Rechenbeispiele

1. Grundoperationen mit Summierern

1.1 Multiplikation mit einer Konstanten

1.2 Summe von drei Variablen

1.3 Lösung eines linearen Gleichungssystemes mit zwei Unbekannten

2. Grundoperationen mit Integrierern

2.1 Integration einer konstanten Eingangsgröße $y = \int a\,dt$

2.2 Integration einer linear zeitabhängigen Variablen $y = \int (a \cdot t + b)\,dt$

3. Rechenoperationen mit der Multiplizierer-Einheit

3.1 Multiplikation $y = x_1 \cdot x_2$

3.2 Division $y = \frac{x_1}{x_2}$

3.3 Quadrieren $y = x^2$

3.4 Quadratwurzel $y = \sqrt{x}$

3.5 Lösung einer quadratischen Gleichung

4. Realisierung trigonometrischer Funktionen

4.1 Bildung der Funktion $y = \sin x$

4.2 Bildung der Funktion $y = \cos x$

4.3 Bildung der Funktion $y = \sin 2x$

5. Realisierung diskontinuierlicher Funktionen

5.1 Vergleich zweier Variablen (Komparator)

5.2 Bildung der Funktion $y = \mathrm{sign}\, x$

5.3 Bildung der Funktion $y = |x|$

6. Lösung linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung

6.1 Lösung der Differentialgleichung $y' = y$

6.2 Lösung der Differentialgleichung $y' = -k \cdot y$

7. Lösung linearer Differentialgleichungen 2. Ordnung

7.1 Lösung der Differentialgleichung $k_3 \cdot y'' + k_2 \cdot y' + k_1 \cdot y = 0$

7.2 Lösung der Differentialgleichung $y'' = -\omega^2 \cdot y$

Die nachfolgenden Rechenbeispiele sollen einen einführenden Überblick über die Methoden der Analog-Rechentechnik geben.

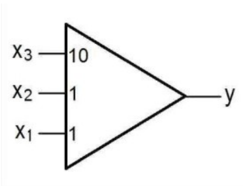
Auf Programmierungsdetails, wie die Variablen- und Zeitnormierung oder auf die Wahl von Anfangsbedingungen wird bei diesen Beispielen nur so weit eingegangen als es für das Verständnis erforderlich ist.

In den folgenden Beispielen werden die Variablen in dimensionslosen Maschinen-Einheiten angegeben. Der Maschinen-Einheit *+1* entspricht eine Rechenspannung von *+10 Volt*, der Einheit *-1* entspricht eine Spannung von *-10V*.

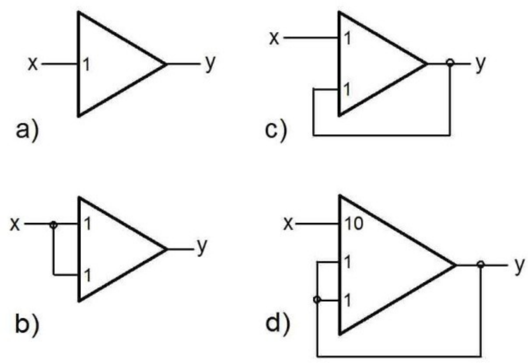
1. Grundoperationen mit Summierern

1.1 Multiplikation mit einer Konstanten:

Die Summierer des Analogrechners haben die allgemeine Übertragungsfunktion:



$$y = -(x_1 + x_2 + 10x_3) \qquad (1.1)$$



Wird nur ein Eingang verwendet (siehe nebenstehende Schaltung a), reduziert sich Glei-chung (1.1) auf:

$$y = -x.$$

Der Summierer arbeitet dann als einfacher Inverter.

Wird an zwei Summier-Eingänge die gleiche Eingangs-Variable gelegt (Schaltung b), so ergibt sich für die Ausgangs-Variable:

$$y = -2x.$$

Der Summierer wirkt jetzt wie ein Multiplizierer, der die Eingangsgröße mit einem konstanten Faktor 2 multipliziert.

Wird die Ausgangs-Variable *y*an einen Eingang zurückgeführt (Schaltung c), hat der Sum-mierer die gleiche Funktion wie ein Koeffizienten-Potentiometer:

Wegen

$$y = -(x+y)$$

ergibt sich:

$$y = -0{,}5 \cdot x.$$

Für die Schaltungsvariante d) folgt nach Gleichung (1.1):

$$y = -(10 \cdot x + y + y).$$

Daraus ergibt sich:

$$3y = -10 \cdot x$$

oder:

$$y = -3{,}33 \cdot x$$

1.2 Summe von drei Variablen:

$$y = x_1 - 2{,}5 \cdot x_2 + 0{,}5 \cdot x_3 + 1$$

Die nebenstehende Rechenschaltung liefert am Ausgang des Summierers S1:

$y_1 = -(- 2{,}5 \cdot x_2 + x_1 + 1)$.

Am Ausgang des Summierers S2 entsteht:

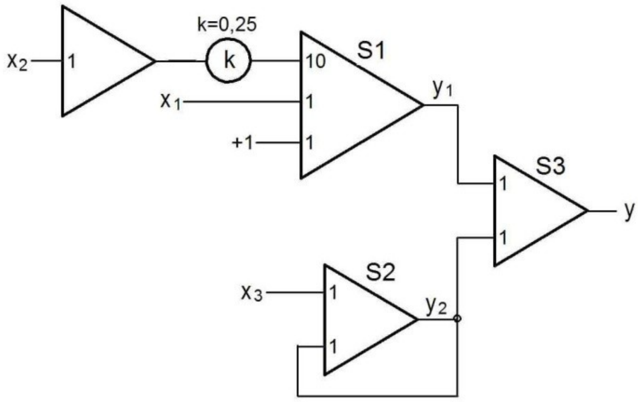
$y_2 = - 0{,}5 \cdot x_3$.

Der Summierer S3 liefert daher die Lösung:

$y = -(y_1 + y_2)$

und damit:

$$y = x_1 - 2{,}5 \cdot x_2 + 0{,}5 \cdot x_3 + 1.$$



Zahlenbeispiel 1:

$x_1 = 0{,}4 \quad x_2 = 0{,}2 \quad x_3 = -1{,}0$

Die Lösung lautet:

$y = 0{,}4$

Zahlenbeispiel 2:

$x_1 = -0{,}7 \quad x_2 = 0{,}7 \quad x_3 = 0{,}9$

Die rechnerische Lösung wäre:

$y = -1{,}0$.

Obwohl dieses Ergebnis im zulässigen Rechenbereich $-1{,}0 \leq y \leq +1{,}0$ liegt, ist das tatsächlich gemessene Rechenergebnis aber falsch, da bereits der Summierer S1 übersteuert ist:

$y_1 = -(- 2{,}5 \cdot x_2 + x_1 + 1) = -(-1{,}75 - 0{,}7 + 1) = 1{,}45.$

1.3 Lösung eines linearen Gleichungssystemes mit zwei Unbekannten:

$x_1 + 0{,}5 \cdot x_2 - 0{,}3 = 0$

$0{,}2 \cdot x_1 + x_2 + 0{,}3 = 0$

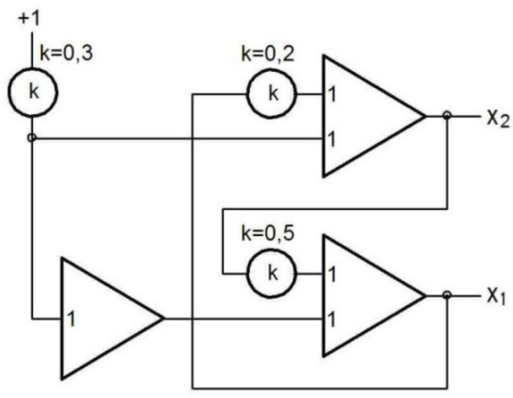
Zur Trennung der Variablen werden die Gleichungen umgewandelt:

$x_1 = -(0{,}5 \cdot x_2 - 0{,}3)$

$x_2 = -(0{,}2 \cdot x_1 + 0{,}3)$

In der nebenstehenden Rechenschaltung werden diese beiden Gleichungen direkt umgesetzt. Als Lösungen ergeben sich:

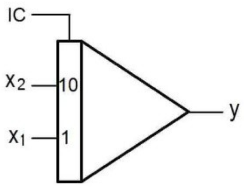
$x_1 = 0{,}5 \quad x_2 = -0{,}4$.



