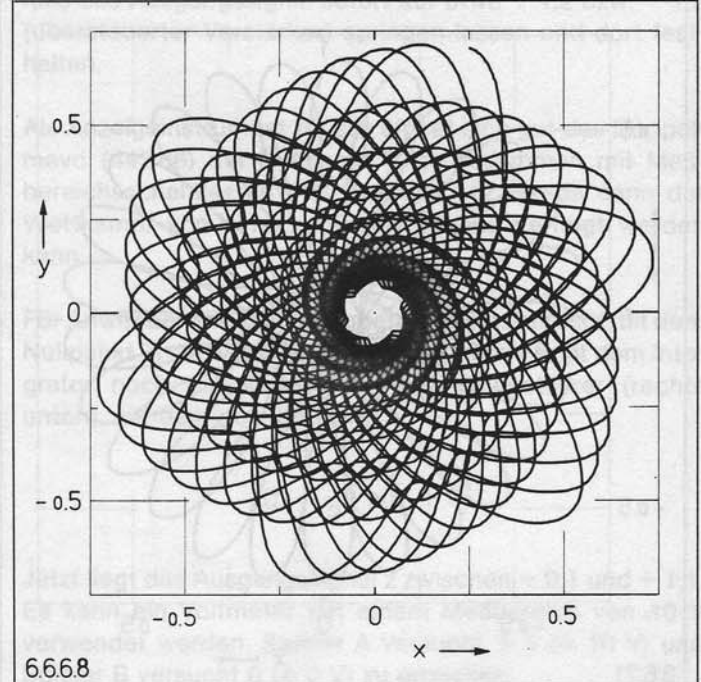
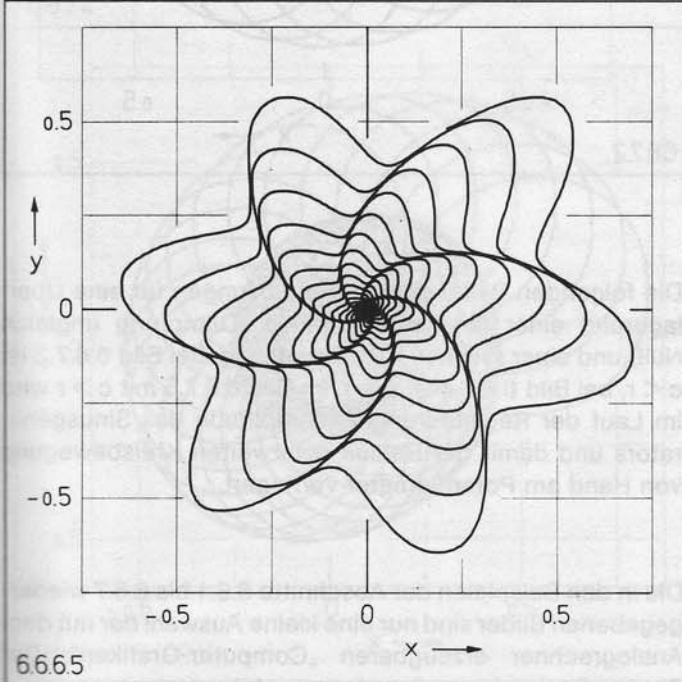
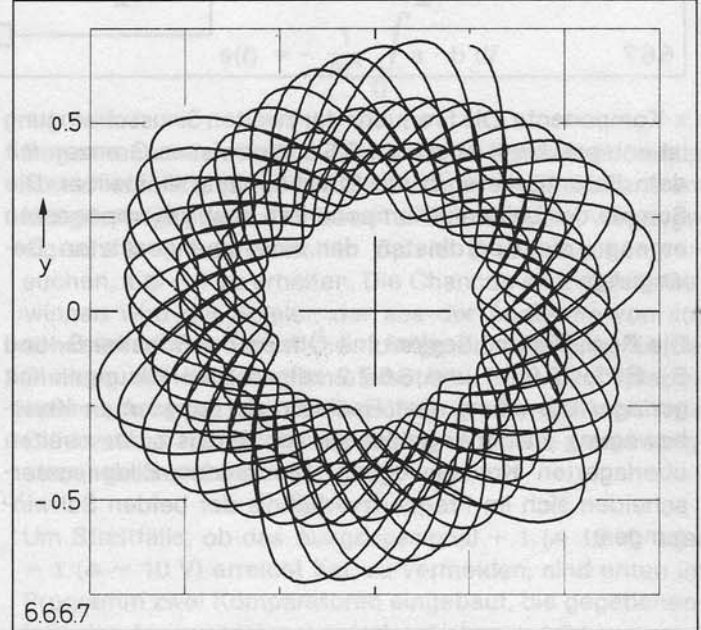
