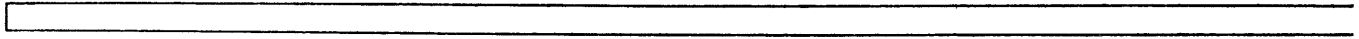


AEG



DATENVERARBEITUNG



**Schwingungsberechnung eines
Zwei-Massen-Systems**



1.
Fragestellung

Von dem Zwei-Massen-System nach Bild 1 sollen die Auslenkungen $y_1(t)$ und $y_2(t)$ bei sprungförmiger Störung $y_3(t)$ ermittelt werden. Die Feder- und Dämpferkennlinien sind in Bild 2 dargestellt.

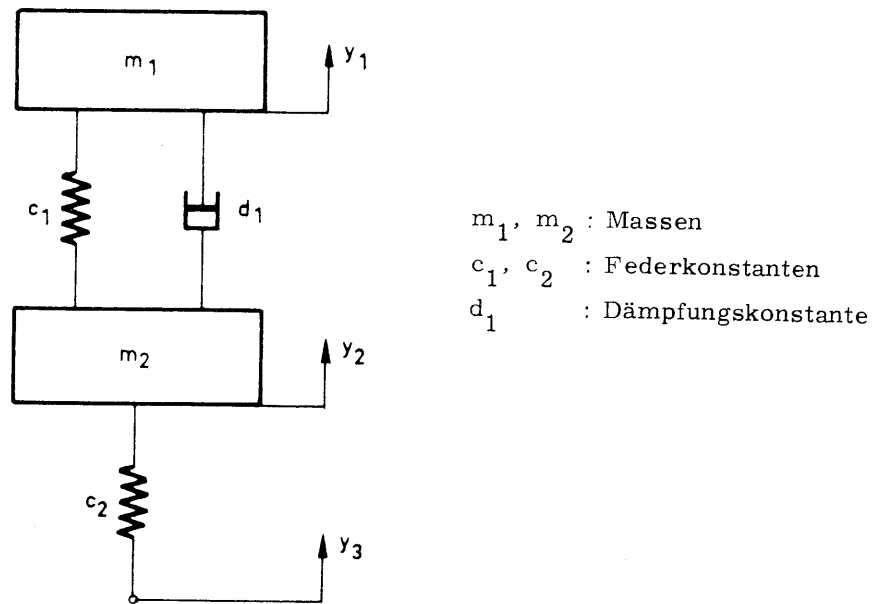
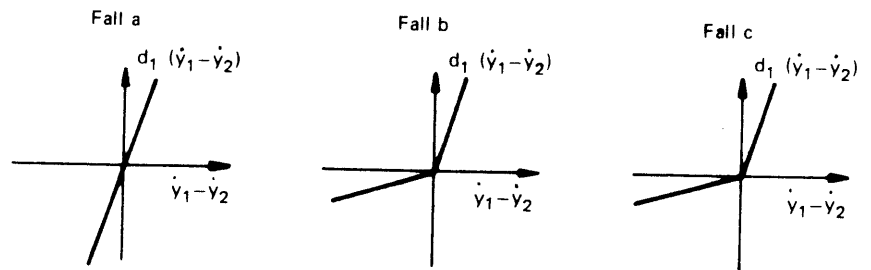
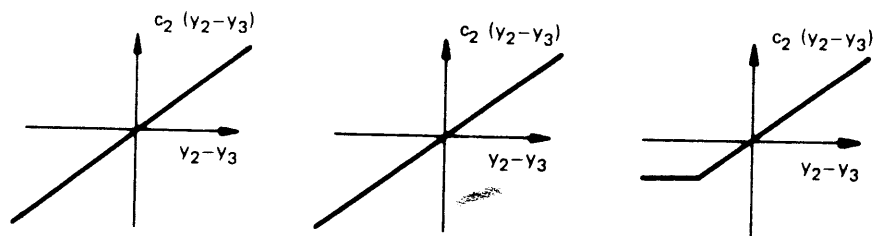