2. Grundoperationen mit Integrierern

2.1 Integration einer konstanten Eingangsgröße

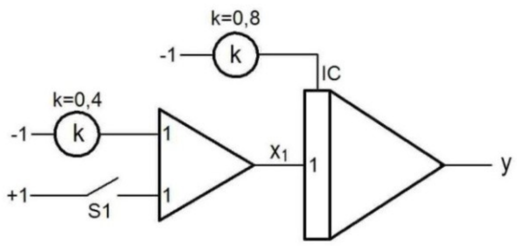
Die Integrierer des Analogrechners haben die allgemeine Übertragungsfunktion:



(2.1)

Wird nur der Integrierer-Eingang mit dem Gewichtsfaktor 1 verwendet, reduziert sich die Gleichung (2.1) auf:

(



In der nebenstehenden Demonstrations-Schaltung wird die Eingangsgröße x_1 durch einen Summierer gebildet:

Ist der Schalter S1 geöffnet, nimmt x_1 den konstanten Wert $a = +0{,}4$ an.

Bei geschlossenem Schalter S1 ändert sich x_1 von +0,4 auf -0,6.

Nach den Grundregeln der Integralrechnung gilt für die Integration einer Konstanten a:

$$a\,dt = a \cdot t \qquad (2.3)$$

Nach Gleichung *(2.2)* gilt daher für die Ausgangs-Variable des Integrierers:

$$y = -x_1 \cdot t \; - IC. \qquad (2.4)$$

Das Bild 2.1 zeigt den zeitlichen Verlauf der Ausgangs-Variablen *y* .

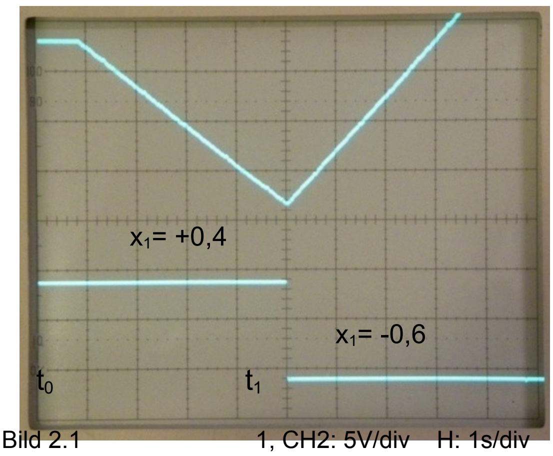


Bild 2.1 1, CH2: 5V/div H: 1s/div

Zum Zeitpunkt t_0 wird die Betriebsart des Integrierers von *IC* auf *RUN* geschaltet. Dadurch startet der Integrationsvorgang mit dem Anfangswert *+0,8.*

Der Wert der Variablen y fällt entsprechend Gleichung (2.4) linear mit der Zeit ab.

Zum Zeitpunkt t_1 wird x_1 auf den Wert $a = -0{,}6$ umgeschaltet. Nach Gleichung *(2.4)* ändert sich jetzt mit dem Vorzeichenwechsel von x_1 auch die Richtung von *y* und ebenso auch die Geraden-Steigung, da zum Zeitpunkt t_1 auch der absolute Betrag von x_1 von *0,4* auf *0,6* gestiegen ist.

2.2 Integration einer linear zeitabhängigen Variablen

Die Rechenschaltung des vorherigen Beispiels wird jetzt mit einem zweiten Integrierer erweitert.

Entsprechend einer Grundregel der Integralrechnung:

$$\int (a \cdot t + b)\, dt = \frac{a}{2} \cdot t^2 + b \cdot t$$

nimmt nun die Ausgangs-Variable des zweiten Integrierers einen quadratischen zeitlichen Verlauf an.

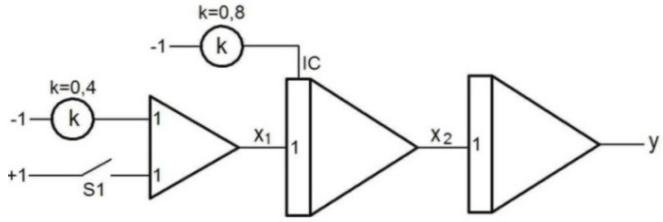
Bild 2.2 zeigt den Ablauf des Integrationsvorganges:

Zum Zeitpunkt t_0 werden beide Integrierer gestartet.

Zum Zeitpunkt t_1 wird wieder die Eingangs-Größe x_1 des ersten Integrierers auf einen negativen Wert umgeschaltet.

Bei jedem Nulldurchgang von x_2 tritt bei y ein Wendepunkt auf.

Zum Zeitpunkt t_2 überschreiten die Ausgänge der beiden Integrierer ihren linearen Rechenbereich von *±10V* und laufen kurz danach in den Sättigungsbereich, der durch die Höhe der Betriebsspannung *(±15V)* bedingt ist.



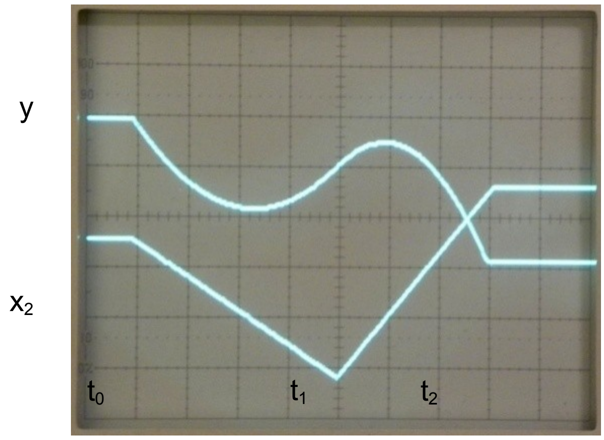
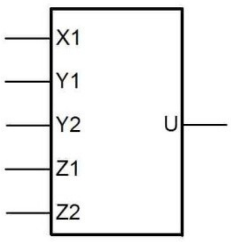


Bild 2.2 CH1, CH2: 5V/div H: 1s/div

3. Rechenoperationen mit der Multiplizierer-Einheit

Die allgemeine Übertragungsfunktion der Multiplizierer-Einheit wird durch folgende Gleichung beschrieben:

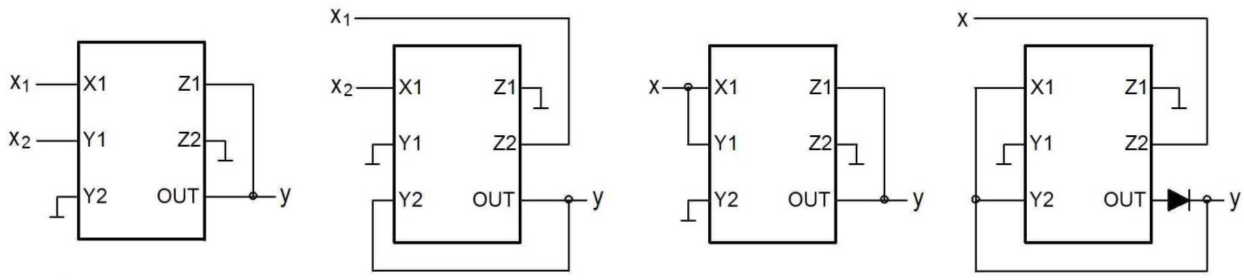


$$U = A \cdot (X1 \cdot (Y1 - Y2) + Z2 - Z1) \qquad (3.1)$$

Dabei sind *X1, Y1, Y2, Z1, Z2* die *Eingänge* der Multiplizier-Einheit, *U* ist der *Ausgang* und *A* ist der *innere Verstärkungsfaktor* der Multiplizier-Einheit *(A > 10.000)*.