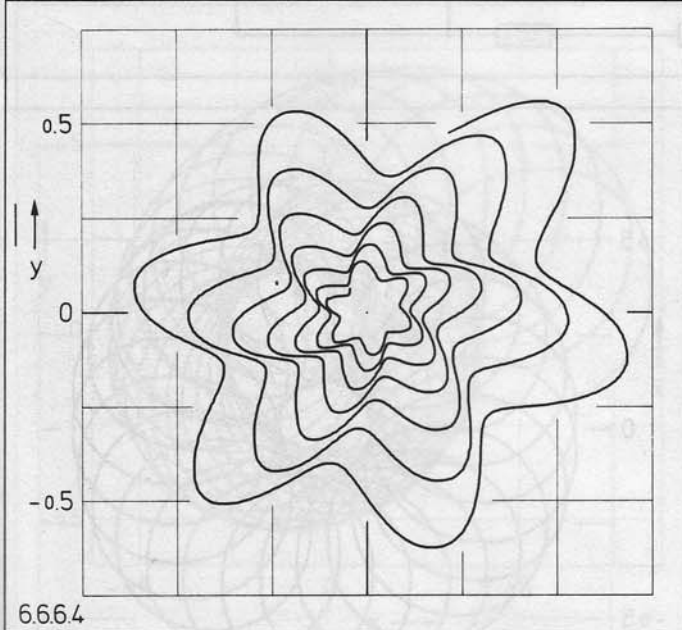
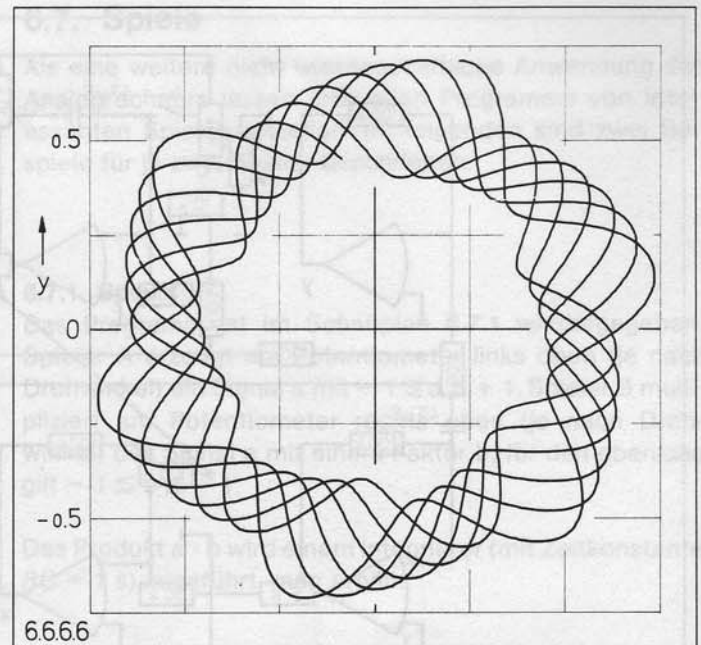
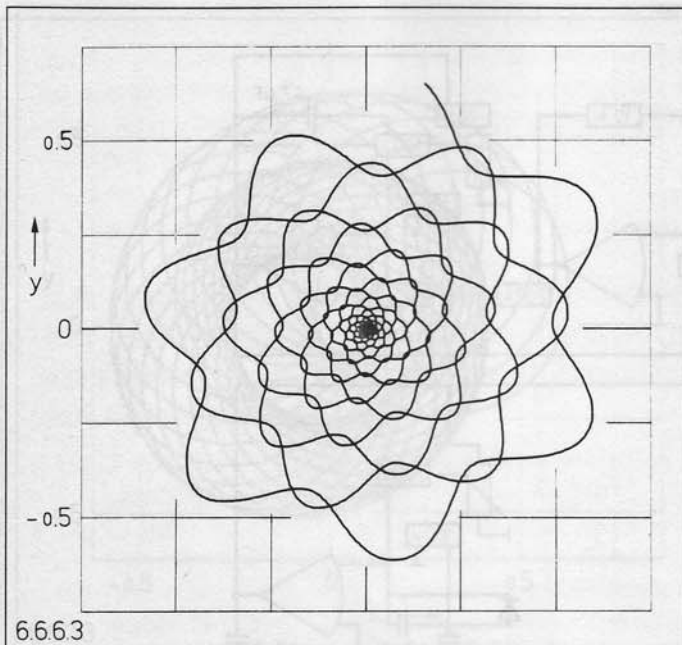