Bild 1 Zwei-Massen-System



Dämpferkennlinien, Dämpferkraft über Geschwindigkeit



Federkennlinien, Federkraft über Auslenkung

Bild 2 Feder- und Dämpferkennlinien

2.
Gleichungen

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} + \frac{d_1}{m_1} \left(\frac{dy_1}{dt} - \frac{dy_2}{dt} \right) + \frac{c_1}{m_1} (y_1 - y_2) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{d^2 y_2}{dt^2} + \frac{d_1}{m_2} \left(\frac{dy_2}{dt} - \frac{dy_1}{dt} \right) + \frac{c_1}{m_2} (y_2 - y_1) + \frac{c_2}{m_2} (y_2 - y_3) = 0 \quad (2)$$

3.
Konstanten

$$\begin{aligned} m_1 &= 20 \text{ kps}^2 \text{ m}^{-1} \\ m_2 &= 2 \text{ kps}^2 \text{ m}^{-1} \\ c_1 &= 500 \text{ kpm}^{-1} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} m_1 \\ m_2 \\ c_1 \end{aligned}} \right\} \text{Fall a, b, c}$$

$$d_1 = 80 \text{ kpsm}^{-1} \quad \text{Fall a}$$

$$d_1 = \begin{cases} 80 \text{ kpsm}^{-1} & \text{für } \dot{y}_1 - \dot{y}_2 > 0 \\ 8 \text{ kpsm}^{-1} & \text{für } \dot{y}_1 - \dot{y}_2 < 0 \end{cases} \quad \left. \vphantom{\begin{cases} 80 \\ 8 \end{cases}} \right\} \text{Fall b, c}$$

$$c_2 = 2000 \text{ kpm}^{-1} \quad \text{Fall a, b}$$

$$c_2 (y_2 - y_3) = \begin{cases} 20 (y_2 - y_3) \text{ kp} & \text{für } y_2 - y_3 > -0,37 \text{ cm} \\ -20 \cdot 0,37 \text{ kp} & \text{für } y_2 - y_3 < -0,37 \text{ cm} \end{cases} \quad \left. \vphantom{\begin{cases} 20 \\ -20 \cdot 0,37 \end{cases}} \right\} \text{Fall c}$$

$$y_3(t) = \begin{cases} 0 \text{ cm} & \text{für } t < 0 \\ 6,5 \text{ cm} & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

Anfangsbedingungen $y_1(0) = y_2(0) = 0$

Geschätzte Maximalwerte $y_{1\max} = y_{2\max} = y_{3\max} = y_m = 10 \text{ cm}$

4.
Normierung

Die Spannungen u_k des Analogrechners werden üblicherweise auf die maximale Rechenspannung E normiert

$$U_k = \frac{u_k}{E} \quad -1 \leq U_k \leq +1$$

und die Maschinenzeit t^* wird ersetzt durch eine dimensionslose Variable τ gemäß

$$\tau = kt^* \quad k [s^{-1}] \quad (3)$$

Die Problemgrößen werden in entsprechender Weise behandelt: Die abhängigen Variablen und ihre Ableitungen werden durch Normierung auf den Variationsbereich von -1 bis $+1$ gebracht, den die analogen normierten Spannungen besitzen. Die unabhängige Variable, z. B. die Zeit t , wird nach

$$\bar{\tau} = \lambda t \quad \lambda [s^{-1}] \quad (4)$$

durch die dimensionslose Größe $\bar{\tau}$ ersetzt. Durch Gleichsetzen der normierten Problemvariablen mit den zugeordneten normierten Spannungen, ferner durch Gleichsetzen von $\bar{\tau}$ mit τ werden die normierten Problemgleichungen zu Maschinengleichungen, die sich unmittelbar in eine Rechenschaltung umsetzen lassen.

4.1. Amplitudennormierung

Da die Anfangswerte der Amplituden Null sind, normieren wir die Amplituden selbst auf ihre Maximalwerte: $Y_i = \frac{y_i}{y_m}$ mit $i = 1, 2, 3$. Die dimensionslosen Größen Y_i variieren im Bereich von -1 bis +1.