Der zulässige Werte-Bereich für die Eingangs-Variablen der Multiplizier-Einheit ist abhängig von der Betriebsart:

Multiplikation	$-1 \le x_1 \le +1$	$-1 \le x_2 \le +1$
Division	$-1 \le x_1 \le +1$	$0 \le x_2 \le +1$
Quadrieren	$-1 \le x \le +1$	
Radizieren	$0 \le x \le +1$	



a) Multiplikation   b) Division   c) Quadrieren   d) Quadratwurzel

Bild 3.1

3.1 Multiplikation

Für die Ausführung einer Multiplikation ist eine Schaltung laut Bild 3.1 a) erforderlich.
Aus Gleichung *(3.1)* wird dann:

$$y = A\cdot(x_1\cdot x_2 - y).$$

Daraus folgt weiter:

$$y\cdot(A+1) = A\cdot x_1\cdot x_2$$

und wegen $A \gg 1$ gilt daher:

$$y = x_1\cdot x_2 .$$

3.2 Division

Für die Ausführung einer Division ist eine Schaltung laut Bild 3.1 b) erforderlich.
Aus Gleichung *(3.1)* wird für diesen Fall:

$$y = A\cdot(-x_2\cdot y + x_1)$$

Daraus folgt:

$$y\cdot(1 + A\cdot x_2) = A\cdot x_1$$

Wegen $A \gg 1$ gilt daher:

$$y\cdot x_2 = x_1$$

oder:

$$y = \frac{x_1}{x_2} .$$

3.3 Quadrieren

Werden in der Schaltung des Bildes 3.1a) die Variablen x_1 und x_2 gleichgesetzt, arbeitet die Multiplizier-Einheit als Quadrierer (siehe Bild 3.1 c):

$$y = x^2.$$

Bild 3.2 zeigt die Übertragungs-Funktion für die Betriebsart $y = x^2$.

In Bild 3.3 ist der zeitliche Verlauf der Funktion $y = x^2$ für eine dreieckförmige Eingangs-Variable x dargestellt.

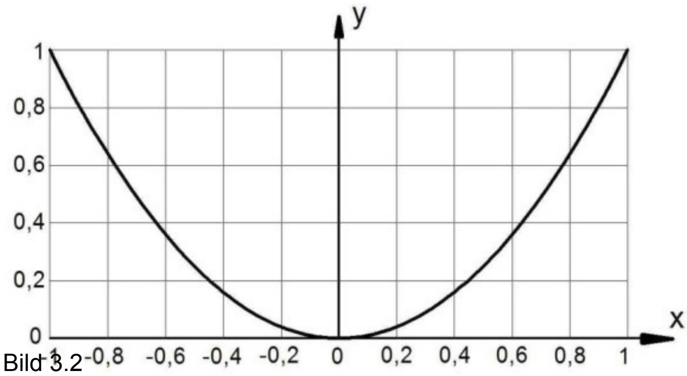


Bild 3.2

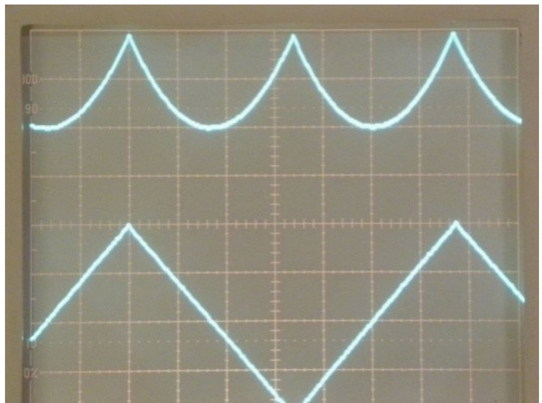


Bild 3.3 CH1, CH2: 5V/div H: 2ms/div

3.4 Quadratwurzel

Für die Berechnung einer Quadratwurzel ist eine Schaltung laut Bild 3.1 d) erforderlich. (Die im Rückführungskreis eingefügte Diode stellt sicher, dass an den Eingängen *X1* und *Y2* keine negativen Spannungen auftreten können. Das Rechenergebnis der Radizierschaltung tritt hier nicht direkt am Ausgang der Multiplizier-Einheit auf, sondern erst nach der Diode).

Aus Gleichung *(3.1)* wird:

$$y = A\cdot(-y^2 + x) = A\cdot x - A\cdot y^2$$

Daraus folgt wegen $A >> 1$:

$$y^2 = x$$

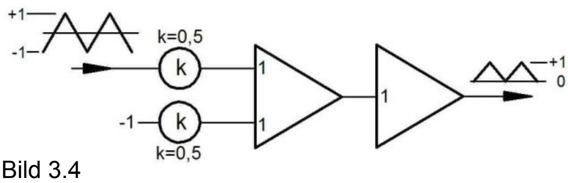


Bild 3.4

bzw.:

$y =$.

In Bild 3.5 ist die Übertragungsfunktion der Multiplizier-Einheit für $y =$ dargestellt.

$\sqrt{x}$

Bild 3.6 zeigt den zeitlichen Verlauf der Funktion für eine dreieckförmige Eingangs-Variable *x*.

Da die Quadratwurzel nur für positive Werte von *x* berechnet werden kann, muss vor die Multiplizier-Einheit eine Rechenschaltung nach Bild 3.4 geschaltet werden, um das bipolare Signal des Dreieckspannungs-Generators in ein unipolares umzuwandeln.

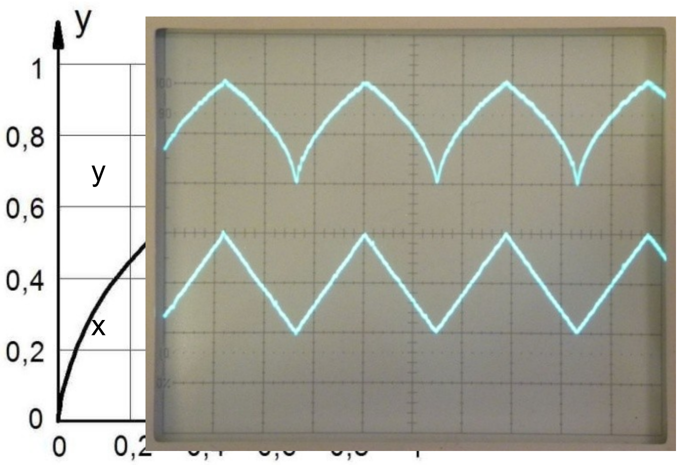


Bild 3.5 Bild 3.6 CH1, CH2: 5V/div H: 2ms/div

x

3.5 Lösung der quadratischen Gleichung

$y = x^2 - 0{,}7 \cdot x - 0{,}2$

Der erste Summierer in der nebenstehenden Rechenschaltung liefert an seinem Ausgang:

$y_1 = -(0{,}7 \cdot x + 0{,}2)$.

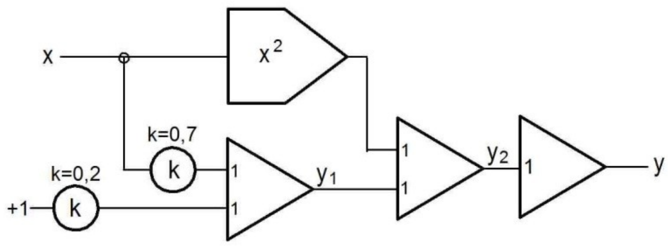


Bild 3.7

Am Ausgang des zweiten Summierers entsteht:

$y_2 = -(y_1 + x^2) = -(x^2 - 0{,}7 \cdot x - 0{,}2)$.