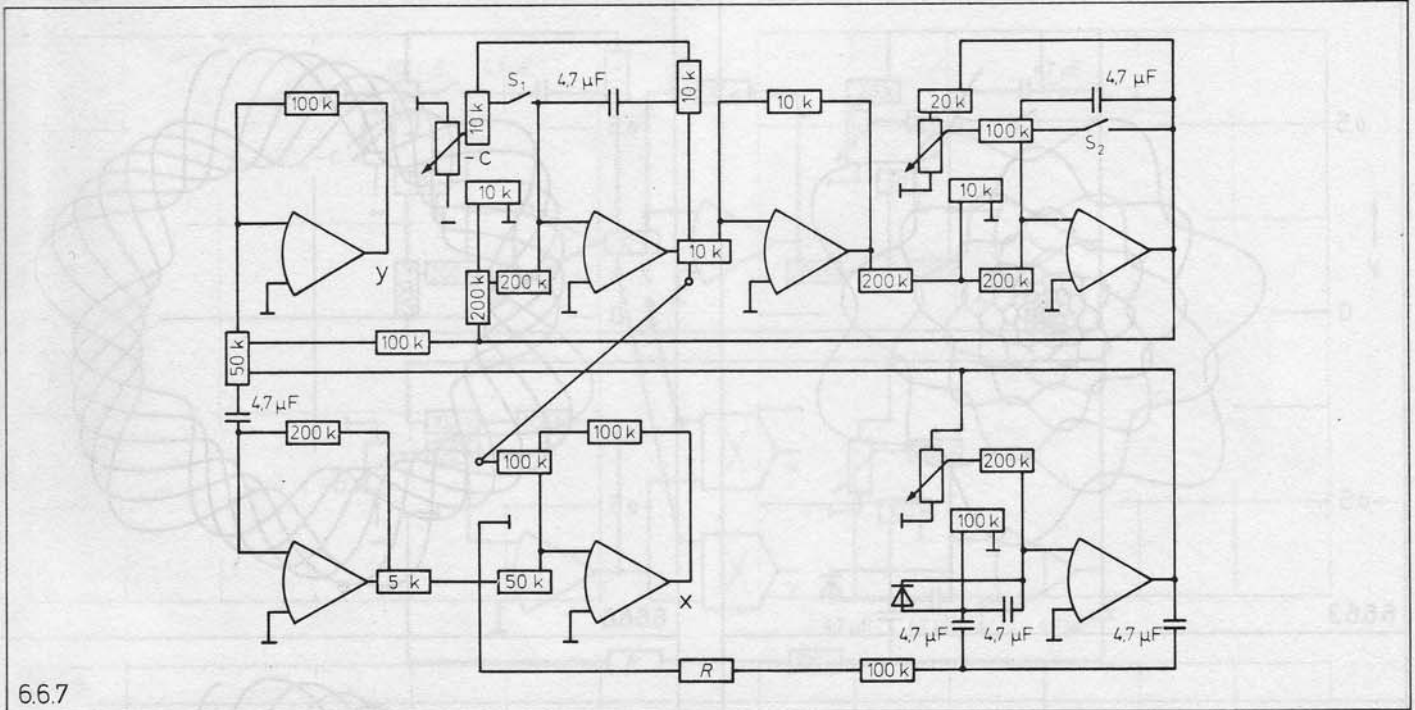
6.6.6.2

Die Bilder 6.6.6.3 bis 6.6.6.8 entstehen aus Bild 6.6.6.1 durch geringfügige Änderung der Frequenz der dem Radius überlagerten Sinusschwingung und durch Vergrößerung der Dämpfung. Dabei unterscheiden sich die Bilder 6.6.6.6 bis 6.6.6.8 nur noch in der Dauer der Registrierung.

### 6.6.7 Überlagerung zweier Kreisbewegungen

Rechts oben im Schaltplan 6.6.7 befindet sich wieder das Programm zur Lösung der Schwingungsdifferentialgleichung, somit hat man die  $x$ - und die  $y$ -Komponente der einen (hier langsameren) Kreisbewegung. Der Sinusgenerator rechts unten (entsprechend Abschnitten 6.6.6 und 2.7.5) liefert die  $y$ -Komponente der zweiten Kreisbewegung, der Differenzierer links unten dann daraus die zugehörige