4.2. Zeitnormierung

Durch den Maßstabsfaktor λ in der problemseitigen Zeitnormierung (4) können die Koeffizienten der Maschinengleichung auf einstellbare Werte gebracht werden. Die Maschinengleichungen lassen sich, entsprechend der maschinenseitigen Zeitnormierung (3), durch Variieren der Integrationsgeschwindigkeit des Analogrechners auf verschiedene Weise realisieren. Die Integrationsgeschwindigkeit k wird beeinflusst von

- α) einer für alle Integrierereingänge der Schaltung gemeinsamen Eingangsbewertung c ,
- β) dem Integrationsfaktor $k_0 [s^{-1}]$, der durch die Kapazität der Integrationskondensatoren festgelegt wird. Der Zusammenhang zwischen Problemzeit t und Maschinenzeit t^* ergibt sich aus (3) und (4) zu

$$t^* = \varphi t \quad \varphi = \frac{\lambda}{k} = \frac{\lambda}{c k_0} \quad (5)$$

- $\varphi > 1$ Zeitdehnung
- $\varphi = 1$ Echtzeit (Identität der Zeiten)
- $\varphi < 1$ Zeitraffung

5. Maschinengleichungen

Mit der Amplituden- und Zeitnormierung und den Abkürzungen

$$\frac{dY}{d\tau} = Y', \quad \frac{d^2 Y}{d\tau^2} = Y'' \quad \text{ergeben sich die Maschinengleichungen:}$$

$$Y_1'' + \frac{d_0}{m_1 \lambda} \cdot \frac{d_1}{d_0} (Y_1' - Y_2') + \frac{c_1}{m_1 \lambda^2} (Y_1 - Y_2) = 0 \quad (6)$$

$$Y_2'' + \frac{d_0}{m_2 \lambda} \cdot \frac{d_1}{d_0} (Y_2' - Y_1') + \frac{c_1}{m_2 \lambda^2} (Y_2 - Y_1) + \frac{c_0}{m_2 \lambda^2} \cdot \frac{c_2}{c_0} (Y_2 - Y_3) = 0 \quad (7)$$

In den Fällen b, c ist die Dämpferkennlinie, im Fall c die Federkennlinie nichtlinear. Die Koeffizienten der Differentialgleichungen (6), (7) sind daher in die konstanten Anteile

$$\frac{d_o}{m_1 \lambda}, \quad \frac{d_o}{m_2 \lambda}, \quad \frac{c_o}{m_2 \lambda^2}; \quad d_o = \text{const}, \quad c_o = \text{const}$$

und die von dem Vorzeichen von $(Y'_1 - Y'_2)$ bzw. $(Y_2 - Y_3)$ abhängigen Anteile

$$\frac{d_1}{d_o}, \quad \frac{c_2}{c_o}$$

unterteilt worden. Die konstanten Anteile werden in der Schaltung durch Potentiometer eingestellt, die nichtlineare Dämpfer- bzw. Federkraft

$$\frac{d_1}{d_o} (Y'_1 - Y'_2), \quad \frac{c_2}{c_o} (Y_2 - Y_3)$$

wird durch die nichtlinearen Schaltungen (Bild 4, 5) nachgebildet. Wenn die Größen d_o, c_o den Werten von d_1, c_2 gleichgesetzt werden, die für die linearen Kennlinien gelten:

$$d_o = 80 \text{ kpsm}^{-1} \quad c_o = 2000 \text{ kpm}^{-1},$$

so erhalten die Koeffizienten der Differentialgleichungen (6), (7) folgende Werte:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d_o}{m_1 \lambda} &= \frac{4}{\lambda} & \frac{d_o}{m_2 \lambda} &= \frac{40}{\lambda} \\ \frac{c_1}{m_1 \lambda^2} &= \frac{25}{\lambda^2} & \frac{c_1}{m_2 \lambda^2} &= \frac{250}{\lambda^2} \\ \frac{c_o}{m_2 \lambda^2} &= \frac{1000}{\lambda^2} \end{aligned} \right\} (8)$$