Für die Ausgangs-Variable des Inverters gilt daher:

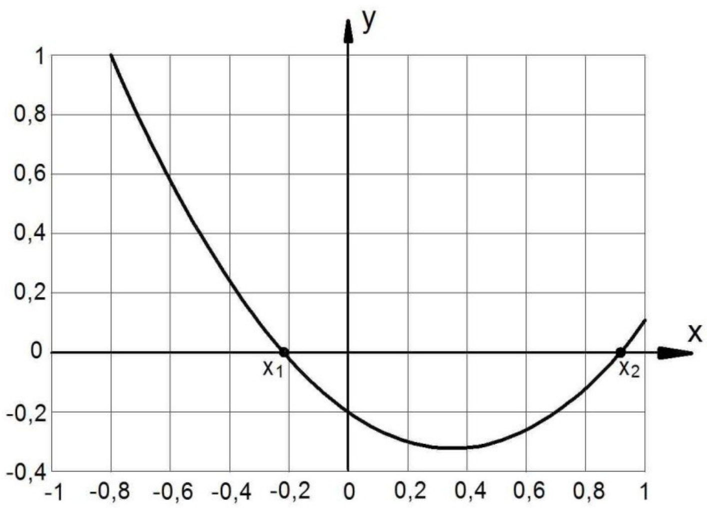
$y = x^2 - 0{,}7 \cdot x - 0{,}2$.

Bild 3.8 zeigt den Verlauf dieser Funktion.

Die Gleichung besitzt zwei Wurzeln bei:

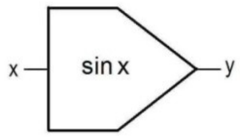
$x_1 = -0{,}22 \quad x_2 = +0{,}92$.

Weiters ist zu erkennen, dass für den Bereich $x \leq -0{,}8$ eine Übersteuerung der Rechenschaltung eintritt.



4. Realisierung trigonometrischer Funktionen

4.1 Bildung der Funktion y = *sin x*



Der Dioden-Funktionsgeber des Analogrechners erzeugt die Funktion:

$y = \sin x \qquad (-1 \leq x \leq +1)$.

Über einen Skalierungsfaktor

$x = \frac{\alpha}{90}$

ist die Eingangsvariable *x* damit proportional zu einem Winkel α, der im Bereich

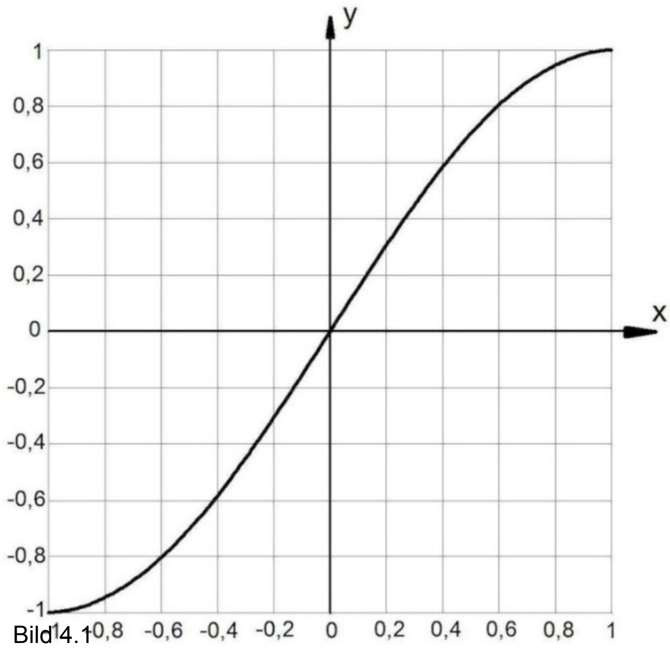


Bild 4.1

In Bild 4.1 ist die Übertragungsfunktion des Dioden-Funktionsgebers dargestellt.

Bild 4.2 zeigt den zeitlichen Verlauf der Aus-gangs-Variablen *y* für eine dreieckförmige Eingangsvariable *x*.

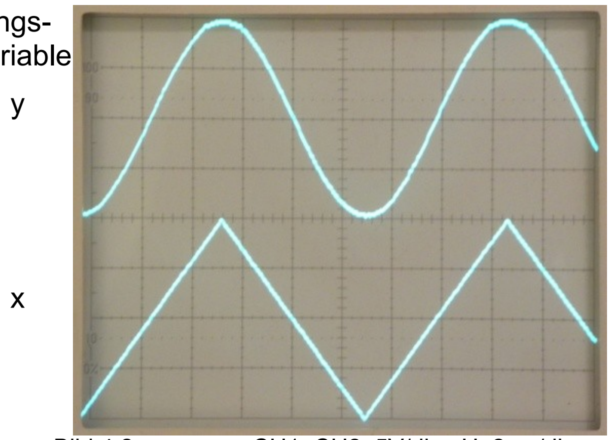


Bild 4.2 CH1, CH2: 5V/div H: 2ms/div

4.2 Bildung der Funktion *y = cos x*

Zur Realisierung der Cosinus-Funktion wird folgende Beziehung genutzt:

$\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$. (4.1)

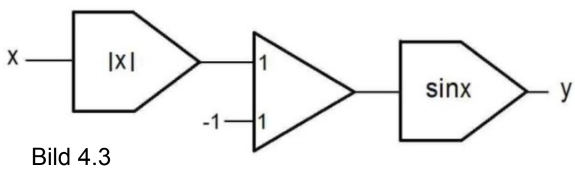
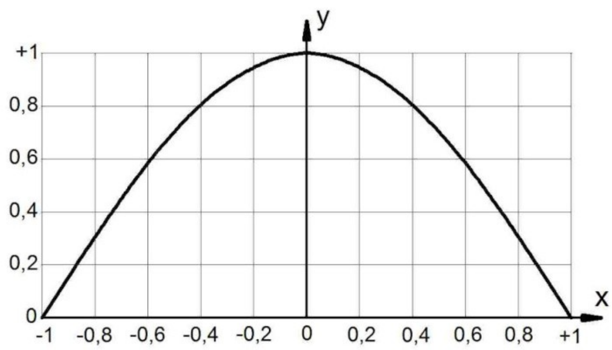


Bild 4.3

Für *x* gilt wieder die gleiche Skalierung wie im vorherigen Rechenbeispiel:

$x = \frac{\alpha}{90} \qquad -90^\circ \leq \alpha \leq +90^\circ$.



Aus Gleichung (4.1) wird daher:

$$\cos x = \sin(1-x). \qquad (4.2)$$

Die Funktion $y = \cos x$ nimmt im Bereich $-1 \le x \le +1$ nur positive Werte an.

Um das sicherzustellen, wird dem Summierer in der Rechenschaltung Bild 4.3 nicht die Variable x, sondern ihr Absolut-betrag $|x|$ zugeführt.

Am Ausgang des Dioden-Funktionsgebers entsteht somit das Ergebnis:

$$y = \cos x \qquad (-1 \le x \le +1).$$

(Die Absolutwert-Bildung einer Variablen wird in Beispiel 5.3 näher beschrieben).

In Bild 4.4 ist die Übertragungsfunktion der Rechenschaltung dargestellt.

Bild 4.5 zeigt den Verlauf der Ausgangsvariablen y für eine dreieckförmige Eingangs-Variable x.