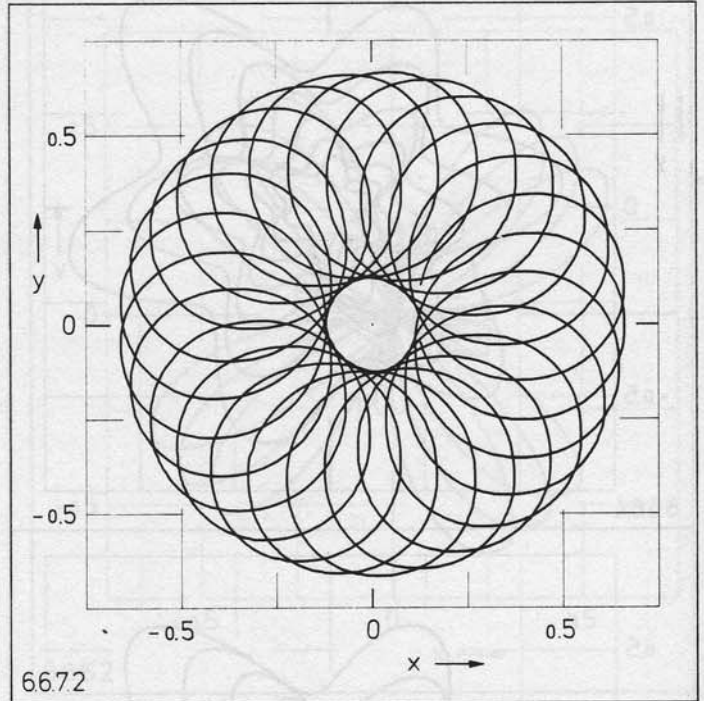




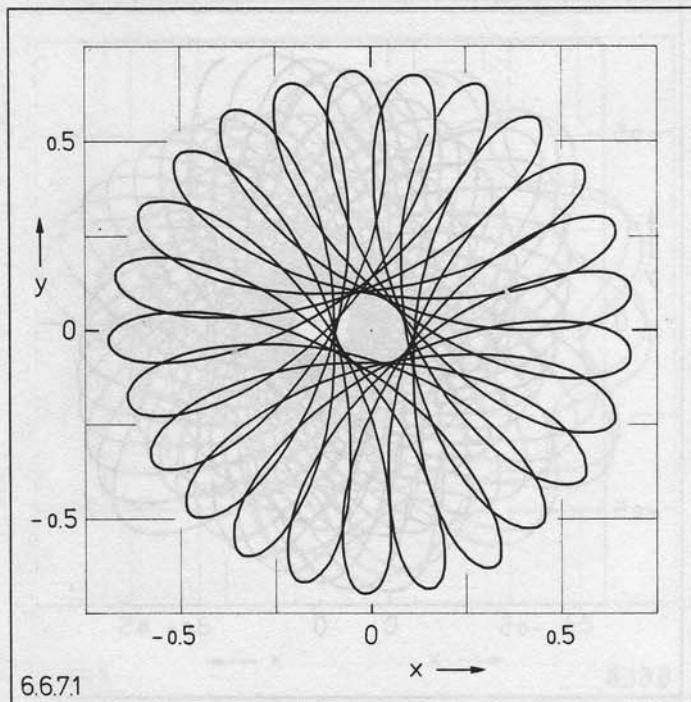
6.6.7

x-Komponente. Die Frequenz der zweiten Sinusschwingung ist entsprechend Abschnitt 6.6.6 in gewissen Grenzen mit dem Potentiometer in der Rückkopplung einstellbar. Die Summe der beiden x-Komponenten bzw. y-Komponenten ergeben die Koordinaten der zusammengesetzten Bewegung.

Die Registrierung beginnt mit Öffnen der Schalter  $S_1$  und  $S_2$ . Bilder 6.6.7.1 und 6.6.7.2 zeigen zwei Lösungen mit geringer Dämpfung. Der Radius  $c$  der langsamen Kreisbewegung ist dabei größer als der Radius  $r$  der zweiten überlagerten Kreisbewegung. Die beiden Bilder unterscheiden sich im Frequenzverhältnis der beiden Schwingungen.



6.6.7.2



6.6.7.1

Die folgenden Bilder zeigen drei Lösungen für eine Überlagerung einer langsamen Spirale (Dämpfung ungleich Null) und einer raschen Kreisbewegung. Bei Bild 6.6.7.3 ist  $c < r$ , bei Bild 6.6.7.4 ist  $c > r$ . Im Bild 6.6.7.5 mit  $c > r$  wird im Lauf der Registrierung die Amplitude des Sinusgenerators und damit der Radius der zweiten Kreisbewegung von Hand am Potentiometer verringert.

Die in den Beispielen der Abschnitte 6.6.1 bis 6.6.7 wiedergegebenen Bilder sind nur eine kleine Auswahl der mit dem Analogrechner erzeugbaren „Computer-Grafiken“. Der Phantasie sind kaum Grenzen gesetzt.

## 6.7. Spiele

Als eine weitere nicht wissenschaftliche Anwendung des Analogrechners lassen sich auch Programme von interessanten Spielen erstellen. Im folgenden sind zwei Beispiele für je zwei Spieler beschrieben.