Damit die Koeffizienten mit Hilfe von Potentiometern und Eingangsbewertungen einstellbar werden, wird $c = 1$ und $\lambda = 10 \text{ s}^{-1}$ gewählt. Die Gleichungen (6), (7) erhalten dann die Form:

$$Y_1'' + 0,4 \cdot \frac{d_1}{d_o} (Y'_1 - Y'_2) + 0,25 (Y_1 - Y_2) = 0 \quad (9)$$

$$Y_2'' + 4 \cdot \frac{d_1}{d_o} (Y'_2 - Y'_1) + 2,5 (Y_2 - Y_1) + 10 \cdot \frac{c_2}{c_o} (Y_2 - Y_3) = 0 \quad (10)$$

mit

$$\frac{d_1}{d_0} = 1 \quad \text{Fall a} \quad \left. \vphantom{\frac{d_1}{d_0}} \right\} (11)$$

$$\frac{d_1}{d_0} (Y'_1 - Y'_2) = \begin{cases} Y'_1 - Y'_2 & \text{für } Y'_1 - Y'_2 > 0 \\ 0, 1 (Y'_1 - Y'_2) & \text{für } Y'_1 - Y'_2 < 0 \end{cases} \quad \text{Fall b, c}$$

$$\frac{c_2}{c_0} = 1 \quad \text{Fall a, b} \quad \left. \vphantom{\frac{c_2}{c_0}} \right\} (12)$$

$$\frac{c_2}{c_0} (Y_2 - Y_3) = \begin{cases} Y_2 - Y_3 & \text{für } Y_2 - Y_3 > -0,037 \\ -0,037 & \text{für } Y_2 - Y_3 < -0,037 \end{cases} \quad \text{Fall c}$$

Der Zeitmaßstabsfaktor hat den Wert $\varphi = \lambda/k = 10/k_0$. Der Vorgang läuft bei Wahl des Integrationsfaktors $k_0 = 1 \text{ s}^{-1}$ in 10-facher Zeitdehnung, bei Wahl von $k_0 = 10 \text{ s}^{-1}$ in Echtzeit, bei Wahl von $k_0 = 100 \text{ s}^{-1}$ in 10-facher Zeitraffung ab.