Bild 4.4

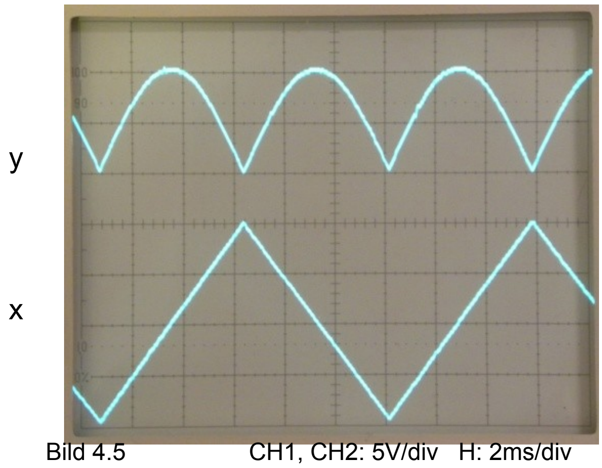


Bild 4.5 CH1, CH2: 5V/div H: 2ms/div

4.3 Bildung der Funktion *y = sin 2x*

In diesem Beispiel soll aus zwei harmonischen Variablen

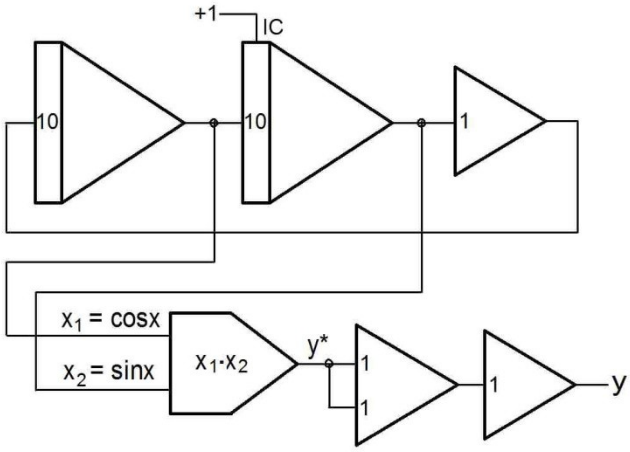
$$x_1 = \cos x \quad \text{und} \quad x_2 = \sin x$$

eine Variable mit doppelter Frequenz gebildet werden:

$$y = \sin 2x.$$

Die Berechnung basiert auf der trigonometrischen Grundformel:

$$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x. \qquad (4.3)$$



Die Variablen $x_1 = \cos x$ und $x_2 = \sin x$ werden in der obenstehenden Rechenschaltung durch die beiden Integrierer erzeugt und einem Multiplizierer zugeführt. (Die Wirkungsweise der Integrierer wird in Beispiel 7.2 näher betrachtet).

Das entstehende Produkt y^* ist nach

y^*

Gleichung (4.3):

$$y^* = x_1 \cdot x_2 = ½ \cdot \sin 2x. \qquad (4.4)$$

Im anschließenden Summierer und einem Inverter wird aus *y** das Endergebnis gebildet:

$$y = 2 \cdot y^* = \sin 2x. \qquad (4.5)$$

Wie in Bild 4.6 zu erkennen ist, besitzt die Variable y* entsprechend Gleichung (4.4) die doppelte Frequenz wie die Eingänge x_1 und x_2, aber nur die halbe Amplitude.

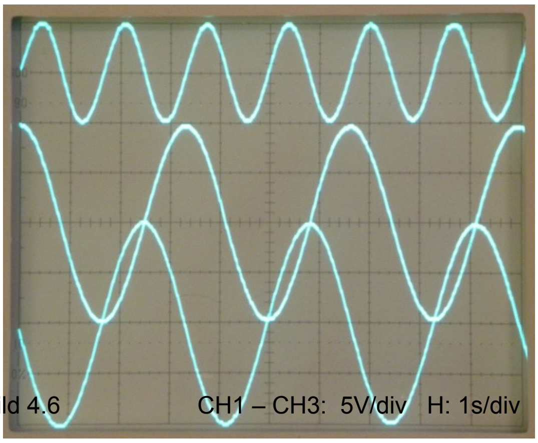
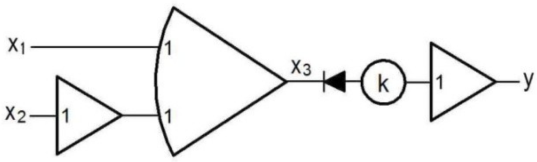


Bild 4.6 CH1 – CH3: 5V/div H: 1s/div

5. Realisierung diskontinuierlicher Funktionen

5.1 Vergleich zweier Variablen x_1, x_2 (Komparator)

Die Variable x_1 und die invertierte Variable x_2 werden an die Eingänge eines offenen Verstärkers gelegt. Wegen der sehr hohen Verstärkung des Rechenverstärkers entsteht an seinem Ausgang die Spannung x_3, für die gilt:



$x_3 = -U_S$ für $x_1 > x_2$

$x_3 = +U_S$ für $x_1 < x_2$.

($+U_S$ und $-U_S$ sind die Sättigungsspannungen des offenen Verstärkers (ca. ± *14V*). Die Ausgangsspannung x_3 wird anschließend auf die normale Maschinen-Einheit umgesetzt:

Die Diode unterdrückt die positiven Anteile von x_3, die negativen Anteile werden mit einem Koeffizienten-Potentiometer auf den Variablen-Wert -1 begrenzt. Der nachfolgende Inverter liefert daher das Ergebnis:

$y = +1$ für $x_1 > x_2$

$y = 0$ für $x_1 < x_2$ (5.1)

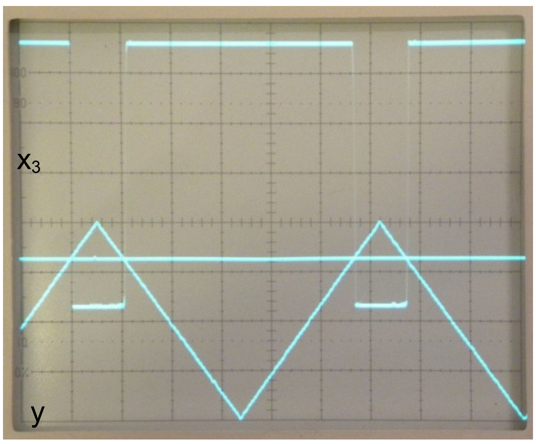
In Bild 5.1 ist der zeitliche Verlauf der Ausgangs-Spannung x_3 für eine dreieckförmige Eingangs-Variable x_1 und für eine konstante Eingangs-Größe x_2 dargestellt.

Bild 5.2 zeigt die Umwandlung der Spannung x_3 in die endgültige Ausgangs-Variable *y*.

x3

x2

x1



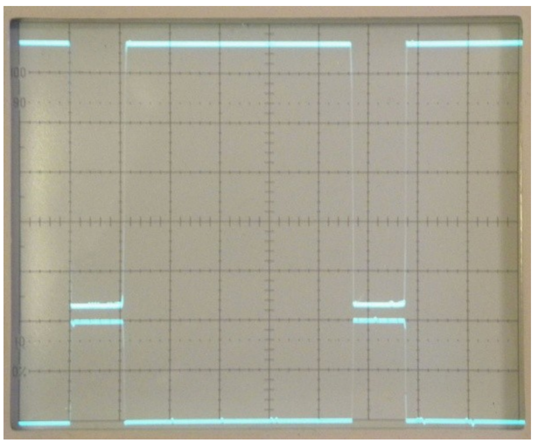
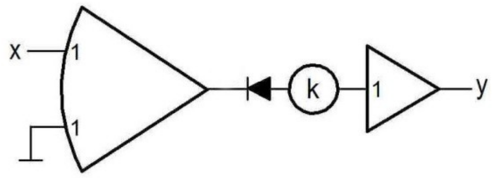


Bild 5.1 CH1 – CH3: 5V/div H: 2ms/div Bild 5.2 CH1, CH2: 5V/div H: 2ms/div

5.2 Bildung der Funktion *y = sign x*



Wird im vorhergehenden Rechenbeispiel die Eingangsvariable $x_2 = 0$ gesetzt, ändert sich die Gleichung (5.1) zu:

$y = +1$ *für* $x > 0$

$y = 0$ *für* $x < 0$

Die Rechenschaltung liefert also die Funktion:

$y = sign\ x$.

(Wegen $x_2 = 0$ ist der Inverter hier natürlich nicht mehr erforderlich).

Bild 5.3 zeigt den zeitlichen Verlauf der Ausgangs-Variablen *y* für eine dreieckförmige Eingangs-Variable *x*.