### 6.7.1 Spiel 1

Das Programm ist im Schaltplan 6.7.1 wiedergegeben. Spieler A erzeugt am Potentiometer links oben (je nach Drehwinkel) ein Signal  $a$  mit  $-1 \leq a \leq +1$ . Spieler B multipliziert am Potentiometer rechts oben (je nach Drehwinkel) das Signal  $a$  mit einem Faktor  $b$ , für den ebenfalls gilt  $-1 \leq b \leq +1$ .

Das Produkt  $a \cdot b$  wird einem Integrierer (mit Zeitkonstante  $RC = 1$  s) zugeführt, man erhält:

$$s(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t a \cdot b \, dt$$

Begonnen wird mit  $s(0) = 0$ , und die beiden Potentiometer stehen auf Mitte ( $a = 0$  und  $b = 0$ ). Dann wird Schalter S am Integrierer geöffnet. Ziel ist es für Spieler A, als Ausgangssignal  $s \geq +1$  zu erreichen. Spieler B soll dagegen versuchen,  $s \leq -1$  zu erhalten. Die Chancen sind gleich. Gewinnen wird der Spieler, der aus der Änderung von  $s(t)$  schneller immer wieder die richtige Entscheidung für die Stellung seines Potentiometers trifft. Geht das Spiel zu schnell, kann es durch Vergrößerung der Zeitkonstante (Widerstand vor dem Integrierer verdoppeln) etwas langsamer gemacht werden.

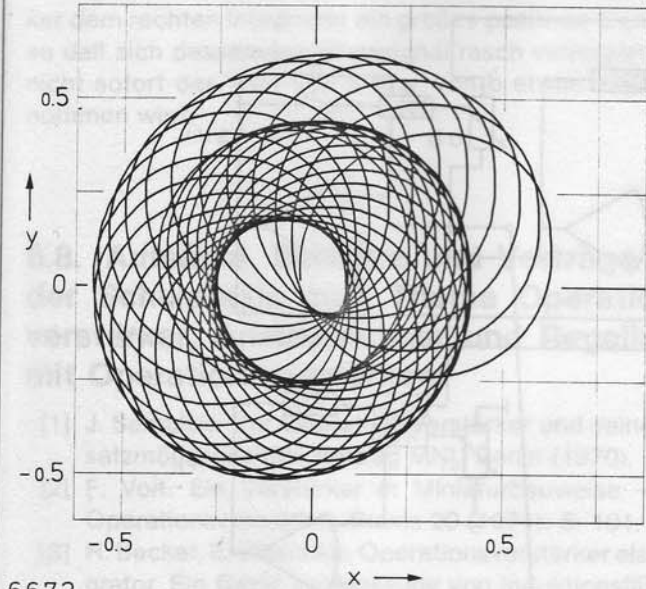
Um Streitfälle, ob das Ausgangssignal  $+1$  ( $\hat{=} 10$  V) oder  $-1$  ( $\hat{=} -10$  V) erreicht hat, zu vermeiden, sind unten im Programm zwei Komparatoren eingebaut, die gegebenenfalls das Ausgangssignal sofort auf etwa  $+1,2$  bzw.  $-1,2$  (übersteuerter Verstärker) springen lassen und dort festhalten.

Als Anzeigeeinstrument für  $s(t)$  eignet sich gut das Doppel-mavo (44286) mit Nullpunkt Mitte zusammen mit Meßbereichsschaltkasten (44284 oder 44274), da dann der Wettkampf von einer größeren Gruppe verfolgt werden kann.

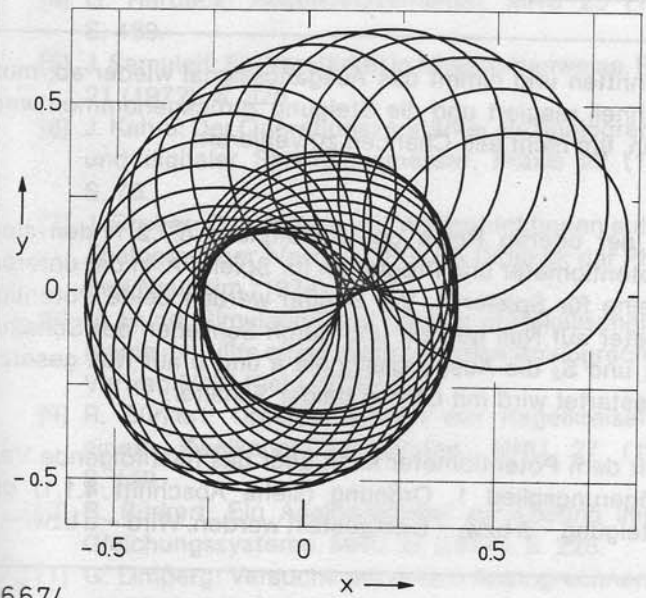
Für Anwender, die kein geeignetes Meßinstrument mit dem Nullpunkt in der Mitte zur Verfügung haben, folgt dem Integrator noch ein weiterer Operationsverstärker (rechts unten), mit dem gebildet wird:

$$z(t) = \frac{1}{2} (s(t) + 1)$$

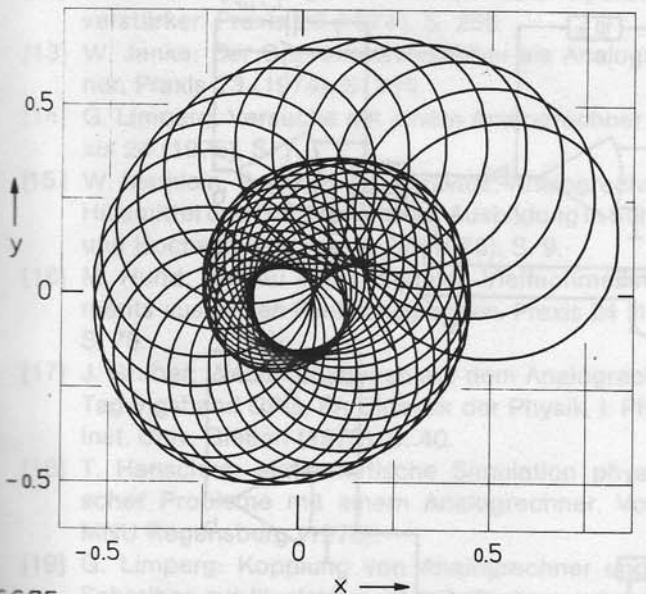
Jetzt liegt das Ausgangssignal  $z$  zwischen  $-0,1$  und  $+1,1$ . Es kann ein Voltmeter mit einem Meßbereich von  $10$  V verwendet werden. Spieler A versucht  $+1$  ( $\hat{=} 10$  V) und Spieler B versucht  $0$  ( $\hat{=} 0$  V) zu erreichen.