6. Rechenschaltung

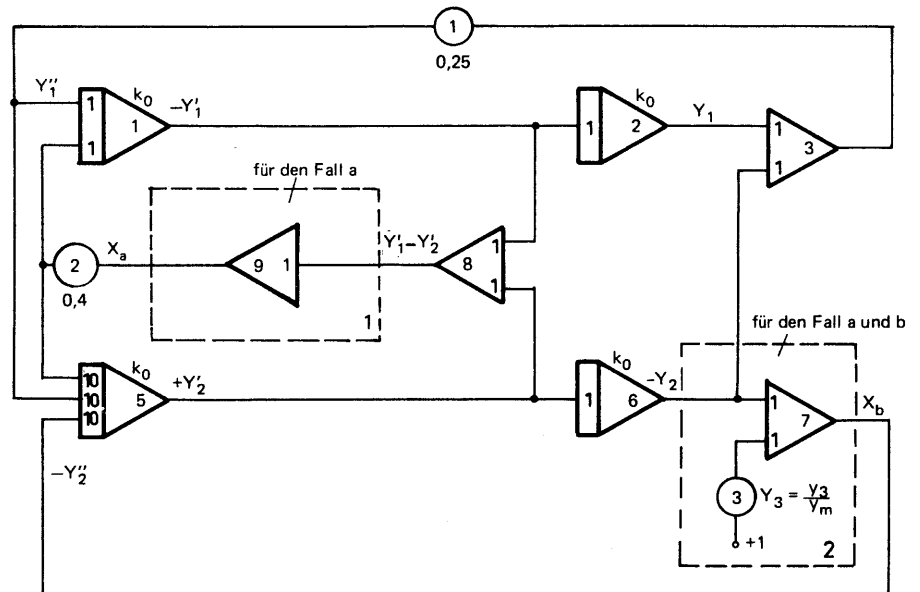


Bild 3 Rechenschaltung für das System nach Bild 1

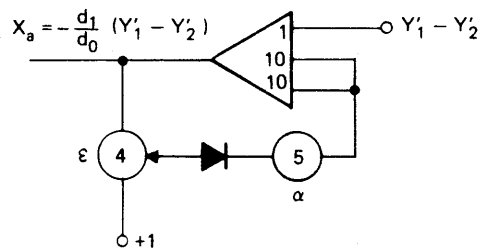


Bild 4 Schaltungsteil 1 für Fall b, c

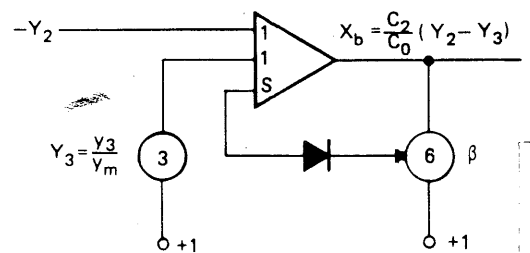


Bild 5 Schaltungsteil 2 für Fall c

In der Betriebsart "Pause" hat der Ausgang von Summierer 7 eine normierte Spannung von $X_b = -Y_3$. Beim Schalten auf "Rechnen" wird diese Spannung über einen Eingangswiderstand an den Summierpunkt des Integrierers 5 gelegt. Dadurch wird eine am Eingang von Verstärker 5 wirksame Sprungfunktion erzeugt. Im Fall b und Fall c ist der in der Rechenschaltung (Bild 3) gestrichelt umrahmte Teil 1 durch den Schaltungsteil 1 aus Bild 4 ersetzen. Das Potentiometer zwischen Verstärkerausgang und der Bezugsspannung +1 dient zur Kompensation der Diodenlaufspannung. ϵ wird so eingestellt, daß der Knickpunkt der Dämpferkennlinie in den Nullpunkt fällt (Bild 2). Zwischen Ausgang X_a und Eingang $Y_1 - Y_2$ besteht die Beziehung:

$$X_a = - (Y_1' - Y_2') \quad \text{für } Y_1' - Y_2' > 0 \quad (13)$$

(Rückführung über Diode unterbrochen)

$$X_a = - \frac{Y_1' - Y_2'}{1 + 20 \alpha} \quad \text{für } Y_1' - Y_2' < 0 \quad (14)$$

(Rückführung über Diode wirksam)

Aus der Dämpferkennlinie (11) und der Formel (14) ergibt sich $\alpha = 0,45$. Da die Diode nicht, wie Formel (14) voraussetzt, ideal arbeitet, hat α einen abweichenden Wert, der durch Ausmessen der Kennlinie einzustellen ist. Dabei zeigt sich, daß nur ein Eingang der Bewertung 10 mit dem theoretischen Faktor $\alpha = 0,9$ nicht ausreicht, um die vorgeschriebene Steigung der Kennlinie zu erzeugen.

Im Fall c ist der gestrichelt umrahmte Teil 2 in Bild 3 durch den Schaltungsteil 2 aus Bild 5 zu ersetzen. In der Schaltung leitet die Diode, sobald die Ausgangsspannung des Verstärkers X_b einen durch den Koeffizienten β einstellbaren negativen Wert $-B$ zu überschreiten versucht. Es gilt der Zusammenhang:

$$X_b = Y_2 - Y_3 \quad \text{für } Y_2 - Y_3 > -B \quad (15)$$

(Rückführung über Diode unterbrochen)

$$X_b = -B \quad \text{für } Y_2 - Y_3 < -B \quad (16)$$

(Rückführung über Diode wirksam)

Der Wert $B = 0,037$ (vgl. (12)) wird an Hand der Kennlinie am Potentiometer eingestellt.

7.
Potentiometer-
liste

Tab. 1 ist die zur Schaltung der Bilder 3 bis 5 gehörende Potentiometerliste. In der Spalte 1 stehen die Nummern der Potentiometer, wie sie in der Schaltung eingezeichnet sind. In der Spalte 2 sind die Koeffizienten der Problemgleichungen (1) und (2) aufgeführt, die in ihrer normierten Form (Spalte 3) einzustellen sind. Die Spalte 4 enthält die Zahlenwerte der normierten Koeffizienten für den Zeitmaßstabsfaktor $\lambda = 10 \text{ s}^{-1}$ und den Maximalwert $y_m = 10 \text{ cm}$. Wenn das Potentiometer nicht zu einem Eingang der Bewertung 1 führt, ist die Eingangsbewertung als Faktor herausgezogen.