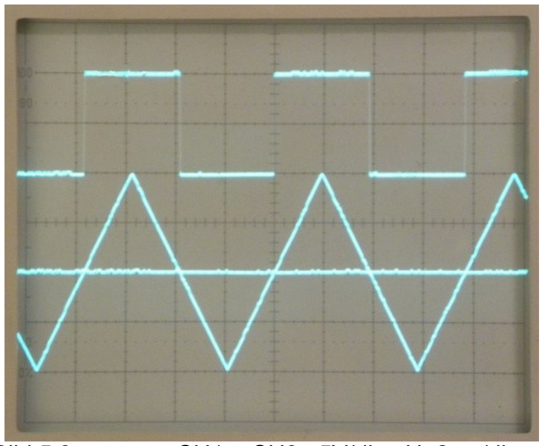
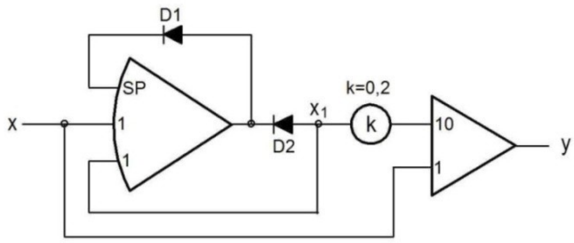


Bild 5.3 CH1 – CH3: 5V/div H: 2ms/div

5.3 Bildung der Funktion *y* = |*x*|



Die nebenstehende Rechenschaltung bildet den Absolutwert einer Variablen *x*:

Für *positive Werte von x* ist die Diode *D1* gesperrt, *D2* ist leitend. Der offene Verstärker arbeitet deshalb als einfacher Inverter:

$x_1 = -x$.

Für *negative Werte von x* ist die Diode *D2* gesperrt. Es gilt daher:

$x_1 = 0$

Die nachfolgende Summierer-Schaltung liefert die Ausgangs-Variable y:

$y = -(x + 2 \cdot x_1)$.

Es gilt daher:

$y = x$ *für* $x > 0$

$y = -x$ *für* $x < 0$.

Die Ausgangs-Variable y ist also immer positiv:

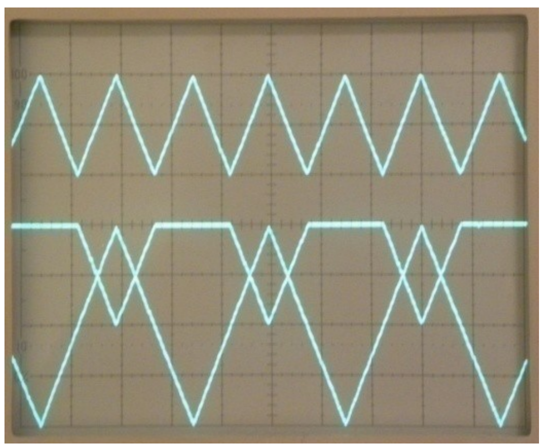


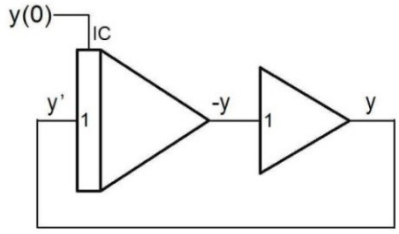
Bild 5.4 CH1 – CH3: 5V/div H: 2ms/div

$y = |x|$.

Bild 5.4 zeigt den zeitlichen Verlauf des Absolutwertes $y = |x|$ für eine dreieckförmige Eingangs-Variable *x.*

6. Lösung linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung

6.1 Lösung der Differentialgleichung *y'(t) = y(t)*



Zur Lösung der Gleichung

$$y'(t) = y(t) \qquad (6.1)$$

wird die nebenstehende Rechenschaltung verwendet.

Nimmt man an, dass am Eingang des Integrierers die Ableitung *y'(t)* liegt*,* so muss an seinem Ausgang die Variable $-y(t)$ entstehen.

Um die Gleichung (6.1) zu erfüllen, wird der Ausgang des Integrierers über einen Inverter an seinen Eingang zurückgeführt.

Nach der allgemeinen Integrationsregel

$$\int e^{a\cdot t} = \frac{1}{a}\cdot e^{a\cdot t} \qquad (6.2)$$

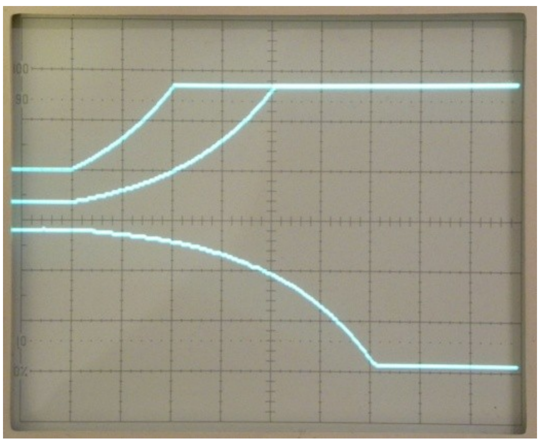
gilt für die Lösung der Gleichung (6.1), wenn die Konstante $a = 1$ gesetzt wird:

$$y(t) = y(0)\cdot e^{t}. \qquad (6.3)$$

Bild 6.1 zeigt die Lösungen *y(t)* für verschiedene Anfangsbedingungen *y(0).* Als Zeitkonstante für den Integrierer wurde dabei *T = 1s* gewählt.

Bild 6.2 zeigt drei oszillografisch ermittelte Lösungen. Der Integrierer wurde zum Zeitpunkt t_0 gestartet.
(Die Kurven wurden nacheinander aufgenommen und zwischengespeichert).

t(0)=+0,5
+1,0
t(0)=+0,2
0
t(0)= -0,1
-1,0
t_0



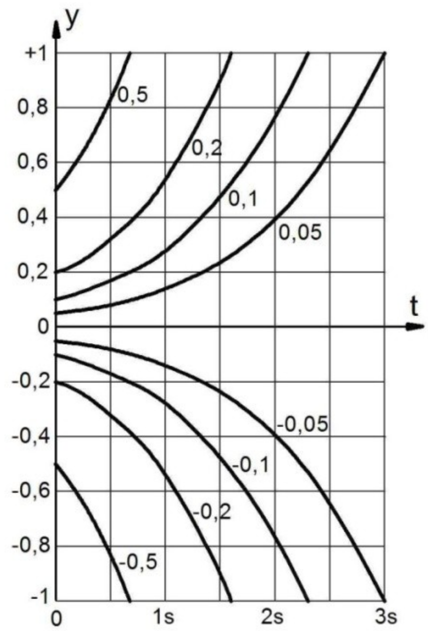
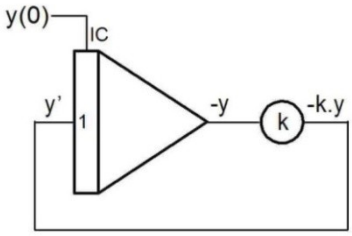


Bild 6.2 5V/div H: 0,5 Bild 6.1

6.2 Lösung der Differentialgleichung $y'(t) = -k\cdot y(t)$



Die Berechnung von

$$y'(t) = -k\cdot y(t) \qquad (6.4)$$

erfolgt in gleicher Weise wie in Beispiel 6.1, allerdings muss hier der Inverter durch ein Koeffizientenpotentiometer ersetzt werden, da ja nicht *y(t),* sondern $-k\cdot y(t)$ an den Eingang des Integrierers zurückgeführt werden soll.

Nach der Integrationsregel (6.2) ergibt sich jetzt mit dem Ansatz $a = -k$:

$$y(t) = y(0)\cdot e^{-k\cdot t}. \qquad (6.5)$$

Bild 6.3 zeigt die Lösungen *y(t)* für verschiedene Koeffizienten *k* und für die Anfangsbedingungen y(0) = ±1. Als Integrierer-Zeitkonstante wurde dabei *T = 1s* gewählt.