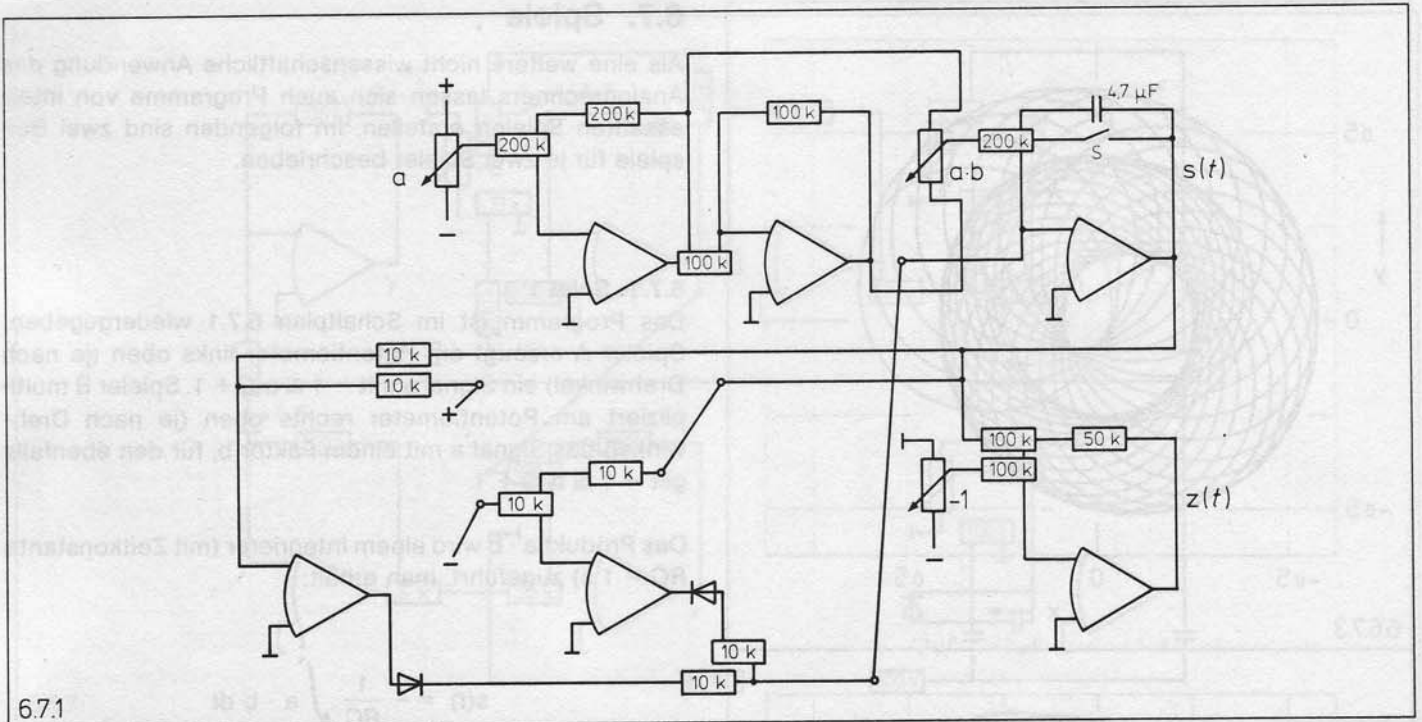
66.7.3



66.7.4



66.7.5



6.7.1

Besonders schwierig wird das Spiel bei Verwendung eines sehr trägen Anzeigeinstrumentes, weil dann Änderungen von  $z$  bzw. von  $s$  erst verspätet beobachtet werden können.

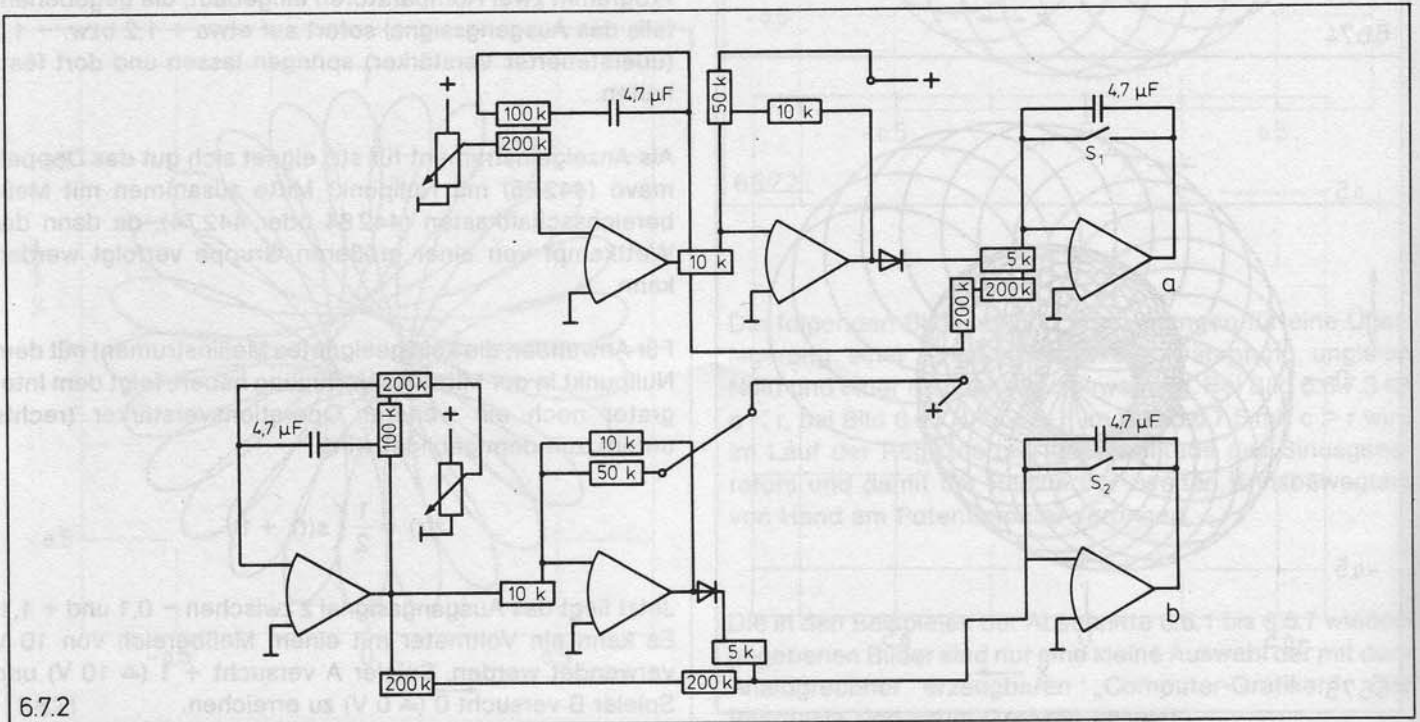
schritten und nimmt das Ausgangssignal wieder ab, muß schnell reagiert und die Steigung zurückgenommen werden, um nicht alle Chancen zu verlieren.