Tab. 1 Potentiometerliste

Pot. Nr.	Koeffizient	normierter Koeffizient	Zahlenwerte	
			$\lambda = 10 \text{ s}^{-1}$	$y_m = 10 \text{ cm}$
1	$\frac{c_1}{m_1}$	$\frac{c_1}{m_1 \lambda^2}$	0,25	
1	$\frac{c_1}{m_2}$	$\frac{c_1}{m_2 \lambda^2}$	0,25 · 10	
2	$\frac{d_1}{m_1}$	$\frac{d_0}{m_1 \lambda}$	0,4	
2	$\frac{d_1}{m_2}$	$\frac{d_0}{m_2 \lambda}$	0,4 · 10	
3	y_3	$Y_3 = \frac{y_3}{y_m}$	0,65	
4	Kompensation Diodenanlauf- spannung	ϵ	$\approx 0,05$	
5	Steigung Kennlinie	$\approx \frac{d_0/d_1 - 1}{20}$	$\approx 0,45$	
6	Begrenzung	$\approx \frac{B}{B+1}$	$\approx 0,035$	

8.
Ergebnisse

Die zeitlichen Verläufe der Auslenkungen $Y_1(t^*)$ und $Y_2(t^*)$ sind für die Fälle a, b, c in den Bildern 6 bis 12 festgehalten. Im Fall b übersteuert der Verstärker 5. Der Sprung von Y_3 von 0 auf 0,65 ist hier zu stark. Die Amplitudennormierung auf $y_m = 10$ cm der Fälle a, b ist zu ändern und so zu wählen, daß der Verstärker nicht mehr übersteuert.