Bild 6.2 zeigt wieder drei oszillografisch ermittelte Lösungen.

+1,0
k = 0,1
k = 0,5
0
k = 0,2
-1,0
t_0

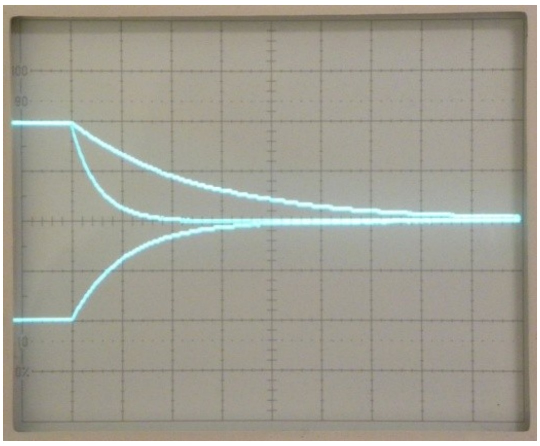


Bild 6.4 5V/div H: 5

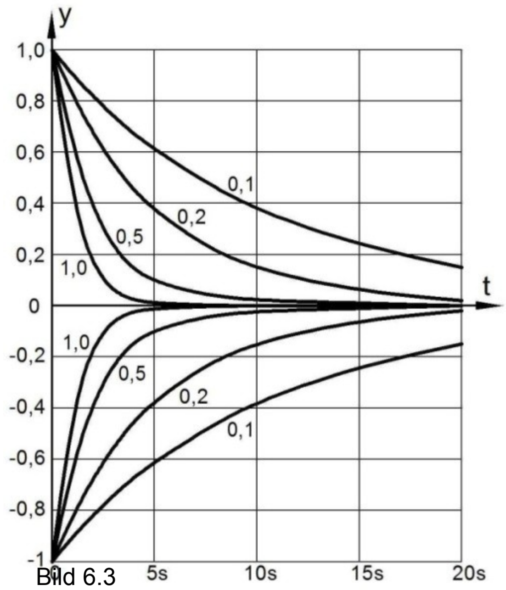


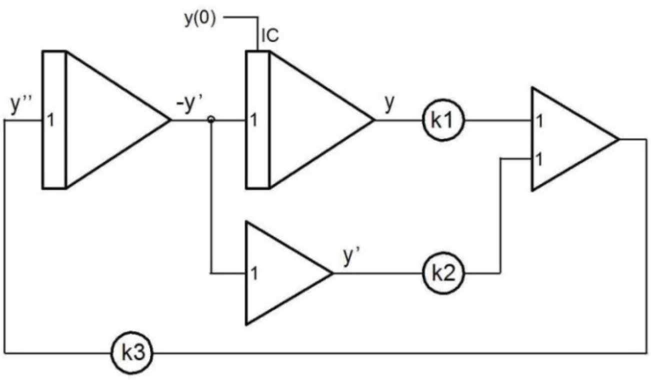
Bild 6.3

7. Lösung linearer Differentialgleichungen2. Ordnung

7.1 Lösung der Differentialgleichung $k_3\cdot y'' + k_2\cdot y' + k_1\cdot y = 0$

Um eine Rechenschaltung für die Lösung der Gleichung

$$k_3\cdot y'' + k_2\cdot y' + k_1\cdot y = 0 \qquad (7.1)$$



zu entwerfen, muss die Gleichung so umgewandelt werden, dass die höchste Ableitung y“ isoliert ist:

$$y'' = -\frac{1}{k_3}\cdot(k_2\cdot y' + k_1\cdot y)$$

(7.2)

Geht man davon aus, dass im obigen Blockschaltbild die zweite Ableitung *y“* am Eingang des ersten Integrierers liegt, so wird an seinem Ausgang die invertierte erste Ableitung *–y‘* entstehen. Am Ausgang des nächsten Integrierers wird dann *y* gebildet.

Der nachfolgende Summierer liefert die Summe: $-(k_2 \cdot y' + k_1 \cdot y)$.

Damit die Gleichung (7.2) erfüllt ist, muss diese Summe über das Koeffizienten-Potentiometer k_3 an den Eingang des ersten Integrierers zurückgeführt werden. Die Differentialgleichung ist damit gelöst. Lediglich die vorgegebenen Anfangsbedingungen müssen den beiden Integrierern noch zugewiesen werden.

In der Mechanik wird durch diese homogene Differentialgleichung 2. Ordnung der Bewegungsablauf eines *Feder-Masse-Systems* beschrieben, das durch die *Masse m*, die *Federkonstante c* und die *Dämpfungskonstante d* definiert wird.

Bei einem solchen System stehen die an *m* angreifende *Federkraft* $c \cdot y$ und die *Dämpfung* $d \cdot y'$

immer im Gleichgewicht mit der *Trägheitskraft* $m \cdot y''$:

$$m \cdot y'' + d \cdot y' + c \cdot y = 0. \qquad (7.3)$$

(Die Variable *y* entspricht dem *Schwingweg* der Masse *m,* die Ableitung *y‘* entspricht der *Geschwindigkeit* und *y“* entspricht der *Beschleunigung*).

Durch Vergleich der Gleichungen (7.1) und (7.3) ergeben sich die Zusammenhänge:

$$k_3 = m, \quad k_2 = d, \; k_1 = c.$$

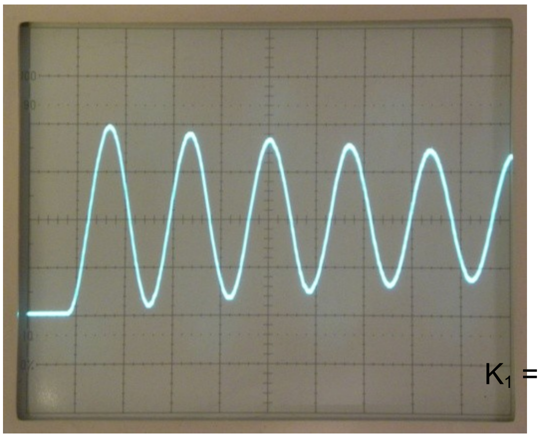
(Im Gegensatz zu allen vorangegangenen Rechenbeispielen sind die Koeffizienten k_1 bis k_3 hier also *nicht dimensionslos).*

Wird die Masse *m* zum Zeitpunkt t_0 um den Betrag y*(0)* aus der Ruhelage gebracht, führt sie eine periodische Schwingung um die Ruhelage y = *0* aus.

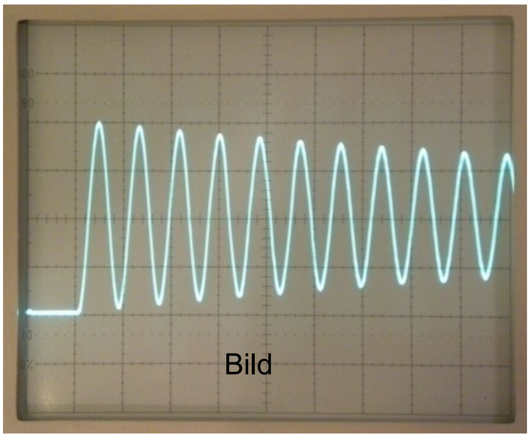
Die Bilder 7.1 und 7.2 zeigen den Einfluss der *Federkraft* k_1 auf die Schwingfrequenz der Masse *m*.