### 6.7.2 Spiel 2

Bei diesem Spiel für zwei Personen erzeugt jeder seine eigene Zeitfunktion  $a$  bzw.  $b$ . Gewonnen hat, wer von Null beginnend zuerst den Wert  $1$  ( $\cong 10$ ) erreicht. Hat es jedoch einer der Spieler zu eilig und gibt eine zu große Steigung vor, so nimmt sein Ergebnis plötzlich wieder ab. Gewinnen wird der Spieler, der es am besten versteht, seine Steigung, die nur über ein Verzögerungsglied eingestellt werden kann, nach dem Start möglichst rasch knapp unter den kritischen Wert zu bringen. Wird der kritische Wert über-

In der oberen Reihe des Schaltplans 6.7.2 finden sich Potentiometer und Programm für Spieler A, in der unteren Reihe für Spieler B. Vor Beginn werden beide Potentiometer auf Null gestellt und durch Schließen der Schalter  $S_1$  und  $S_2$  die Ausgangssignale  $a$  und  $b$  auf Null gesetzt. Gestartet wird mit Öffnen beider Schalter.

Mit dem Potentiometer kann über das nachfolgende Verzögerungsglied 1. Ordnung (siehe Abschnitt 4.1.1) die Steigung  $- \dot{a}$  bzw.  $- \dot{b}$  eingestellt werden. Wird  $- \dot{a}$  bzw.  $- \dot{b}$



6.7.2

---

zu negativ, so führt jeweils der mittlere Operationsverstärker dem rechten Integrierer ein großes positives Signal zu, so daß sich dessen Ausgangssignal rasch verringert, falls nicht sofort der Wert von  $\dot{a}$  bzw. von  $\dot{b}$  etwas zurückgenommen wird.

## 6.8. Aufsätze, Berichte und Vorträge aus der Schulpraxis zum Thema Operationsverstärker, Analogrechner und Regelkreis mit Operationsverstärkern

- [1] J. Samuleit: Der Operationsverstärker und seine Einsatzmöglichkeiten. Vortrag MNU Berlin (1970).
- [2] F. Voit: Ein Verstärker in Miniaturbauweise – Der Operationsverstärker. Praxis 20 (1971), S. 101.
- [3] H. Becker, E. Blaschke: Operationsverstärker als Integrator. Ein Gerät zur Messung von Induktionsflüssen  $\int U dt$  und Ladungen  $\int I dt$ . Praxis 21 (1972), S. 253.
- [4] G. Harbeck: Regelkreisverhalten. MNU 25 (1972), S. 469.
- [5] J. Samuleit: Ein Verstärker in Miniaturbauweise. Praxis 21 (1972), S. 325.
- [6] J. Kahra: Der Operationsverstärker als Analogrechner und digitaler Spannungsmesser. Praxis 22 (1973), S. 76.
- [7] J. Gruber: Das Spielen mit Wellenfunktionen auf dem Analogrechner. Vortrag DPG, FA Didaktik der Physik, Bad Nauheim (1974).
- [8] M. Hund: Simulation und Lösung physikalischer Probleme mit Hilfe eines elektronischen Analogrechners. Vortrag MNU Kiel (1974).
- [9] R. Bürkert: Untersuchungen von Regelkreisen mit einem Zweikanal-Oszillografen. MNU 27 (1974), S. 159.
- [10] R. Bürkert: Ein Analogrechner zur Lösung linearer Gleichungssysteme. MNU 27 (1974), S. 225.
- [11] G. Limperg: Versuche mit einem Analogrechner. Praxis 23 (1974), S. 210.
- [12] J. Kahra: Ergänzungen zum Bericht über Operationsverstärker. Praxis 23 (1974), S. 255.
- [13] W. Janke: Der Operationsverstärker als Analogrechner. Praxis 23 (1974), S. 315.
- [14] G. Limperg: Versuche mit einem Analogrechner. Praxis 24 (1975), S. 7.
- [15] W. Marklein, P. Rix, H.-W. Schwarz: Analogrechner – Hilfsmittel und Gegenstand der Ausbildung in Schulen und Hochschulen. Praxis 24 (1975), S. 9.
- [16] M. Hund: Aufbau eines digitalen Vielfachmeßinstruments aus seinen Funktionsgruppen. Praxis 24 (1975), S. 73.
- [17] J. Gruber: Wellenfunktionen auf dem Analogrechner. Tagungsband DPG, FA Didaktik der Physik, I. Physik. Inst. Univ. Gießen (1975), S. 40.
- [18] T. Hanschke: Mathematische Simulation physikalischer Probleme mit einem Analogrechner. Vortrag MNU Regensburg (1975).
- [19] G. Limperg: Kopplung von Analogrechner und TYSchreiber zur Illustration physikalischer und mathematischer Gesetze. Praxis 24 (1975), S. 321.