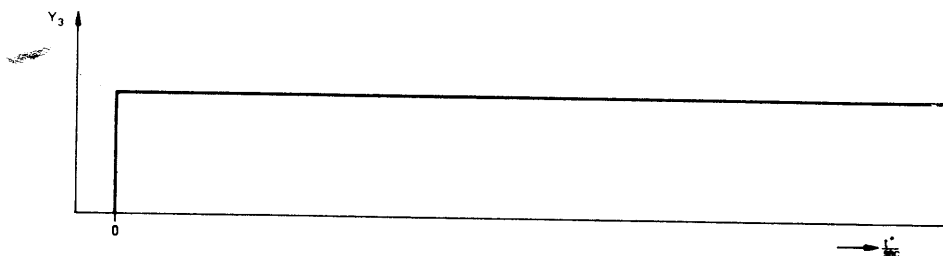


Bild 6 Störfunktion

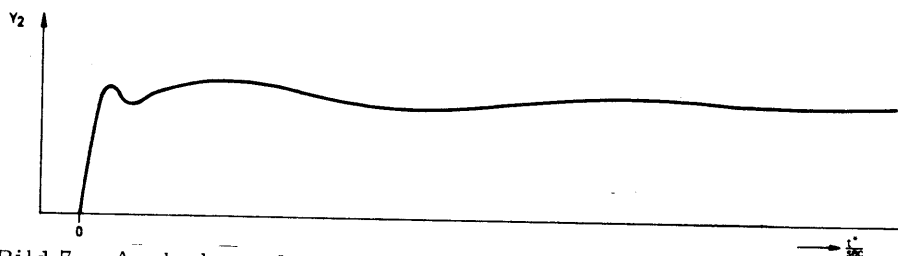


Bild 7 Auslenkung der Masse m_2 , Fall a

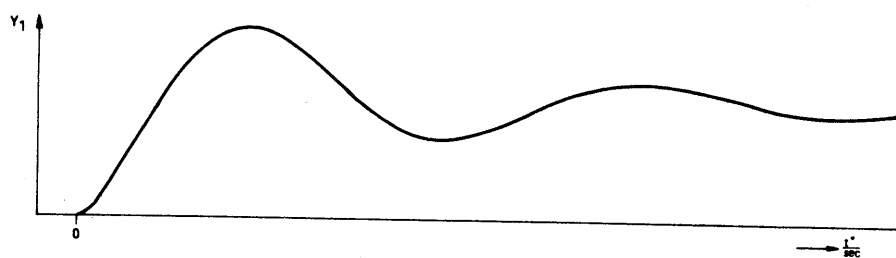


Bild 8 Auslenkung der Masse m_1 , Fall a

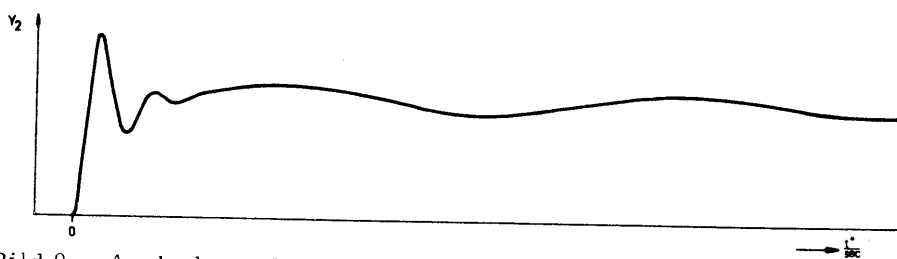


Bild 9 Auslenkung der Masse m_2 , Fall b

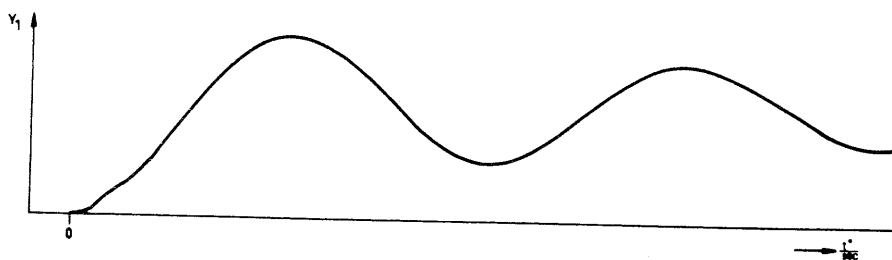


Bild 10 Auslenkung der Masse m_1 , Fall b

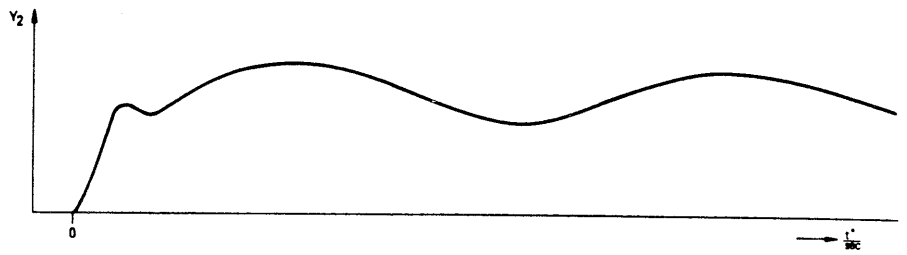


Bild 11 Auslenkung der Masse m_2 , Fall c

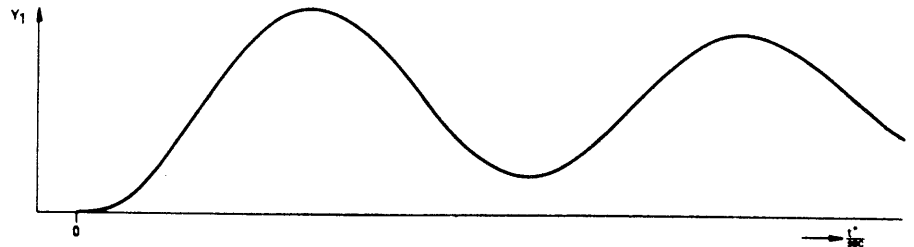


Bild 12 Auslenkung der Masse m_1 , Fall c

Literatur:

- [1] Szabo, Einführung in die Technische Mechanik, Springer-Verlag 1961
- [2] Giloi W., Herschel R., Rechenanleitung für Analogrechner, TELEFUNKEN-Fachbuch