Für beide Bilder gemeinsam wurde angenommen:

$$k_3 = m = 0{,}8 \; k_2 = d = 0{,}01 \; y(0) = -1 \quad y'(0) = 0.$$



$K_1 = 0{,}2$



$K_1 = 0{,}8$

Bild

Bild 7.1

CH1: 5V/div H: 1

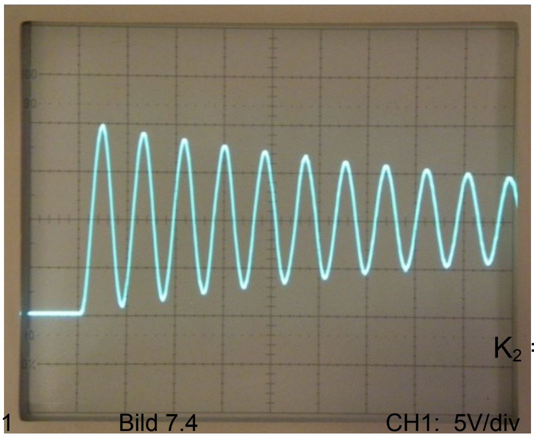
Bild 7.2

CH1: 5V/div H: 1

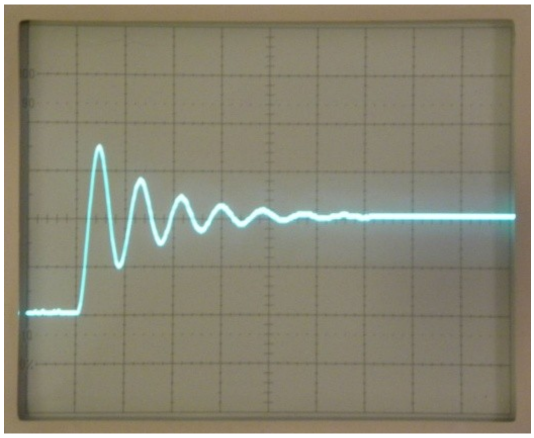
In den Bildern 7.3 bis 7.6 ist der Einfluss der *Dämpfungskonstanten* k_2 auf das Schwingverhalten der Masse *m* zu erkennen.

Für alle vier Bildern gemeinsam wurde angenommen:

$k_3 = m = 0{,}8 \quad k_1 = c = 0{,}8 \quad y(0) = -1 \; y'(0) = 0.$



$K_2 = 0{,}02$



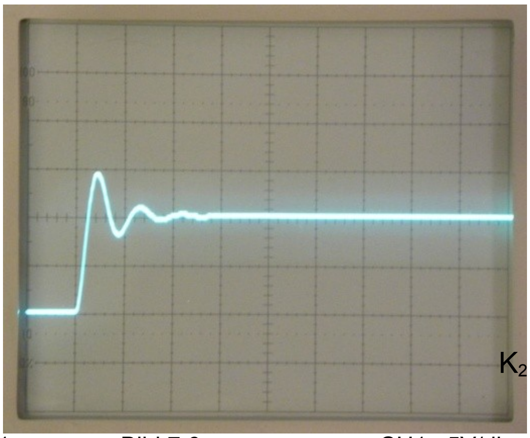
$K_2 = 0{,}2$

Bild 7.3

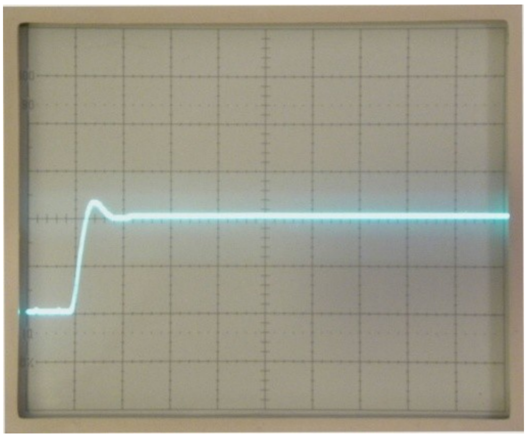
CH1: 5V/div H: 1

Bild 7.4

CH1: 5V/div H: 1



$K_2 = 0{,}5$



$K_2 = 1{,}0$

Bild 7.5

CH1: 5V/div H: 1

Bild 7.6

CH1: 5V/div H: 1

Bild

7.2 Lösung der Differentialgleichung $y'' = -\omega^2 y$

Wird in der Gleichung (7.1) des letzten Beispiels der Dämpfungsfaktor $k_2 = 0$ gesetzt, erhält man eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung, die eine *ungedämpfte Schwingung* beschreibt.

Aus Gleichung (7.1) wird:

$$k_3 \cdot y'' + k_1 \cdot y = 0$$

oder:

$$y'' = -\frac{k_1}{k_3} \cdot y \qquad (7.4)$$

Der Ausdruck $\sqrt{\frac{k_1}{k_3}}$ wird als *Kreisfrequenz ω* bezeichnet, wobei gilt:

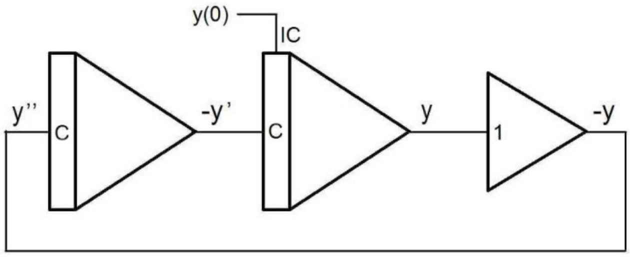
$\omega = 2\pi \cdot f$. (7.5)

Gleichung (7.4) erhält damit die Form:

$y'' = -\omega^2 y$. (7.6)

Zur Lösung dieser Gleichung wird folgender Ansatz gewählt:

$y'' = -\omega^2 \cdot \sin \omega t$ (7.7).



Besitzen die Integrierer in der nebenstehenden Rechenschaltung die Zeit-Konstanten T = 1" und die Gewichtsfaktoren C, so erhält man am Ausgang des ersten Integrierers*:*

$y' = C \cdot \omega \cdot \cos \omega t$ (7.8)

Die zweite Integration liefert:

$y = C^2 \cdot \sin \cdot \omega t$ (7.9)

Wird der Ausgang des zweiten Integrierers über einen Inverter und mit dem Eingang des ersten Integrierers verbunden, so muss gelten:

$-\omega^2 \cdot \sin \omega t = -C^2 \cdot \sin \omega t$

Daraus folgt:

$\omega = C$.

Wegen

$\omega = 2\pi \cdot f$

gilt daher für die Schwingfrequenz *f* :

$f = \frac{C}{2\pi}$.

Für einen Gewichtsfaktor *C = 1* ergibt sich damit eine Schwingfrequenz von:

f = 0,159 Hz.

Für einen Gewichtsfaktor *C = 10* ergibt sich eine Schwingfrequenz von:

f = 1,59 Hz.

Bild 7.7 zeigt die Ausgangs-Variablen der beiden Integrierer.

Wie nach den Gleichungen (7.8) und (7.9) zu erwarten ist, entstehen zwei um 90º phasenverschobene Sinus-Signale.

Da es in der Praxis keinen Rechenverstärker mit idealen Eigenschaften und keine Integationskondensatoren ohne Verluste gibt, tritt in der Rechenschaltung eine schwache Schwingungsdämpfung auf.
Als Folge davon klingen die Amplituden der beiden Sinus-Signale langsam ab.

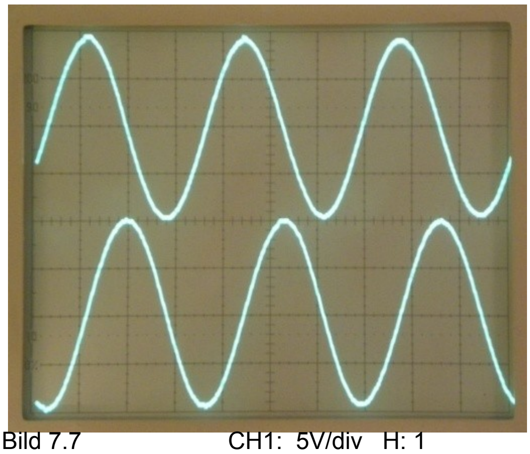


Bild 7.7 CH1: 5V/div H: 1